25.

Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. ord. math. Regiom.)

I.

Resolutio aequationum algebraica poscit, ut, dato numero elementorum, singula elementa per functiones eorum symmetricas ope extractionis radicum exhibeantur. Quod pro secundi, tertii, quarti gradus aequationibus succedere notum est. Functionum illarum symmetricarum natura cum in libris certe elementaribus indicari non soleat, rapide eam exponam.

Resolutio aequationum secundi gradus.

Propositis duobus elementis a, b, habentur singula per formulam

$$\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]}.$$

Resolutio aequationum tertii gradus.

Propositis tribus elementis a, b, c, statuamus

$$a+b+c=u, \qquad a+\alpha b+\alpha^2 c=u', \qquad a+\alpha^2 b+\alpha c=u'',$$

designantibus α, α^2 radices cubicas imaginarias unitatis. Quibus positis, singula elementa ope ipsarum u, u', u'' exhibentur per formulas

$$a=\frac{u+u'+u''}{3}, \qquad b=\frac{u+\alpha^2 u'+\alpha u''}{3}, \qquad c=\frac{u+\alpha u'+\alpha^2 u''}{3}.$$

Statuamus porro

$$u'=\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}, \qquad u''=\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})},$$

erit

$$v=\frac{u'^3+u''^3}{2}=\frac{(u'+u'')(u'+\alpha u'')(u'+\alpha^2 u'')}{2},$$

$$\sqrt{w}=\frac{u'^3-u''^3}{2}=\frac{(u'-u'')(u'-\alpha u'')(u'-\alpha^2 u'')}{2}.$$

Substitutis autem ipsarum u', u'' valoribus supra appositis, cum sit $1+\alpha+\alpha^2=0$, habetur

$$u'+u''=2a-b-c, \qquad u'+\alpha u''=\alpha^2(2c-a-b),$$
$$u'+\alpha^2 u''=\alpha(2b-c-a),$$

ideoque

$$v=\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}.$$

Porro fit:

$$u'-u''=(\alpha-\alpha^2)(b-c),$$
$$u'-\alpha u''=(1-\alpha)(a-b),$$
$$u'-\alpha^2 u''=(1-\alpha^2)(a-c),$$

ideoque cum sit

$$1-\alpha=\alpha^2(\alpha-\alpha^2),\qquad 1-\alpha^2=-\alpha(\alpha-\alpha^2),\qquad \alpha-\alpha^2=\sqrt{-3},$$

fit

$$\sqrt{w}=\frac{3\sqrt{-3}}{2}(a-b)(a-c)(b-c).$$

His valoribus substitutis, prodit

$$a=\frac{a+b+c}{3}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)+3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)}$$
$$+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)-3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)},$$

$$b=\frac{a+b+c}{3}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)+3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)}$$
$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)-3\sqrt{\{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2\}}}{2}\right)},$$

$$c=\frac{a+b+c}{3}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)+3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}\right)}$$
$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)-3\sqrt{-3[(a-b)(a-c)(b-c)]^2}}{2}\right)};$$

quae sunt expressiones quaesitae.

Radicalia cubica

$$u'=\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})},\qquad u''=\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}$$

alterum per alterum exhibentur ope formulae

$$u'u''=\sqrt[3]{(vv-w)}=aa+bb+cc-ab-ac-bc=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}$$
$$=\sqrt[3]{\left[\left(\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}\right)^2+\frac{27}{4}[(a-b)(a-c)(b-c)]^2.\right]}$$

Resolutio aequationum quarti gradus.

Propositis quatuor elementis a, b, c, d, statuamus

$$a+b+c+d=u,\qquad a+b-c-d=u',$$
$$a-b+c-d=u'',\qquad a-b-c+d=u''',$$

unde

$$a = \frac{u + u' + u'' + u'''}{4}, \qquad b = \frac{u + u' - u'' - u'''}{4},$$
$$c = \frac{u - u' + u'' - u'''}{4}, \qquad d = \frac{u - u' - u'' + u'''}{4}.$$

Statuamus in formulis, quas de resolutione aequationum tertii gradus proposuimus, loco a, b, c quantitates $u'u'$, $u''u''$, $u'''u'''$, unde fit

$$2v = (2u'u' - u''u'' - u'''u''')(2u''u'' - u'''u''' - u'u')(2u'''u''' - u'u' - u''u''),$$
$$2\sqrt{w} = 3\sqrt{-3}\,(u'u' - u''u'')(u'u' - u'''u''')(u''u'' - u'''u''').$$

Habetur autem

$$u'u' - u''u'' = (u' + u'')(u' - u'') = 4(a-d)(b-c),$$
$$u'u' - u'''u''' = (u' + u''')(u' - u''') = 4(a-c)(b-d),$$
$$u''u'' - u'''u''' = (u'' + u''')(u'' - u''') = 4(a-b)(c-d);$$

porro fit

$$2u'u' - u''u'' - u'''u''' = 8(ab + cd) - 4(ac + bd) - 4(ad + bc),$$
$$2u''u'' - u'''u''' - u'u' = 8(ac + bd) - 4(ad + bc) - 4(ab + cd),$$
$$2u'''u''' - u'u' - u''u'' = 8(ad + bc) - 4(ab + cd) - 4(ac + bd).$$

Statuamus insuper

$$s = u'u' + u''u'' + u'''u'''.$$

Quibus omnibus collectis, atque formulis de resolutione aequationum tertii gradus antecedentibus traditis in auxilium vocatis, invenitur, rurus posito $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$$4a = u + \sqrt{\left(\frac{s + \sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{s + \alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{s + \alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

$$4b = u + \sqrt{\left(\frac{s + \sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} - \sqrt{\left(\frac{s + \alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$- \sqrt{\left(\frac{s + \alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

$$4c = u - \sqrt{\left(\frac{s + \sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{s + \alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$- \sqrt{\left(\frac{s + \alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

$$4d = u - \sqrt{\left(\frac{s + \sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)} - \sqrt{\left(\frac{s + \alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{s + \alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})} + \alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}}{3}\right)}$$

ubi habetur:

$$u = a + b + c + d,$$

$$s = (a+b-c-d)^2 + (a-b+c+d)^2 + (a-b-c+d)^2$$

$$= (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2,$$

$$v = 32\,[2(ab+cd)-(ac+bd)-(ad+bc)]$$
$$[2(ac+bd)-(ad+bc)-(ab+cd)]$$
$$[2(ad+bc)-(ac+bd)-(ad+bc)],$$

$$w = -3\,[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2.$$

Quae expressiones cum omnes sint ipsorum a, b, c, d functiones symmetricae, proposito satisfactum est.

Observo porro, haberi in antecedentibus:

$$\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}\cdot\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})} = \sqrt[3]{(vv-w)}$$
$$= u'^4 + u''^4 + u'''^4 - u'^2 u''^2 - u'^2 u'''^2 - u''^2 u'''^2$$
$$= 8[(a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-c)^2];$$

porro

$$\sqrt{[s+\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}]}\cdot\sqrt{[s+\alpha\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha^2\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}]}\cdot\sqrt{[s+\alpha^2\sqrt[3]{(v+\sqrt{w})}+\alpha\sqrt[3]{(v-\sqrt{w})}]}$$
$$= \sqrt{[s^3+2v-3s\sqrt[3]{(vv-w)}]} = uu'u'' = (a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

Quae expressiones cum respectu elementorum a, b, c, d sint symmetricae, videmus, e duobus radicalibus cubicis alterum per alterum dari, e tribus radicalibus quadraticis, quae per u', u'', u''' designavimus, unum per duo reliqua determinari. Cuius observationis beneficio fit, ut per tantam radicalium ambiguitatem non maior quam quatuor quantitatum diversarum numerus repraesentetur.

II.

Considerationes generales.

Si accuratius examinamus, quomodo antecedentibus compositae sint expressiones, quibus quatuor elementa repraesentantur, videmus, primum e functione symmetrica elementorum extrahi radicem quadraticam, qua iuncta alteri functioni symmetricae, extrahi radicem cubicam; hanc alteri simili radici cubicae iungi et tertiae functioni symmetricae, quo facto rursus extrahi radicem quadraticam, et tribus eiusmodi radicibus quadraticis simili modo formatis atque nova functione symmetrica omnia quatuor elementa exhiberi. Quae radicum extractiones non nisi indicari possunt, si quantitates sub radicalibus exprimuntur per coëfficientes aequationis quarti gradus, cuius elementa illa radices sunt; si vero quantitates sub radicalibus per ipsa elementa, uti fecimus, exhibentur, videmus, ipsas extractiones praestari posse omnes, iisque varias determinari functiones insymmetricas elementorum, donec ad ipsa tandem singula elementa perveniatur.

Initium videmus in his quaestionibus faciendum esse ab investiganda functione insymmetrica, cuius certa potestas symmetrica fiat. Neque enim aliter per solas radicum extractiones a functionibus symmetricis ad insymmetricas pervenire licet. Eiusmodi autem nulla alia datur functio nisi productum e differentiis elementorum conflatum, quod permutatis elementis duos valores sibi oppositos induere potest, et cuius quadratum functio symmetrica est. Quod igitur quadratum in omnibus solutionibus, antecedentibus traditis, sub ultimo radicali inveniri debet et invenitur, neque igitur radicale ultimum aliud esse potest nisi quadraticum. Idem etiam consideratione sequente patet.

Statuamus enim, coëfficientes aequationis esse functiones quantitatis alicuius t, atque radicem x vocemus; aequationem hanc in modum proponere licet:

$$F(x, t) = 0.$$

Unde differentiale radicis secundum t sumtum, adhibita Lagrangiana notatione, invenimus,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{F'(t)}{F'(x)}.$$

Hinc sequitur, si aequatio proposita duas habeat radices inter se aequales, easque pro x eligamus, abire $\frac{\partial x}{\partial t}$ in infinitum. Nam pro valore illa denominator $F'(x)$ evanescit. Si igitur x per t ope radicalium exhiberi potest, expressio ita comparata esse debet, ut differentiatione denominatorem nanciscatur, qui evanescit, quoties duae radices inter se aequales fiunt, qui igitur alius esse non potest, nisi quadratum illud producti e differentiis omnium radicum aequationis conflati. Quod igitur quadratum in expressionibus illis sub radicali inveniri debet neque aliis quantitatibus additione iunctum, sive sub ultimo radicali, sicuti etiam in resolutionibus algebraicis aequationum secundi, tertii, quarti gradus vidimus.

Saepius observatum est, si datur resolutio algebraica generalis aequationis n^{ti} gradus, inter cuius radices certae relationes locum non habent, expressionem radicis tot radicalia necessario implicare, ut etiam inferiorum graduum aequationum solutiones algebraicas continere possit. Unde facile coniicis, numerum dimensionum, ad quam expressio sub ultimo radicali ascendit, minorem esse non posse, quam numerum minimum, qui per omnes numeros $2, 3, 4, \ldots, n$ dividatur. Qui pro $n = 2, 3, 4$, fit 2, 6, 12. Et idem casibus illis est numerus dimensionum quadrati producti illius e differentiis radicum aequationis conflati, quod sub ultimo radicali inveniebatur. Sed pro $n = 5$ fit minimus ille numerus, qui per 2, 3, 4, 5 dividatur, $= 60$, dum numerus dimensionum quadrati illius tantum ad 20 sive generaliter ad numerum $n(n-1)$ ascendit. Nec non pro altioribus ipsius n valoribus consensus ille plane deficit.

Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt.

Sint elementa quinque proposita x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ac designemus per symbolum

$$(12345),$$

functionem elementorum rationalem, quae et immutata manet, si elementa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 eodem ordine, quo ea exhibemus, commutamus respective cum his

$$x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_1,$$

et cum his

$$x_5, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4.$$

Statuamus porro

$$(12345)-(13524) = y;$$

demonstravit olim ill. *Lagrange*, expressionem y^2 permutatione elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 non plures quam sex valores diversos induere posse, ita ut, data aequatione quinti gradus, cuius radices sint x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, expressio y^2 sit radix datae aequationis sexti gradus. Statuamus

$$\begin{aligned}
(12345)-(13524) &= y_1 \\
(12453)-(14325) &= y_2 \\
(12534)-(15423) &= y_3 \\
(15243)-(12354) &= y_4 \\
(14235)-(12543) &= y_5 \\
(13254)-(12435) &= y_6,
\end{aligned}$$

erunt $y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, y_5^2, y_6^2$ radices aequationes illius sexti gradus. Sed credo, nondum observatum esse, ipsas quoque $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ esse radices datae aequationis sexti gradus, quamquam coëfficientes eius non omnes sint functiones symmetricae elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, neque igitur per coëfficientes datae aequationis quinti gradus rationaliter exhiberi possint. Examinando enim mutationes, quas expressiones y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 permutatione elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 subeant, invenimus omnes simul aut alias in alias abire, aut in valores oppositos. Unde ipsorum y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 functio symmetrica homogenea, si paris ordinis est, etiam respectu ipsorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrica erit; si vero imparis ordinis est, permutatione elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 alias non subire potest mutationes, nisi quod signum mutet. Quod locum habere generaliter invenimus, si bina elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 permutamus. Facile autem patet, eiusmodi functionem elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, quae binis permutatis signum mutet neque aliam mutationem subeat, aliam esse non posse, nisi productum ex omnibus differentiis elementorum, multiplicatum per functionem eorum symmetricam. Cuius producti quadratum cum functio symmetrica sit ideoque pro noto habeatur, videmus, functiones symmetricas ipsorum y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 omnes et ipsas pro datis haberi posse. Videlicet si aequatio sexti gradus, cuius radices sint y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, statuatur

$$y^6 - a_1 y^5 + a_2 y^4 - a_3 y^3 + a_4 y^2 - a_5 y + a_6 = 0,$$

coëfficientes a_2, a_4, a_6 rationaliter exhiberi possunt per coëfficientes datae aequationis quinti gradus, coefficientes autem a_1, a_3, a_5 erunt expressiones rationales coëfficientium aequationis quinti gradus, multiplicatae per radicem quadraticam $\sqrt{\Delta}$, siquidem

$$\Delta = [(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)]^2.$$

Functio simplicissima, quae proprietatibus expressionis symbolicae (12345) supra assignatis gaudet, est haec:

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_1,$$

pro qua aequationis sexti gradus radices habentur,

$$y_1 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_1 - x_1 x_3 - x_3 x_5 - x_5 x_2 - x_2 x_4 - x_4 x_1$$
$$y_2 = x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_4 - x_4 x_3 - x_3 x_2 - x_2 x_5 - x_5 x_1$$
$$y_3 = x_1 x_2 + x_2 x_5 + x_5 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1 - x_1 x_5 - x_5 x_4 - x_4 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1$$
$$y_4 = x_1 x_5 + x_5 x_2 + x_2 x_4 + x_4 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_5 - x_5 x_4 - x_4 x_1$$
$$y_5 = x_1 x_4 + x_4 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_5 - x_5 x - x_4 x_3 - x_3 x_1$$
$$y_6 = x_1 x_3 + x_3 x_2 + x_2 x_5 + x_5 x_4 + x_4 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_4 - x_4 x_3 - x_3 x_5 - x_5 x_1.$$

Quae expressiones cum respectu elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tantum ad secundam dimensionem ascendunt, coëfficientes a_1, a_5, a_5 erunt secundae, sextae, decimae dimensionis. Quarum expressiones cum ex observatione antea facta productum ex omnibus differentiis elementorum x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tamquam factorem contineant, quod ad decimam dimensionem ascendit, fieri debet

$$a_1 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad a_5 = m\sqrt{\Delta},$$

designante m numerum. Et calculo facto invenitur

$$a_5 = 32(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5),$$

ideoque $m = 32$. Unde aequatio sexti gradus formam induit:

$$y^6 + a_2 y^4 + a_4 y^2 + a_6 = 32\sqrt{\Delta}.y.$$

Si aequatio quinti gradus proposita est:

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0,$$

facile invenitur

$$a_2 = 6B^2 - 16AC + 40D.$$

Valores ipsorum a_4, a_6 paullo ampliores calculos poscunt. Valorem ipsius Δ, per A, B, C, D, E, expressum, tradidit ill. *Lagrange* in theoria aequationum, e *Meditationibus Algebraicis* celeberrimi *Waring* descriptum.

III.

Ludicrum de resolutione algebraica aequationum quinti gradus.

Olim, ut fit, cum puer studiosus in tentanda resolutione algebraica aequationum quinti gradus desudarem, aequationem generalem

$$x^5 - 10q^2x = p$$

ad aliam decimi gradus revocavi, cuius resolutio algebraica contigit, duorum tantum coëfficientium signis mutatis. Rem inutilem, sed curiosam, paucis referam.

Posito $x = y + z$, cum sit

$$x^5 - 10y^2z^2.x = y^5 + z^5 + 5yz(y^3 + z^3),$$

hanc aequationem cum proposita comparavi, unde

$$yz = q, \qquad y^5 + z^5 + 5yz(y^3 + z) = p,$$

ideoque

$$y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = p.y^5.$$

Qua aequatione decimi gradus resoluta, etiam proposita quinti gradus resoluta est.

Facile mihi credis, illam quidem aequationem decimi gradus algebraice resolvi non posse, sed huius alius:

$$y^{10}-5qy^8-5q^4y^2+q^5 = p.y^5,$$

quae duorum tantum coëfficientium signis ab illa discrepat, hanc inveni radicem algebraicam:

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{p+\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(\frac{p-\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)}$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt[5]{\left(\left(\frac{p+\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)^2\right)}+\sqrt[5]{\left(\left(\frac{p-\sqrt{(p^2-128q^5)}}{2}\right)^2\right)}\right]} = y.$$

IV.

De numero radicum realium, quae inter datos limites continentur.

Cartesius olim regulam dedit, qua, data aequatione algebraica, e signis coëfficientium eius limites cognoscuntur, quos numerus radicum positivarum et numerus radicum negativarum suparare non potest. Eiusmodi limites assignavit Cl. *Fourier* pro radicibus realibus, quae inter datas quantitates reales quaslibet a et b continentur. Sed idem observo :e regula *Cartesiana* peti potuisse. Sit enim x radix aequationis propositae, statuatur

$$y = \frac{b-x}{x-a},$$

erit y radix aequationis eiusdem ordinis, quae tot habet radices positivas, quot valores ipsius x inter a et b positae sunt. Unde regula *Cartesiana* adhibita ad aequationem transformatam, notus erit limes numeri radicum aequationis propositae, quae inter a et b continentur. Res adeo hic per signa unius seriei $n+1$ quantitatum transigitur, si n gradus aequationis, dum Cl. *Fourier* eiusmodi series duas adhibet. Sed regula a viro illustri prodita et multis aliis nominibus et calculo expedito praestat.

Eadem observatione regula celeberrima *Sturmiana*, qua numerus accuratus definitur radicum, quae inter datos limites continentur, ad casum eum revocari potest, quo numerus radicum aut positivarum aut negativarum quaeritur.

V.

Quomodo regula Bernouilliana ad investigandas radices, quae maximam aut minimam sequuntur, extendi potest.

Sit X ipsius x data functio quaelibet rationalis integra n^{ti} ordinis, sit P functio eius alia quaelibet rationalis integra minoris ordinis; evolvatur fractio $\frac{P}{X}$ ad descendentes potestates ipsius x, cuius evolutionis termini se excipientes sint

$$\frac{p_{m-1}}{x^m}+\frac{p_m}{x^{m+1}},$$

docuit olim *Daniel Bernouilli*, quotientem $\frac{p_m}{p_{m-1}}$ convergere ad valorem radicis absolute maximae aequationis

$$X=0.$$

Si fractio $\frac{P}{X}$ ad potestates ascendentes ipsius x evolvitur, cuius evolutionis termini duo se excipientes sint

$$q_m x^m + q_{m+1} x^{m+1},$$

quoties $\frac{q_m}{q_{m+1}}$ ad valorem radicis absolute minimae converget. Causa regulae nota haec est, quod in expressione generali ipsius p_m,

$$p_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m + C_3 x_3^m \dots + C_n x_n^m,$$

in qua $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt radices aequationis propositae, $C_1, C_2, \dots, C_n$ constantes seu quantitates ab exponente m non pendentes, prae uno termino in m^{tam} potestatem radicis maximae ducto negligi possint reliqui omnes, siquidem numerus m satis magnus statuitur. Simile de radice minima investiganda valet.

Statuamus radices, secundum magnitudinem *absolutam* dispositas, esse

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

ita ut x_1 sit maxima, x_n minima. Radices imaginarias secundum earum modulum aestimamus, sive si radix imaginaria $r(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)$, designantibus r, φ quantitates reales, secundum quantitatem r. Regula de investiganda radice maxima proposita deficit, si duae radices maximae inter se aequales adsunt, vel quoties radices duae maximae imaginariae sunt, si utrique idem modules est. Eo casu regula antecedens ita amplificanda est, ut simul duae radices maximae investigentur. Quod ipse iam *Eulerus* fecit pro casu, quo duae radices maximae sunt imaginariae formae $r(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)$, $r(\cos\varphi-\sqrt{-1}.\sin\varphi)$, in Cap. XVII. Vol. I. *In-*

troductionis. Paucis demonstrabo sequentibus, quomodo iisdem principiis indagetur aequatio k^{ti} ordinis, cuius k radices totidem radicibus maximis aequationis propositae proxime aequales sunt. Quam amplificationem Cl. *Fourier* in introductione operis de aequationibus indicavit.

In expressione generali ipsius p_m prae terminis ductis in k radices maximas, ad m^{tam} dignitatem elatas, negligimus reliquos terminos omnes; quod eo maiore iure licet, quo maior numerus m. Hinc statuimus proxime:

$$p_m = C_1 x_1^m + C_2 x_2^m \dots + C_k x_k^m,$$

seu posito

$$C_1 x_1^m = B_1, \quad C_2 x_2^m = B_2, \dots, C_k x_k^m x_k^m = B_k,$$

statuimus proxime:

$$\begin{aligned} p_m &= B_1 \quad + B_2 \quad \dots + B_k \\ p_{p+1} &= B_1 x_1 + B_2 x_2 \dots + B_k x_k \\ p_{m+2} &= B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 \dots + B_k x_k^2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_{m+k} &= B_1 x_1^k + B_2 x_2^k \dots + B_k x_k^k. \end{aligned}$$

Ponamus

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) = x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} \dots + A_k,$$

quam expressionem evanescere patet, si loco x ponuntur k valores x_1, x_2, ..., x_k. Unde ex aequationibus antecedentibus sequitur haec:

$$0 = p_{m+k} + A_1 p_{m+k-1} + A_2 p_{m+k-2} \dots + A_k p_m.$$

In qua, si loco m ponimus $m+1$, $m+2$, etc., habemus sequens aequationum systema:

$$\begin{aligned} 0 &= x^k \quad + A_1 x^{k-1} \quad + A_2 x^{k-2} \quad \dots + A_k \\ 0 &= p_{m+k} \quad + A_1 p_{m+k-1} + A_2 p_{m+k-2} \dots + A_k p_m \\ 0 &= p_{m+k+1} + A_1 p_{m+k} \quad + A_2 p_{m+k-1} \dots + A_k p_{m+1} \\ 0 &= p_{m+k+2} + A_1 p_{m+k+1} + A_2 p_{m+k} \quad \dots + A_k p_{m+2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= p_{m+2k-1} + A_1 p_{m+2k-2} + A_2 p_{m+2k-3} \dots + A_k p_{m+k-1}, \end{aligned}$$

De quibus aequationibus, quarum numerus $k+1$, eliminatis k quantitatibus A_1, A_2, ..., A_k, prodit aequatio huiusmodi:

$$P x^k + P_1 x^{k-1} + P_2 x^{k-2}, \dots + P_k = 0,$$

in qua P, P_1, P_2, ..., P_k per terminos p_m, p_{m+1}, ..., p_{m+2k-1} expressae sunt, et cuius radices aequationis propositae $X = 0$, k radicibus maximis proxime aequales sunt.

Sit $k=2$, habetur

$$0 = x^2 + A_1 x + A_2,$$
$$0 = p_{m+2} + A_1 p_{m+1} + A_2 p_m$$
$$0 = p_{m+3} + A_1 p_{m+2} + A_2 p_{m+1},$$

unde eliminatis A_1, A_2, habentur x_1, x_2 proxime aequales radicibus aequationis quadraticae:

$$(p_{m+1}^2 - p_m p_{m+2}) x^2 + (p_m p_{m+3} - p_{m+1} p_{m+2}) x + p_{m+2}^2 - p_{m+1} p_{m+3} = 0;$$

sicuti notum est, et cum *Euleri* formulis convenit.

Sit $k=3$, habes

$$0 = x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$
$$0 = p_{m+3} + A_1 p_{m+1} + A_2 p_{m+1} + A_3 p_m$$
$$0 = p_{m+4} + A_1 p_{m+3} + A_2 p_{m+2} + A_3 p_{m+1}$$
$$0 = p_{m+5} + A_1 p_{m+4} + A_2 p_{m+3} + A_3 p_{m+2},$$

unde eliminatis A_1, A_2, A_3 provenit:

$$P x^3 + P_1 x^2 + P_2 x + P_3 = 0,$$

posito:

$$P = p_{m+2}^3 + p_{m+1}^2 p_{m+4} + p_m p_{m+3}^2 - 2 p_{m+1} p_{m+2} p_{m+3} - p_m p_{m+2} p_{m+4}$$
$$P_1 = p_{m+1} p_{m+3}^2 + p_{m+1} p_{m+2} p_{m+4} + p_m p_{m+2} p_{m+5} - p_{m+2}^2 p_{m+3} - p_{m+1}^2 p_{m+5} - p_m p_{m+3} p_{m+4}$$
$$P_2 = p_m p_{m+4}^2 + p_{m+2} p_{m+3}^2 + p_{m+1} p_{m+2} p_{m+5} - p_{m+2}^2 p_{m+4} - p_m p_{m+3} p_{m+5} - p_{m+1} p_{m+3} p_{m+4}$$
$$P_3 = 2 p_{m+2} p_{m+3} p_{m+4} + p_{m+1} p_{m+3} p_{m+5} - p_{m+3}^3 - p_{m+1}^2 p_{m+5} - p_{m+1} p_{m+4}^2.$$

Methodus Clarissimi *Daniel Bernoulli* nititur principio, quod seriei recurrentis termini ab initio satis remoti ut termini seriei geometricae spectari possint. Methodus antecedentibus amplificata tantum supponit, terminos seriei recurrentis ab initio satis remotos proxime aequales esse terminis alius seriei recurrentis, cuius scala e minore terminorum numero constat. Quam igitur scalam, ideoque etiam aequationem, cuius radices radicibus maximis aequationis propositae proxime aequales sunt, eruere licet etiam per methodum, quam olim pro investiganda lege serierum recurrentium proposuit ill. *Lagrange* in commentatione:

Recherches sur la manière de former des tables des planètes d'après les seules observations.

Videlicet, si seriem recurrentem, cuius scala $n+1$ terminis constat, inde a termino p_m convenire statuimus cum alia, cuius scala tantum $k+1$ terminis constat, ponamus

$$p_m + p_{m+1} y + p_{m+2} y^2 \ldots + p_{m+2k-1} y^{2k-1} = s,$$

sit porro

$$\frac{1}{s} = a_1 + b_1 y + y^2 s_1,$$
$$\frac{1}{s_1} = a_2 + b_2 y + y^2 s_2,$$
$$\frac{1}{s_2} = a_3 + b_3 y + y^2 s_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{s_{k-1}} = a_k + b_k y + y^2 s_k.$$

Seriem s_1 continuemus usque ad potestatem y^{2k-3}, seriem s_2 usque ad potestatem y^{2k-5}, et ita porro, donec series s_k plane reiiciatur. Tum si fractionem continuam

$$\cfrac{1}{a_1 + b_1 y + \cfrac{y^2}{a_2 + b_2 y + \cfrac{y^2}{a_3 + b_3 y + \ldots + \cfrac{y^2}{a_k + b_k y}}}}$$

in fractionem vulgarem commutas $\frac{P}{Q}$, atque in denominatore statuis $y = \frac{1}{x}$, erit

$$Q = 0$$

aequatio quaesita, cuius radices $x = \frac{1}{y}$ aequationis propositae $X = 0$, k radicibus maioribus proxime aequales sunt. Sed observo, hanc methodum multo prolixiorem esse, quam eam eliminationis, quam supra proposui: nam in calculanda fractione $\frac{P}{Q}$ in expressiones valde complicatas incidis, quarum termini plurimi in fine calculi se mutuo destruunt, dum per eliminationem statim ad expressiones simplices pervenis.

Prorsus eadem ratione aequationis propositae radices minimas investigare licet; quod problema posito $x = \frac{1}{y}$ etiam ad antecedens revocatur; nam aequationis transformatae radices maximae sunt valores reciproci radicum minimarum aequationis propositae. Hinc si methodo *Bernouilliana* antecedentibus amplificata aequationis propositae radices omnes indagare placet, duae primum investigandae sunt aequationes, quarum altera x maximas, altera $n-k$ minimas radices exhibet; et si k aut $n-k$ maiores adhuc numeri sunt, quam ut per methodos rigorosas solutio praestet, singulas aequationes rursus eodem modo tractare licet atque propositam, donec tandem ad singulas radices aequationis propositae, sive ad aequationis gradum satis depressum pervenias.

D. 9. Dec. 1834.