

Über affine Geometrie XXVII.

Liesche F_2 , Affinnormale und mittlere Affinkrümmung.

Von

Ludwig Berwald in Prag.

Mit dem folgenden Beitrag zur affinen Flächentheorie¹⁾ beabsichtige ich, die neuesten affingeometrischen Untersuchungen mit einigen bereits geraume Zeit vorliegenden flächentheoretischen Arbeiten in Verbindung zu bringen.

Den Ausgangspunkt dabei bildet eine schon wiederholt behandelte singularitätenfreie Fläche zweiter Ordnung, die mit jedem Punkte allgemeiner Lage irgendeiner regulären²⁾ analytischen Fläche projektiv-invariant verbunden — und im Falle einer regulären Regelfläche mit der in diesem Punkte oskulierenden Fläche zweiter Ordnung identisch — ist: die sogenannte Liesche F_2 des Flächenpunktes³⁾. Im folgenden wird nun gezeigt, daß

¹⁾ Der Grund zur affinen Flächentheorie wurde in folgenden Abhandlungen gelegt: G. Pick, Über affine Geometrie IV: Differentialinvarianten der Flächen gegenüber affinen Transformationen, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 69 (1917), S. 107–136 („A. G. IV“). — W. Blaschke, Über affine Geometrie V: Kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoids, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 69 (1917), S. 166–206 („A. G. V“). — Derselbe, Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 70 (1918), S. 13–37 („A. G. XII“). — J. Radon, Über affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 70 (1918), S. 91–107 („A. G. XVI“).

²⁾ Mit diesem Namen bezeichnet Herr E. Study [Über einige imaginäre Minimalflächen, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 63 (1911), S. 14–26] die analytischen Flächen, auf denen von einem Punkte allgemeiner Lage zwei *bestimmte* und in der Umgebung des Punktes *getrennte* asymptotische Linien ausgehen. Im komplexen Gebiet ist dieser Begriff wesentlich verschieden von dem einer nicht-abwickelbaren Fläche.

³⁾ a) S. Lie, Untersuchungen üb. Differentialgleichungen I. Forh. Selsk. Christ., 1882, Abh. 21, 12 Seiten; auf S. 1. — b) A. Demoulin, Sur la théorie des lignes asymptotiques, C. R. ac. sc. Paris 147 (1908), S. 413–415. — c) Derselbe, Sur la quadrique de Lie, ebenda S. 493–496. — d) Derselbe, Sur quelques propriétés des surfaces courbes, ebenda S. 565–568. — e) P. Franck, Über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 13 (1914), S. 110–127. — f) Derselbe, Zur Diskussion der Gleichung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes, Mitteil. Math. Ges.

die Affinnormale und die mittlere Affinkrümmung in jedem solchen Punkte der gegebenen Fläche nichts anderes sind, als die Affinnormale und die mittlere Affinkrümmung der Lieschen F_2 dieses Punktes. Damit erweisen sich insbesondere die Flächen der mittleren Affinkrümmung Null, oder die *Affin-Minimalflächen* als eine längst bekannte Flächenklasse⁴⁾, die Herr P. Franck⁵⁾ die *paraboloidischen Flächen* genannt hat.

Eine bemerkenswerte Gattung von regulären Flächen bilden auch diejenigen, bei denen für jeden Flächenpunkt allgemeiner Lage ein affiner Hauptkrümmungsmittelpunkt mit dem eigentlichen oder uneigentlichen Mittelpunkt der zugehörigen Lieschen F_2 zusammenfällt. Es sind die zum Teil bereits untersuchten⁶⁾ Flächen, bei denen in jedem Punkte die beiden affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sind. Genauer betrachtet werden hier nur diejenigen Flächen dieser Art, für welche der Ort der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte in eine Kurve oder einen einzigen Punkt entartet. Die Flächen, deren Affinnormalen sämtlich durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt, das „Zentrum“ der Fläche, laufen, die sogenannten *Affinsphären*⁷⁾, finden sich unter anderen Namen gleichfalls schon in der Literatur vor: diejenigen mit uneigentlichem Zentrum sind besondere Affin-Minimalflächen⁸⁾, die übrigen hat Herr G. Tzitzéica unter dem Namen *S-Flächen* in einer Reihe von Abhandlungen⁹⁾ unter-

Hamburg 5 (1914), S. 113–129. — g) G. Scheffers, Über zwei mit einem Flächenpunkt verknüpfte Flächen zweiter Ordnung. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 14 (1915), S. 68–79. — Wie ich nachträglich bemerke, tritt die Liesche F_2 eines Flächenpunktes auch bei Herrn E. J. Wilczynski auf. [Projective differential geometry of curved surfaces. Second memoir. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 79–120; insb. S. 81 ff.].

⁴⁾ a) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces III, Paris 1894, S. 368–374; IV, Paris 1896, S. 512 („Leçons“). — b) A. Demoulin, a. a. O. ³⁾ c). — c) P. Franck, Über paraboloidische Flächen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 23 (1914), S. 49–53. — d) Derselbe, ebenda S. 343–352.

⁵⁾ P. Franck, a. a. O. ³⁾ f); ⁴⁾ c), d).

⁶⁾ W. Blaschke, A. G. XII, § 4.

⁷⁾ W. Blaschke, A. G. V, §§ 8, 9; A. G. XII, § 4; J. Radon, A. G. XVI, § 6. — Die Bezeichnungen „Affinsphäre“ und „Zentrum“ bei J. Radon. — Die nichtgeradlinigen Affinsphären sind affin spezialisierte Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven. Vgl. E. J. Wilczynski, Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven. Math. Ann. 76 (1914), S. 129–160.

⁸⁾ Über sie vergleiche insbesondere: a) E. Goursat, Sur les lignes asymptotiques, Bull. Soc. Math. France 24 (1896), S. 43–51. — b) A. Demoulin, a. a. O. ³⁾ c). — Siehe auch E. J. Wilczynski, a. a. O. ⁷⁾, S. 138, 157 ff.

⁹⁾ G. Tzitzéica, Sur une nouvelle classe de surfaces, C. R. ac. sc. Paris 144 (1907), S. 1257–1259; Sur certaines surfaces réglées, ebenda 145 (1907), S. 1132–1133; Sur une classe de surfaces, ebenda 146 (1908), S. 165–166; Sur une nouvelle classe de surfaces, Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), S. 180–187; 28 (1909), S. 210–216; Sur une nouvelle classe de surfaces, Rom, 4. Math.-Kongreß 1909, 2, S. 304–308. Außerdem auch: A. Demoulin, Sur les surfaces réglées, C. R. ac. sc. Paris 146 (1908), S. 1381–1384 und a. a. O. ³⁾ c).

sucht. Die regulären Flächen, bei denen der Ort des (auf jeder Affinnormale einzigen) affinen Hauptkrümmungsmittelpunktes eine Kurve ist, sind die *nicht-affinsphärischen regulären Regelflächen*¹⁰⁾.

Nach dem Gesagten ist es nicht weiter verwunderlich, daß eine ganze Anzahl von Größen, die in die affine Krümmungstheorie eingehen, de facto, wenn auch natürlich nicht dem Begriffe nach, bereits in den zitierten älteren Arbeiten vorkommt¹¹⁾. Zwei von den Verfassern dieser Arbeiten, die Herren G. Tzitzéica und A. Demoulin, haben auch den Zusammenhang zwischen ihren Untersuchungen und der Geometrie der affinen Gruppe erkannt.

Der eigentlichen Untersuchung über die im vorhergehenden berührten Gegenstände (§§ 2, 3) habe ich einen Abschnitt vorausgeschickt, in dem ich mit einer Zusammenstellung der benötigten Begriffe und Formeln aus der affinen Flächentheorie die Mitteilung einer Reihe von vermutlich neuen Sätzen verbinde, die sich zumeist auf die geometrische Deutung jener Formeln beziehen (§ 1).

§ 1.

Die Asymptotenlinien als Parameterkurven.

1. Wir bewegen uns in dieser Abhandlung durchaus im komplexen Bereich, und betrachten ein ganz im Endlichen liegendes, nur reguläre Punkte enthaltendes Stück einer analytischen Fläche, von dem wir voraussetzen, daß durch jeden seiner Punkte zwei bestimmte und in der Umgebung des Punktes getrennte Asymptotenlinien der Fläche laufen. Ein solches Flächenstück nennen wir im folgenden kurz eine *reguläre Fläche*¹²⁾.

Um allzu häufige Verweisungen auf die zitierten Arbeiten von G. Pick, W. Blaschke und J. Radon zu vermeiden, stellen wir in diesem Paragraph die Formeln und Begriffe der affinen Flächentheorie zusammen, soweit wir sie brauchen. Dabei werden sich auch einige unseres Wissens

¹⁰⁾ Dieser Satz im wesentlichen schon bei A. Demoulin, a. a. O. ²⁾ c). Vgl. auch ¹¹⁾.

¹¹⁾ So tritt bei den Herren G. Tzitzéica, A. Demoulin und P. Franck implizite die Affinnormale auf (zumeist als Gerade vom Flächenpunkt ξ nach dem Mittelpunkt der Lieschen F_2 oder als Gerade durch ξ von der Richtung ξ_{pq} , wenn p, q die Parameter der Asymptotenlinien und die Indizes Ableitungen nach p und q bedeuten); bei A. Demoulin außerdem die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte von ξ (als Brennpunkte der Affinnormalen von ξ) und die Affinkrümmungslinien (als Schnittkurven der abwickelbaren Flächen der Affinnormalenkongruenz mit der gegebenen Fläche), dann aber auch gewisse Größen $p, q, r; p', q', r'; k, \delta$, die sich auf die in § 1 dieser Abhandlung verwendeten zurückführen lassen. Auch die Gleichung § 1 (13) der Affinkrümmungslinien findet sich bei A. Demoulin, a. a. O. ²⁾ c).

¹²⁾ Wir haben uns hier, um für das folgende eine kurze Redeweise zu haben, eine Abänderung der von Herrn E. Study gegebenen Begriffsbestimmung [vgl. ³⁾] erlaubt, worauf wir ausdrücklich aufmerksam machen.

neue Resultate ergeben, die wir hier allerdings zumeist ohne Beweis bringen, um die Abhandlung nicht über Gebühr auszudehnen.

2. Die affine Flächentheorie kann aufgefaßt werden als Invariantentheorie zweier simultanen Differentialformen, von denen die eine quadratisch, die andere kubisch ist. Wenn wir die Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p, q)$ auf ihre Asymptotenlinien p, q als Parameterkurven beziehen, wie das in dieser Abhandlung ausnahmslos geschehen soll, so können wir die quadratische Grundform folgendermaßen schreiben:

$$(1) \quad 2\varphi \, dp \, dq. \quad {}^{13)}$$

Die kubische Grundform hat dann die Gestalt:

$$(2) \quad P \, dp^3 + Q \, dq^3.$$

In (1) und (2) bedeuten die (analytischen) Funktionen φ, P, Q folgendes:

$$(3) \quad \varphi = \sqrt{-i(\mathfrak{x}_{pq} \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q)}, \quad (i^2 = -1),$$

und

$$(4) \quad P = + \frac{i}{\varphi} (\mathfrak{x}_{pp} \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_{pq}), \quad Q = - \frac{i}{\varphi} (\mathfrak{x}_{qq} \mathfrak{x}_q \mathfrak{x}_{pq}),$$

wenn die angehängten Indizes partielle Differentiation nach p und q , und die Klammerausdrücke dreireihige Determinanten bezeichnen. Nach Voraussetzung ist weiter:

$$(5) \quad L = (\mathfrak{x}_{pp} \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q) = 0, \quad M = (\mathfrak{x}_{pq} \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q) \neq 0, \quad N = (\mathfrak{x}_{qq} \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q) = 0.$$

Die beiden Grundformen sind apolar und haben deshalb nur eine absolute Invariante:

$$(6) \quad \sigma = \frac{P \cdot Q}{\varphi^3}.$$

Ferner bezeichnen wir das Gaußsche Krümmungsmaß der quadratischen Grundform mit ψ :

$$(7) \quad \psi = - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial p \partial q}.$$

3. Mit der Fläche affin-kovariant verbunden ist das von Herrn W. Blaschke¹⁴⁾ eingeführte *Krümmungsbild*:

$$(8) \quad \tilde{\mathfrak{x}} = - \frac{\mathfrak{x}_{pq}}{\varphi}.$$

Die Gerade durch den Flächenpunkt \mathfrak{x} parallel zum Vektor $\tilde{\mathfrak{x}}$ ist die *Affin-normale* dieses Punktes.

¹³⁾ Vgl. zu diesem ganzen Paragraph W. Blaschke, A. G. XII, namentlich die §§ 6, 8. — Wir schreiben alle in diesem Paragraph auftretenden Differentialformen *absolut-invariant* (gegenüber inhaltstreuen Affinitäten).

¹⁴⁾ W. Blaschke, A. G. V, § 4.

Wegen

$$(9) \quad (\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_q \tilde{\mathfrak{r}}) = -i\varphi$$

sind $\tilde{\mathfrak{r}}$, \mathfrak{r}_p , \mathfrak{r}_q drei linear unabhängige Vektoren. Man kann daher die Vektoren \mathfrak{r}_{pp} , \mathfrak{r}_{pq} , \mathfrak{r}_{qq} durch diese drei Vektoren linear ausdrücken und erhält so das *erste System von Grundgleichungen der affinen Flächentheorie*, nämlich die Gleichungen:

$$(10a) \quad \begin{cases} \mathfrak{r}_{pp} = \frac{P}{\varphi} \mathfrak{r}_p + \frac{P}{\varphi} \mathfrak{r}_q, \\ \mathfrak{r}_{qq} = \frac{Q}{\varphi} \mathfrak{r}_p + \frac{Q}{\varphi} \mathfrak{r}_q, \end{cases}$$

und die mit (8) identische Gleichung:

$$(10b) \quad \mathfrak{r}_{pq} = -\varphi \cdot \tilde{\mathfrak{r}}.$$

Das *zweite System von Grundgleichungen* drückt die Vektoren $\tilde{\mathfrak{r}}_p$, $\tilde{\mathfrak{r}}_q$ linear durch \mathfrak{r}_p , \mathfrak{r}_q aus:

$$(11) \quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{r}}_p = (\psi - \sigma) \mathfrak{r}_p - \frac{P}{\varphi^2} \mathfrak{r}_q, \\ \tilde{\mathfrak{r}}_q = -\frac{Q}{\varphi^2} \mathfrak{r}_p + (\psi - \sigma) \mathfrak{r}_q. \end{cases}$$

Schließlich bestehen noch die folgenden beiden Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (10a):

$$(12) \quad \begin{cases} (\psi - \sigma)_p = \frac{P \cdot Q_p}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi} \cdot \left(\frac{P}{\varphi} \right)_q, \\ (\psi - \sigma)_q = \frac{Q \cdot P_q}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi} \cdot \left(\frac{Q}{\varphi} \right)_p. \end{cases}$$

4. Aus den Gleichungen (10a, b) erhält man ohne Schwierigkeit:

$$(4^*) \quad (\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_{pp} \mathfrak{r}_{pp}) = iP^2, \quad (\mathfrak{r}_q \mathfrak{r}_{qq} \mathfrak{r}_{qq}) = -iQ^2.$$

Wenn also $P(Q)$ identisch verschwindet, so sind die Asymptotenlinien $q = \text{konst.}$ ($p = \text{konst.}$) der Fläche ebene Kurven und daher gerade Linien, wie übrigens bekannt ist. Die Umkehrung des Satzes ist evident.

Wenn $P \neq 0$ ($Q \neq 0$), so hat man für das *Affinbogenelement*¹⁵⁾ $d\lambda^{(p)}$, ($d\lambda^{(q)}$) der Asymptotenlinien $q = \text{konst.}$ ($p = \text{konst.}$) im Punkte \mathfrak{r} :

$$d\lambda^{(p)} = (\sqrt{i \cdot P})^{\frac{1}{2}} dp, \quad d\lambda^{(q)} = (\sqrt{-i \cdot Q})^{\frac{1}{2}} dq^{(16)}.$$

¹⁵⁾ Vgl. G. Pick, Über affine Geometrie XV: Affingeometrie der Kurven höherer Räume, Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 70 (1918), S. 76–90, § 1; E. Salkowski, Über affine Geometrie XVIII. Zur Differentialgeometrie der Raumkurven. Ber. Ges. Lpz. (math. phys.) 70 (1918), S. 160–176 oder R. Weitzenböck, Über affine Geometrie. Affinnormale bei Raumkurven. Sitzungsber. Ak. Wien IIa, 127 (1918), 969–997, § 5.

¹⁶⁾ Die Differentiationen nach den Affinbögen $d\lambda^{(p)}$, $d\lambda^{(q)}$ der Asymptotenlinien sind gegenüber den inhaltstreu Affinitäten invariante Operationen. Setzt man:

$$\frac{df}{d\lambda^{(p)}} = \partial_1 f, \quad \frac{df}{d\lambda^{(q)}} = \partial_2 f,$$

Im Falle einer nicht-geradlinigen regulären Fläche ($\sigma \neq 0$) kann man jetzt die quadratische Grundform (1) auch so schreiben:

$$(1^*) \quad \sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot d\lambda^{(p)} d\lambda^{(q)}$$

und daher auch für φ, dp, dq in (3), (8), (9) bezüglich $\sigma^{-\frac{1}{2}}, d\lambda^{(p)}, d\lambda^{(q)}$ setzen, so daß aus (9) folgt:

$$(6^*) \quad \sigma = \frac{i}{\left(\tilde{x} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda^{(p)}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda^{(q)}} \right)^3},$$

d. h. wenn man die drei Vektoren $\tilde{x}, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda^{(p)}}, \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda^{(q)}}$ von einem festen Anfangspunkte ausgehen läßt, so ist die Invariante σ gleich der mit $\left(-\frac{i}{6}\right)^3$ multiplizierten dritten Potenz des reziproken Tetraedervolumens, das der feste Punkt mit den Endpunkten der drei Vektoren bestimmt.

Endlich kann die kubische Grundform (2) jetzt folgendermaßen geschrieben werden:

$$(2^*) \quad \frac{1}{\sqrt{i}} d\lambda^{(p)3} + \frac{1}{\sqrt{-i}} d\lambda^{(q)3},$$

wodurch ihre absolute Invarianz gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten recht anschaulich wird.

5. Daß die kubische Grundform (2), gleich Null gesetzt, drei affin-invariant mit der Fläche verbundene Fortschreitungsrichtungen^{16a)} durch den Punkt \tilde{x} in dessen Tangentenebene liefert, zeigt auch die geometrische Bedeutung dieser drei Fortschreitungsrichtungen: Bei einer nicht-geradlinigen regulären Fläche ($\sigma \neq 0$)¹⁷⁾ sind die Affinnormalschnitte des Punktes \tilde{x} durch diese Richtungen unter allen Affinnormalschnitten des Punktes \tilde{x} dadurch charakterisiert, daß ihre Affinnormale in \tilde{x} mit der Affinnormalen der Fläche in \tilde{x} zusammenfällt. Unter einem Affinnormalschnitt des Punk-

so gilt die Beziehung:

$$(\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1) f = \partial_2 (\log \sqrt[3]{P}) \cdot \partial_1 f - \partial_1 (\log \sqrt[3]{Q}) \cdot \partial_2 f.$$

Bei K. Żórawski, Über die Differentialinvarianten der Fläche in bezug auf die lineare Gruppe und über Translationsflächen, Bull. ac. sc. Cracovie 1906, S. 865–901 finden sich zwei gegenüber allen Affinitäten invariante Operationen Uf, Vf , die bis auf Zahlenfaktoren mit

$$\sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_1 f, \quad \sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_2 f$$

identisch sind.

^{16a)} (Anm. b. d. Korr.) Die drei in Rede stehenden Fortschreitungsrichtungen sind nicht nur affin-, sondern auch projektiv-invariant mit der Fläche verbunden. Sie treten zuerst bei G. Darboux auf [Sur le contact des courbes et des surfaces. Bull. sc. math. astr. (2) 4 (1880), S. 348–384], später, anders definiert, bei C. Segre, Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie. Rend. Acc. Lincei, Roma (5) 17^{II} (1908), S. 405–412.

¹⁷⁾ In den folgenden Sätzen wird vorausgesetzt, daß die als Identität ausgeschlossene Gleichung $\sigma = 0$ auch im betrachteten Punkte \tilde{x} nicht erfüllt ist.

zu nehmen sind. Es ist also:

$$(16) \quad \begin{cases} \psi - \sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right), \\ (\psi - \sigma)^2 - \frac{P_q \cdot Q_p}{\varphi^4} = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}, \end{cases}$$

und:

$$(17) \quad \frac{P_q \cdot Q_p}{\varphi^4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right)^2.$$

In Analogie mit der gewöhnlichen Krümmungstheorie nennt man $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right)$ die *mittlere Affinkrümmung*, $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ das *affine Krümmungsmaß* der Fläche im Punkte \mathfrak{x}^{20} .

7. Wir schalten an dieser Stelle *einige Sätze über das Krümmungsbild* ein, die zwar mit dem Folgenden in keinem direkten Zusammenhang stehen, aber an sich vielleicht nicht ohne Interesse sind.

Das Krümmungsbild $\tilde{\mathfrak{x}}$ ist nach seiner Definition (8) für jede reguläre Fläche eigentlich. Es ist dann und nur dann selbst eine Fläche, wenn die Urfläche \mathfrak{x} ein von Null verschiedenes affines Krümmungsmaß hat. Wenn die Fläche \mathfrak{x} auf jeder Affinnormalen einen uneigentlichen affinen Hauptkrümmungsmittelpunkt besitzt, während der andere (von Ausnahmestellen abgesehen) eigentlich ist, so ist das Krümmungsbild eine Kurve. Bei den regulären Flächen mit lauter parallelen Affinnormalen (vgl. Nr. 16) endlich reduziert sich das Krümmungsbild auf einen Punkt.

Wenn das Krümmungsbild eine Fläche ist, so stellt die Gleichung:

$$(18) \quad \frac{P_q}{\varphi} dp^2 - 2 \varphi (\psi - \sigma) dp dq + \frac{Q_p}{\varphi} dq^2 = 0$$

auf der Urfläche \mathfrak{x} diejenigen Kurven dar, die den Asymptotenlinien des Krümmungsbildes $\tilde{\mathfrak{x}}$ entsprechen²¹.

²⁰) Für das affine Krümmungsmaß der Fläche im Punkte \mathfrak{x} läßt sich, unter der Voraussetzung, daß es nicht verschwindet und daß keine der beiden Affinkrümmungslinien des Punktes \mathfrak{x} in diesem Punkte eine stationäre Schmiegungeebene hat, auch die folgende affingeometrische Deutung geben: Man bezeichne mit $\sigma_1, \sigma_2; \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ bezüglich die Affinbögen der ersten (zweiten) Affinkrümmungslinie durch \mathfrak{x} und der entsprechenden Kurven des Krümmungsbildes $\tilde{\mathfrak{x}}$. Dann hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \left(\frac{d \tilde{\sigma}_1}{d \sigma_1} \cdot \frac{d \tilde{\sigma}_2}{d \sigma_2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

²¹) Die linke Seite von (18) ist, bis auf einen Zahlenfaktor, nichts anderes als die quadratische Kovariante $\lambda du^2 + 2 \mu du dv + \nu dv^2$ des Herrn J. Radon (A.G. XVI, § 7), für deren Verschwinden somit eine geometrische Deutung gefunden ist. — Die Differentialformen (1), (18) und (13) stehen, wenn man von einem ganz unwesent-

Aus diesem Satze fließt eine Reihe von weiteren:

1. Diejenigen regulären Flächen, deren Affinnormalen sämtlich durch einen *eigentlichen* festen Punkt gehen (vgl. Nr. 16), sind dadurch charakterisiert, daß die Asymptotenlinien des Krümmungsbildes den Asymptotenlinien der Urfläche entsprechen.

2. Auf denjenigen regulären Flächen der mittleren Affinkrümmung Null, die auf jeder Affinnormale zwei getrennte affine Hauptkrümmungsmittelpunkte besitzen (vgl. Nr. 9, 13), entspricht den Asymptotenlinien des Krümmungsbildes ein konjugiertes System, dessen Kurven in jedem Punkte die Affinkrümmungslinien harmonisch trennen.

3. Bei den Flächen mit beständig zusammenfallenden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkten, deren mittlere Affinkrümmung nicht Null ist, und deren Affinnormalen nicht sämtlich durch einen Punkt laufen, entspricht der einen Schar von Asymptotenlinien des Krümmungsbildes die eine Schar von Asymptotenlinien der Urfläche, nämlich die, deren Kurven zugleich Affinkrümmungslinien sind (vgl. Nr. 15).

Reduziert sich das Krümmungsbild auf eine Kurve oder auf einen Punkt, so verschwindet die Diskriminante von (18) und umgekehrt. Im Falle einer Kurve sind die Linien (18) diejenigen Affinkrümmungslinien der gegebenen Fläche, längs deren die Affinnormalen parallel sind. Wenn das Krümmungsbild ein Punkt ist, und nur dann, sind die Kurven (18) unbestimmt.

Auf den Beweis aller dieser Sätze können wir hier nicht eingehen.

§ 2.

Die Liesche F_2 eines Flächenpunktes und die affinen Krümmungseigenschaften der Fläche.

8. Wir gehen jetzt daran, die affine Krümmungstheorie mit der sogenannten Lieschen F_2 eines Flächenpunktes in Verbindung zu bringen. Den Ausgangspunkt dabei bildet ein Satz von S. Lie²²⁾, der sich etwa folgendermaßen aussprechen läßt:

lichen numerischen Faktor absieht, genau in demselben gegenseitigen Verhältnisse, wie die erste und zweite Fundamentalform der metrischen Flächentheorie und ihre mittels der Jacobischen Funktionaldeterminante gebildete absolute quadratische Simultankovariante. Außerdem haben die mittlere Affinkrümmung und das affine Krümmungsmaß, als Simultaninvarianten von (1) und (18), zu diesen Differentialformen eben dieselbe Beziehung wie die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß der metrischen Theorie zu den zugehörigen beiden ersten Fundamentalformen. Die affine Krümmungstheorie läßt sich demnach als Theorie der simultanen invarianten Bildungen der zwei quadratischen Differentialformen (1) und (18) auffassen.

²²⁾ a. a. O. ²⁾ a). — Bewiesen wurde der Satz erst von A. Demoulin ²⁾ d). E. J. Wilczynski, a. a. O. ²⁾ und P. Franek ²⁾ e). Weitergehende Betrachtungen bei G. Scheffers ²⁾ g).

Wenn man durch einen Punkt einer regulären Fläche die beiden Asymptotenlinien legt, auf der ersten zwei zu diesem Punkt benachbarte Punkte wählt und durch alle drei Punkte die Asymptoten der zweiten Schar zieht, so bestimmen diese in der Grenzlage *dieselbe* Fläche zweiten Grades, wie die Asymptoten, die man erhält, wenn man auf der anderen Asymptotenlinie des Ausgangspunktes zwei zu ihm benachbarte Punkte wählt und durch diese drei Punkte die Asymptoten der ersten Schar zieht.

Die Fläche zweiten Grades, deren Existenz durch diesen Satz ausgesprochen wird, heißt die *Liesche* F_2 *des betrachteten Flächenpunktes*. Sie ist offenbar projektiv-kovariant mit der gegebenen Fläche verbunden. Von ihrer Gleichung:

$$a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

brauchen wir hier nicht die von Herrn P. Franck²³⁾ berechneten Werte der Koeffizienten selbst, sondern nur den ihrer Diskriminante $A = |a_{00} a_{11} a_{22} a_{33}|$ und der Unterdeterminanten A_{0k} der a_{0k} ($k = 0, 1, 2, 3$) in dieser Diskriminante.

Wenn:

$$(19) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

das quadrierte Bogenelement der Fläche bezeichnet, und

$$(20) \quad EG - F^2 = \Delta^2 \quad (\Delta^2 \neq 0)$$

gesetzt wird, so hat man:

$$(21) \quad A = \frac{M^6}{\Delta^8}$$

und

$$(22) \quad A_{00} = -\frac{M^4}{\Delta^6} \cdot \Omega; \quad A_{0k} = -\frac{M^4}{\Delta^6} \left(\Omega \cdot x_k - \frac{\partial^2 x_k}{\partial p \partial q} \right), \quad (k = 1, 2, 3).$$

In (21) und (22) bedeuten die x_k die Komponenten des Vektors ξ , M die mittlere Größe (5) und Ω den Ausdruck:

$$(23) \quad \Omega = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}.$$

Die Christoffelschen Drei-Indizes-Symbole zweiter Art in (23) beziehen sich auf die quadratische Differentialform (19).

Die Formeln (21) bis (23) finden sich im wesentlichen schon in den

²³⁾ a. a. O. *) e). — Auch Herr A. Demoulin hat a. a. O. *) d) die Gleichung der Lieschen F_2 aufgestellt, jedoch nur bezogen auf zwei verschiedene mit dem betrachteten Flächenpunkte verbundene Trieder. Siehe auch G. Scheffers *) g).

zitierten²²⁾ Abhandlungen²⁴⁾. Aus (21) schließt man sofort, daß die Liesche F_2 für jeden Punkt einer regulären Fläche singularitätenfrei ist²⁵⁾.

9. Wir drücken jetzt \mathfrak{D} durch die in der affinen Flächentheorie auftretenden Größen aus. Das geschieht am einfachsten so, daß man die beiden Grundgleichungen der gewöhnlichen Flächentheorie (vgl. (5)!):

$$(24) \quad \varepsilon_{pp} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_p + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \varepsilon_q, \quad \varepsilon_{qq} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_p + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \varepsilon_q$$

mit den entsprechenden affingeometrischen Gleichungen (10a) zusammenhält. Es folgt:

$$(25) \quad \begin{aligned} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial \log \varphi}{\partial p}, & \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial \log \varphi}{\partial q}, \\ \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{P}{\varphi}, & \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{Q}{\varphi}, \end{aligned}$$

also:

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial p \partial q} + \frac{P \cdot Q}{\varphi^2},$$

oder endlich, wegen (6) und (7):

$$(26) \quad \mathfrak{D} = -\varphi(\psi - \sigma).$$

Hieraus ergibt sich, da nach (3) und (5) $\varphi \neq 0$ ist:

Die Liesche F_2 eines Punktes einer regulären Fläche ist dann und nur dann ein Paraboloid, wenn die mittlere Affinkrümmung der Fläche in diesem Punkte Null ist. Einen solchen Punkt nennen wir einen paraboloidischen Flächenpunkt²⁶⁾.

Die regulären Flächen der mittleren Affinkrümmung Null oder die Affin-Minimalflächen erweisen sich somit als identisch mit den bereits mehrfach untersuchten⁴⁾ paraboloidischen Flächen, d. h. denjenigen regulären Flächen, bei denen die Liesche F_2 in jedem Punkte ein Paraboloid ist.

10. Wir nehmen jetzt an, daß im Punkte \mathfrak{z} der betrachteten Fläche $\mathfrak{D} \neq 0$ sei. Dann ist die Liesche F_2 des Punktes eine Mittelpunktsfläche zweiten Grades. Eine solche besitzt gegenüber inhaltstreuen Affinitäten eine (wesentliche) absolute Invariante, als die wir die Größe:

$$(27) \quad J = -\frac{A_{00}^4}{A^3}$$

(das quadrierte reziproke Halbachsenprodukt) wählen wollen. Aus (21), (22), (26) und (3) folgt:

$$(28) \quad J = (\psi - \sigma)^4,$$

²⁴⁾ sowie in ⁴⁾ d).

²⁵⁾ P. Franck, a. a. O. ³⁾ f).

²⁶⁾ Dieser Name wurde von Herrn P. Franck eingeführt, ebenso der Name paraboloidische Flächen; a. a. O. ³⁾ f), ⁴⁾ c).

d. h. die rationale absolute Invariante J der Lieschen F_2 eines nicht parabolischen Punktes einer regulären Fläche gegenüber inhaltstreuen Affinitäten ist gleich der vierten Potenz der mittleren Affinkrümmung der Fläche im betrachteten Punkte.

11. Für einen paraboloidischen Punkt einer regulären Fläche ist der Mittelpunkt der zugehörigen Lieschen F_2 der uneigentliche Punkt der Geraden des Affinnormalvektors \tilde{x} , wie aus (22), (26) und (10b) unmittelbar folgt. Aus denselben Gleichungen findet man für den Mittelpunkt η der Lieschen F_2 eines nicht-paraboloidischen Flächenpunktes:

$$(29) \quad \eta = x - \frac{1}{\psi - \sigma} \tilde{x},$$

so daß der Vektor $x - \eta$ wieder die Richtung des Affinnormalvektors \tilde{x} besitzt. Endlich hat die Affinnormale in jedem eigentlichen Punkte einer singularitätenfreien Fläche zweiten Grades die Richtung nach dem eigentlichen oder uneigentlichen Mittelpunkt dieser Fläche²⁷⁾. Man hat also:

In jedem Punkte einer regulären Fläche ist die Affinnormale der Fläche identisch mit der Affinnormale der zugehörigen Lieschen F_2 .

Damit haben wir zu den bereits bekannten Definitionen der Affinnormale eine neue hinzugefügt²⁸⁾.

12. Nunmehr können wir auch die Sätze der Nummern 9 und 10 in einen einzigen zusammenfassen:

Die mittlere Affinkrümmung einer regulären Fläche ist in jedem Punkte gleich der mittleren Affinkrümmung der zugehörigen Lieschen F_2 ²⁹⁾.

In der Tat ist die Invariante J einer beliebigen singularitätenfreien Fläche zweiten Grades gleich der vierten Potenz der mittleren Affinkrümmung dieser Fläche, so daß der Satz für einen paraboloidischen

²⁷⁾ G. Pick, A. G. IV, Nr. 10.

²⁸⁾ Wir entnehmen jetzt der zitierten Note ³⁾c) des Herrn A. Demoulin noch die folgende Definition der Affinnormalen:

Längs der Asymptotenlinie $p = \text{konst.}$ ($q = \text{konst.}$), die durch den Punkt x der Fläche läuft, bilden die Tangenten der Asymptotenlinien $q = \text{konst.}$ ($p = \text{konst.}$) eine Regelfläche Σ (Σ'). Die asymptotische Ebene dieser Regelfläche Σ (Σ') für die Erzeugende, die durch x geht, heiße Π (Π'). Dann ist die Schnittlinie der Ebenen Π und Π' die Affinnormale der gegebenen Fläche im Punkte x .

²⁹⁾ Ganz analoge Sätze, wie die in Nr. 9–13 für die regulären Flächen im Raume abgeleiteten gelten auch für die krummen Linien in der Ebene. An die Stelle der Lieschen F_2 des Flächenpunktes tritt dabei nur der im betrachteten Kurvenpunkt oskulierende Kegelschnitt, an die Stelle der mittleren Affinkrümmung der Fläche die Affinkrümmung der ebenen Kurve in diesem Punkte. Allerdings verstehen sich in der Ebene die meisten dieser Sätze ziemlich von selbst.

Flächenpunkt ohne weiteres folgt. Im Falle einer Lieschen Mittelpunkts- F_2 beachte man noch, daß die mittlere Affinkrümmung $\bar{\psi}$ der F_2 gleich ihrem reziproken (einzigen) affinen Hauptkrümmungsradius ist. Der Mittelpunkt η der Lieschen F_2 ist also in diesem Falle auch durch:

$$(30) \quad \eta = \xi - \frac{1}{\bar{\psi}} \tilde{\xi}$$

gegeben (vgl. (14)). Aus (29) und (30) folgt:

$$(31) \quad \psi - \sigma = \bar{\psi}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

13. Durch die Lage der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte eines Flächenpunktes ist auch die Lage des Mittelpunktes der zugehörigen Lieschen F_2 vollkommen bestimmt. Es gilt nämlich der Satz von A. Demoulin³⁰⁾:

Die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte eines Punktes einer regulären Fläche werden vom Punkte selbst und vom Mittelpunkte der zugehörigen Lieschen F_2 harmonisch getrennt.

Sei zunächst der Flächenpunkt paraboloidisch, also $\psi - \sigma = 0$. Dann sind entweder, wegen (16), seine beiden affinen Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 endlich und entgegengesetzt gleich, oder sie sind beide unendlich groß. Da der Mittelpunkt der Lieschen F_2 für einen paraboloidischen Flächenpunkt der uneigentliche Punkt der Affinnormale des Punktes ist, so ist für einen solchen Punkt die Richtigkeit des Satzes gezeigt.*

In einem nicht-paraboloidischen Flächenpunkt können zunächst die beiden affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sein. Dann folgt aus (16), daß sie auch gleich dem reziproken Werte der mittleren Affinkrümmung in diesem Punkte sind. (14) und (29) zeigen jetzt weiter, daß der einzige affine Hauptkrümmungsmittelpunkt σ mit dem Mittelpunkt η der Lieschen F_2 des Flächenpunktes zusammenfällt, wie es unser Satz in diesem Fall verlangt.

Wenn endlich $\psi - \sigma \neq 0$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist, so liefern (14), (29) und (16) für das Doppelverhältnis $(\sigma_1 \sigma_2 \xi \eta)$ der vier Punkte den Wert:

$$(32) \quad (\sigma_1 \sigma_2 \xi \eta) = \frac{\sigma_1 - \xi}{\xi - \sigma_2} : \frac{\sigma_1 - \eta}{\eta - \sigma_2} = - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} : \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -1.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

14. Wenn die beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte für einen Punkt einer regulären Fläche zusammenfallen, so ist nach (16) und (17) das *affine Krümmungsmaß* in diesem Punkte gleich dem Quadrate der mittleren Affinkrümmung. Im andern Falle läßt sich, für einen nicht-paraboloidischen Flächenpunkt, das *affine Krümmungsmaß* ausdrücken

³⁰⁾ a. a. O. 2)c). Vgl. dazu Anm. 14). Ein Beweis des Satzes findet sich l. c. nicht.

durch die mittlere Affinkrümmung und durch das Teilverhältnis, in dem der Mittelpunkt der Lieschen F_2 die Strecke der beiden affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte teilt.

Dieses Teilverhältnis $t = \frac{\varrho_1 - \vartheta}{\vartheta - \varrho_2}$ hat unter der Voraussetzung $\frac{1}{\varrho_1} \neq \frac{1}{\varrho_2}$ für einen nicht-paraboloidischen Flächenpunkt den Wert:

$$(33) \quad t = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}.$$

Aus (33) und (16) erhält man als den gesuchten Ausdruck für das affine Krümmungsmaß:

$$(34) \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{4t(\psi - \sigma)^2}{(1+t)^2} \quad (t \neq -1),$$

der auch im Grenzfalle $t = 1$, in dem $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2}$ wird, dasselbe Resultat liefert wie (16).

Wir merken schließlich auch noch die Formel an:

$$(35) \quad \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = 2 \frac{1-t}{1+t} (\psi - \sigma) \quad (t \neq -1).$$

§ 3.

Über die Flächen, bei denen in jedem Punkte die reziproken affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sind.

15. Die regulären Flächen, bei denen auf jeder Affinnormalen einer der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte mit dem Mittelpunkte der zugehörigen Lieschen F_2 zusammenfällt, haben nach Nr. 13 zugleich die Eigenschaft, daß die reziproken Werte der beiden affinen Hauptkrümmungsradien einander beständig gleich sind. Aus

$$(36) \quad \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = 0$$

folgt dann wegen (17) und (13) weiter:

Auf den regulären Flächen, bei denen in jedem Punkte die reziproken affinen Hauptkrümmungsradien einander gleich sind, ist entweder jede Kurve Affinkrümmungslinie ($P_q = Q_p = 0$), oder es fallen die beiden Scharen von Affinkrümmungslinien miteinander und (daher) mit der einen Schar von Asymptotenlinien zusammen ($P_q = 0$, $Q_p \neq 0$ oder $P_q \neq 0$, $Q_p = 0$).

16. Betrachten wir zunächst die regulären Flächen, für welche identisch:

$$(37) \quad P_q = Q_p = 0$$

ist. Eine solche Fläche besitzt nach (12) konstante mittlere Affinkrümmung $\psi - \sigma$. Wenn außerdem $\psi - \sigma = 0$ ist, so folgt aus den Gleichungen

chungen (11), daß alle Affinnormalen der Fläche parallel sind. Hat man dagegen $\psi - \sigma \neq 0$, so erhält man aus (29) durch Differentiation mit Hilfe von (11) und (12):

$$(38) \quad \begin{cases} \eta_p = \frac{1}{\psi - \sigma} \frac{P_q}{\varphi^2} \xi_q + \frac{1}{(\psi - \sigma)^2} \left\{ \frac{P Q_p}{\varphi^3} - \frac{1}{\varphi} \left(\frac{P_q}{\varphi} \right)_q \right\} \tilde{\xi}, \\ \eta_q = \frac{1}{\psi - \sigma} \frac{Q_p}{\varphi^2} \xi_p + \frac{1}{(\psi - \sigma)^2} \left\{ \frac{Q P_q}{\varphi^3} - \frac{1}{\varphi} \left(\frac{Q_p}{\varphi} \right)_p \right\} \tilde{\xi}, \end{cases}$$

und diese Gleichungen im Verein mit (37) zeigen, daß alle Affinnormalen der Fläche durch den festen Punkt η gehen.

Die Flächen, von denen die Rede ist, senden also alle Affinnormalen durch einen festen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt, d. h. sie sind — wie übrigens schon bekannt ist⁷⁾ — die *Affinsphären* oder *affinsphärischen Flächen*. Es empfiehlt sich, eine Affinsphäre *eigentlich* oder *uneigentlich* zu nennen, je nachdem es ihr Zentrum ist: die beiden hiermit unterschiedenen Flächenklassen haben *wesentlich* verschiedene Eigenschaften.

17. Die *reellen* regulären Flächen, für welche

$$(39) \quad P_q \neq 0, Q_p = 0 \quad \text{oder} \quad P_q = 0, Q_p \neq 0,$$

sind, wenn sie reelle Punkte besitzen, in diesen stets hyperbolisch gekrümmt. Denn die Affinkrümmungslinien der reellen Membran einer solchen Fläche sind ihrer geometrischen Definition nach stets reell. Das gleiche gilt daher auch von der einen, und somit auch von der zweiten Schar von Asymptotenlinien³¹⁾.

18. Wir fragen schließlich nach den besonderen regulären Flächen der betrachteten Art, für die der Ort des affinen Hauptkrümmungsmittelpunktes eine eigentliche oder uneigentliche Kurve ist.

Sei η ein regulärer Punkt dieser Kurve. Dann gehen durch η ∞^1 Affinnormalen³²⁾, für deren jede η ein doppelt zählender Brennpunkt ist. Aus einem bekannten Satze über Kongruenzen³³⁾ folgt, daß die Affinnormalen durch η in einer Ebene durch die Tangente in η an die Kurve der affinen Hauptkrümmungsmittelpunkte liegen. Nun schneiden aber alle Affinnormalen durch η die gegebene Fläche längs einer Affinkrümmungslinie. Die Affinkrümmungslinien sind daher ebene Kurven.

³¹⁾ Hieraus erklärt sich der *scheinbare* Widerspruch des Satzes in Nr. 15 mit einem Satze bei W. Blaschke, A. G. XII, § 4. Dort werden eben ausdrücklich nur reelle und elliptisch gekrümmte Flächenstücke betrachtet. — Wir haben das Vorhergehende absichtlich so ausführlich dargestellt, um diesen Punkt klarzulegen.

³²⁾ Wir zählen *komplexe* Konstante.

³³⁾ G. Darboux, Leçons II, Paris 1889, S. 10 und 15 f.

Nach Nr. 15 sind sie ferner Asymptotenlinien der Fläche. Beide Eigenschaften können aber nur dann zusammen bestehen, wenn die Affinkrümmungslinien gerade Linien sind. Also¹⁰⁾:

Die nicht-affinsphärischen regulären Regelflächen sind die einzigen regulären Flächen, bei denen beständig $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2}$ und der Ort des affinen Hauptkrümmungsmittelpunktes eine eigentliche oder uneigentliche Kurve ist.

Unsere Ableitung zeigt auch, daß die mittlere Affinkrümmung der nicht-affinsphärischen (und somit *aller*) regulären Regelflächen längs jeder Erzeugenden konstant ist. Sie kann insbesondere auch bei einer *nicht-affinsphärischen* regulären Regelfläche auf der ganzen Fläche konstant sein³⁴⁾. Die regulären Regelflächen von der mittleren Affinkrümmung Null sind die regulären Regelflächen mit Leitebene³⁵⁾.

Den sehr einfachen analytischen Beweis des in dieser Nummer ausgesprochenen Satzes überlassen wir dem Leser³⁶⁾.

Prag, den 8. Oktober 1919.

³⁴⁾ Ein Beispiel für die nicht-affinsphärischen regulären Regelflächen konstanter, von Null verschiedener mittlerer Affinkrümmung bieten die (komplex-) affin Transformierten der imaginären Serrettschen Flächen konstanter Krümmung mit einer Schar von Minimalgeraden.

³⁵⁾ P. Franck, a. a. O. 4) d), Satz 3.

³⁶⁾ (Anm. bei der Korrektur.) — Die Literaturangaben der Einleitung sind noch durch folgende Abhandlungen zu ergänzen, die mir erst nach Absendung des Manuskriptes bekannt geworden sind:

Zur Grundlegung der affinen Flächentheorie: R. König, Über affine Geometrie XXIV. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 71 (1919), 3–19.

Über Regelflächen, insbesondere über affinsphärische: J. Radon, Über affine Geometrie XVII. Zur Affingeometrie der Regelflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 70 (1918) 147–155. — In dieser Arbeit wird u. a. auch die oskulierende F_2 einer (regulären) Regelfläche betrachtet, und für die Affinnormale und das affine Krümmungsmaß der *Regelfläche* eine analoge Deutung gegeben, wie es im Vorstehenden für die Affinnormale und die mittlere Affinkrümmung einer *beliebigen* regulären Fläche geschieht. Diese Deutung hat dann Herr W. Blaschke u. a. für die affine Theorie der Raumkurven verwertet: W. Blaschke, Über affine Geometrie XXV. Raumkurven und Schiebflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 71 (1919) 20–28; insbes. S. 25 f.

Wie mir Herr R. Weitzenböck nachträglich (7. November 1919) mitteilt, ist auch Herr J. Radon zu dem in Nr. 5 ausgesprochenen Satz über den Kegel der Affinnormalen der Affinnormalschnitte eines Flächenpunktes gelangt.