

Vorstehende Untersuchung hat also zu den Ergebnissen geführt:

1. Um in der Differentialgleichung für die Bewegung eines Magnets innerhalb eines dämpfenden Multiplicators das durch Erdmagnetismus (H) und Strom inducirte Längs- und Quermoment in Rechnung zu ziehen, hat man nur statt des magnetischen Momentes M überall zu setzen:

$$\mathfrak{M} = M + (\gamma - \alpha) H,$$

wo γ und α das durch die magnetisirende Kraft Eins inducirte Längs- und Quermoment bedeutet.

2. Der Einfluss der in der Masse des Magnets bei seiner Bewegung inducirten Ströme auf die Dämpfung ist unmerklich.

Halle a. S., 10. Juli 1888.

XIII. Ueber den Einfluss der Krümmung der Oberfläche einer Flüssigkeit auf die Spannkraft ihres gesättigten Dampfes;
von B. Galitzine.

(Hierzu Taf. II Fig. 7–8.)

Sir W. Thomson¹⁾ hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit von der Gestalt ihrer Oberfläche nicht unabhängig ist, und zwar ist ihm zufolge diese Spannkraft kleiner bei concaven als bei ebenen Oberflächen, und bei diesen letzteren wieder kleiner als bei convexen. Dieser Druckunterschied kann durch die folgende Formel dargestellt werden:

$$p_1 - p_2 = \frac{T \cdot \sigma}{A - \sigma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

worin p_1 die Tension des Dampfes bei einer ebenen und p_2 bei einer gekrümmten Oberfläche, T die Oberflächenspannung, A die Dichte der Flüssigkeit, σ die Dichte ihres Dampfes und schliesslich r_1 und r_2 die Hauptkrümmungs-

1) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 42. p. 448. 1871; aus d. Proc. of the R. Soc. of Edinb. 1869–1870.

radien der freien Oberfläche bedeuten.¹⁾ Diese Formel ist aus den Bedingungen des Gleichgewichtszustandes zwischen Dampf und Flüssigkeit, wenn diese letzte in einem Capillarrohre im luftleeren Raume erhoben ist, von Sir W. Thomson abgeleitet worden.

Fitzgerald²⁾ hat diese Erscheinung von einem anderen Standpunkte aus betrachtet. Er untersuchte nämlich für ebene und gekrümmte Oberflächen die verschiedenen Strecken, welche ein in der Nähe der freien Oberfläche befindliches Molecül zurückzulegen hat, um sich von der Flüssigkeit loszureissen und an der Bildung des Dampfes theilzunehmen; und da beim Wachsen dieser Strecke die Anzahl der in der Zeiteinheit die Flüssigkeit verlassenden Molecüle kleiner wird, fand er, dass der Druckunterschied des gesättigten Dampfes für ebene und gekrümmte Oberflächen wirklich der Summe der Hauptkrümmungen proportional ist.

Warburg³⁾ hat einen strengen Beweis der Thomson'schen Formel gegeben, indem er zwei verschiedene Wege untersuchte, auf welchen man den Radius einer Flüssigkeitskugel auf Kosten einer anderen vergrössern kann.⁴⁾

Stefan geht in seiner Abhandlung⁵⁾ von ganz anderen Betrachtungen aus.

Er findet nämlich, dass die Arbeit, welche nothwendig ist, um ein Molecül der Wirkungssphäre einer freien Flüssigkeitsoberfläche zu entziehen, grösser sein muss für concave als für ebene Oberflächen und noch grösser, als für convexe. Folglich wird die Anzahl der Molecüle, welche bei einer concaven Oberfläche die Flüssigkeit verlassen, eine geringere sein, was eine Abnahme der Spannkraft des gesättigten Dampfes zur Folge haben wird, wie es auch aus der Thomson'schen Formel hervorgeht.

1) r_1 und r_2 sind hier für eine concave Oberfläche positiv gerechnet.

2) Fitzgerald, Phil. Mag. (5) 8. p. 382. 1879.

3) Warburg, Wied. Ann. 28. p. 394. 1886.

4) Erstens mittelst der Arbeit der Capillarkräfte und zweitens durch Verdampfung und Niederschlag.

5) Stefan, Wien. Ber. 94. II. Abth. p. 4. 1886. Auch Wied. Ann. 29. p. 655. 1886.

Da Stefan sich auf allgemeine Betrachtungen über den Gegenstand beschränkt hat, habe ich in dieser Abhandlung versucht, seine theoretischen Ansichten etwas weiter zu entwickeln.

Denken wir uns ein Molecül der Flüssigkeit, welches die Masse m besitzt; nehmen wir ferner an, die Oberfläche der Flüssigkeit sei eben, und verstehen wir unter Ω die negative Arbeit, welche von den Molecülen der Flüssigkeit geleistet wird, wenn eine Anzahl von Molecülen, deren gesammte Masse Σm ist, von der Oberfläche entfernt und ausserhalb der Wirkungssphäre derselben gebracht wird. Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass Ω unabhängig von dem Wege ist, welchen jedes Molecül bei seiner Entweichung aus der Flüssigkeit zurückgelegt hat. Sei noch p_1 der Druck des gesättigten Dampfes, w und v_1 die Volumina, U_0 und U_1 die innere Energie einer Masse Σm des Körpers im flüssigen und gasförmigen Zustande unter den gegebenen Umständen. Bezeichnen wir ferner mit Q_1 die Wärmemenge, welche zugeführt werden muss, um diese Masse Σm des Körpers aus seinem ersten, flüssigen in seinen zweiten, gasförmigen Zustand überzuführen.

Dann muss nach einem Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie, die folgende Gleichung gelten:

$$(1) \quad Q_1 = \frac{\Omega}{\varepsilon} + \frac{p_1}{\varepsilon} (v_1 - w) + U_1 - U_0,$$

wo ε das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet.

Sei jetzt die Oberfläche der Flüssigkeit concav. Dann kommt zu Ω noch eine kleine Arbeit τ hinzu, welche herrührt von der Krümmung der Oberfläche. Sei in diesem Fall der Druck p_2 , das Volumen v_2 , die innere Energie U_2 und die Wärmemenge Q_2 . Dann haben wir wieder zwischen allen diesen Grössen die folgende Beziehung:

$$(2) \quad Q_2 = \frac{\Omega}{\varepsilon} + \frac{\tau}{\varepsilon} + \frac{p_2}{\varepsilon} (v_2 - w) + (U_2 - U_0).^1)$$

Die betrachtete Masse Σm befindet sich in diesem zweiten Fall unter dem Druck p_2 und nimmt im gasförmigen

1) Die Aenderungen von w mit dem Druck sind wegen der Kleinheit des Druckunterschiedes vernachlässigt worden.

Zustand das Volumen v_2 ein. In der Gleichung (1) hat sie das Volumen v_1 unter dem Druck p_1 . Durch Zuführen, resp. Wegnehmen einer bestimmten Wärmemenge q können wir sie leicht aus einem dieser Zustände in den anderen überführen.

Offenbar ist:

$$q = U_2 - U_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$

Setzen wir $p v = p_1 v_1 = p_2 v_2$, so folgt:

$$q = U_2 - U_1 - \frac{1}{\varepsilon} p_1 v_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = U_2 - U_1 - \frac{p_1 v_1}{\varepsilon} \lg \frac{p_2}{p_1},$$

oder:
$$q = U_2 - U_1 - \frac{p_1 v_1}{\varepsilon} \lg \left(1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1} \right).$$

Wenn man aber berücksichtigt, dass $(p_1 - p_2)/p_1$ eine sehr kleine Grösse ist, so folgt ohne weiteres:

$$(3) \quad q = U_2 - U_1 + \frac{v_1}{\varepsilon} (p_1 - p_2).$$

Wir können diese gegebene Masse Σm , nachdem wir sie aus dem Zustand $(p_1 v_1)$ in $(p_2 v_2)$ übergeführt haben, wieder verflüssigen unter den Bedingungen der Gleichung (2). Dann ist sie wieder zu ihrem anfänglichen, flüssigen Zustand zurückgekehrt.

Dieser Kreisprocess ist vollständig umkehrbar; also ist nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie $\int dQ/T = 0$ bez., oder da T constant ist, $\int dQ = 0$. Folglich:

$$(4) \quad Q_1 + q = Q_2.$$

Setzt man die Werthe von Q_1 , Q_2 und q aus den Gleichungen (1), (2) und (3) in (4) ein, so folgt nach Vereinfachung:

$$\frac{p_1}{\varepsilon} (v_1 - w) + \frac{v_1}{\varepsilon} (p_1 - p_2) = \frac{\tau}{\varepsilon} + \frac{p_2}{\varepsilon} (v_2 - w).$$

Oder schliesslich, da $p_1 v_1 = p_2 v_2$ ist:

$$(5) \quad (p_1 - p_2) (v_1 - w) = \tau.$$

Es handelt sich jetzt nur darum, diese kleine Arbeit τ zu berechnen.

Sei AB ein Theil der concaven Oberfläche der Flüssigkeit. Beschreiben wir um irgend einen Punkt derselben eine Kugel mit dem Halbmesser ϱ_0 , gleich dem Radius der Wir-

kungssphäre der Molecüle, und legen wir durch 0 eine Tangentialebene CD . Die negative Arbeit, welche alle die unter dieser Ebene CD liegenden Molecüle bei der Entfernung eines Molecüls von 0 leisten, ist schon in Ω enthalten. Es ist also nur diejenige Arbeit zu berechnen, welche herrührt von den Molecülen, die zwischen CD , AB und der Kugeloberfläche liegen, wie aus der Fig. 7 hervorgeht.

Denken wir uns ein einziges Molecül, und berechnen wir die elementare Arbeit $d\tau$. Es ist sehr wichtig, hier hervorzuheben, dass auch in diesem Falle die geleistete Arbeit bis auf Glieder höherer Ordnung von der Bahn des Molecüls unabhängig ist, und es genügt folglich, diejenige Arbeit zu berechnen, welche für eine senkrecht auf der Oberfläche stehende Strecke von den Molecularkräften geleistet wird. In der That ist leicht einzusehen, dass, obgleich bei einer schiefen Bahn die Richtung der Kraft sich fortwährend ändert, nichtsdestoweniger die geleistete Arbeit immer dieselbe bleiben wird, weil die wirkende Kraft nur eine Function der Entfernung von dem Krümmungscentrum des betreffenden Normalschnittes der freien Oberfläche ist, vorausgesetzt, dass diese Krümmung an der Austrittsstelle eines Molecüls aus der Wirkungssphäre immer dieselbe ist wie in „0“, was, wegen der Kleinheit der zurückzulegenden Strecke im Vergleich mit dem Krümmungsradius des Oberflächenschnittes, offenbar angenommen werden darf.

Sei jetzt (Fig. 8) $a'b'$ ein Normalschnitt der Oberfläche im Punkte o . Beschreiben wir um o wieder eine Kugel mit dem Halbmesser ϱ_0 .

Also: $ob = oa = oc = \varrho_0$.

Sei der Krümmungsradius dieses Schnittes r und die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche im Punkte o r_1 und r_2 . Offenbar können wir wegen der Kleinheit des Verhältnisses (ϱ_0/r) die kleinen Bogen aa' und bb' durch zwei zu „ ab “ senkrechte Geraden ersetzt denken. Berechnen wir jetzt die Arbeit $d\tau$, welche erforderlich ist, ein Molecül mit der Masse m von o bis c fortzuschaffen. Nehmen wir irgend einen Punkt d auf der Linie oc in der Entfernung $od = h$, und beschreiben wir um d eine Kugel mit dem Radius ϱ_0 .

Seien ps und $p's'$ zwei kleine Bogen des Schnittes dieser Kugel mit der Zeichenebene, und suchen wir jetzt die Kraft in der Richtung von oc .

Sei Δ die Dichte der Flüssigkeit im Punkte g , ϱ die Entfernung dg und λ der Winkel odg . Dann können wir, ohne irgend eine Voraussetzung in Bezug auf die Abhängigkeit der gegenseitigen Attraction zweier Molecüle von ihrer relativen Entfernung zu machen, die Componente nach co der von g auf eine in d befindliche Masse m ausgeübten Kraft, durch folgende Formel darstellen:

$$(6) \quad dF = m \cdot \Delta \cdot f(\varrho) \cdot \cos \lambda \, du,$$

wo du ein Volumenelement bedeutet.

Das Integral dieses Ausdrucks, ausgedehnt auf das ganze Volumen $ps's'p'$, wird uns die gesuchte Kraft liefern. Aber wenn man berücksichtigt, dass ϱ_0/r eine sehr kleine Grösse ist, sodass Glieder von der Ordnung $(\varrho_0/r)^2$ vernachlässigt werden können, so vereinfacht sich dieses Integral in sehr bedeutender Weise. Man braucht dann nur über das Volumen $pqq'p'$ zu integrieren, denn pqs und $p'q's'$ liefern, wie die Analyse zeigt, nur Beiträge von höherer Ordnung.

Um diese Integration in zweckmässiger Weise auszuführen, wählen wir folgendes Coordinatensystem. Nehmen wir als Polaraxe den Schnitt einer Hauptkrümmungsebene mit der Tangentialebene „ ab “. Sei θ der veränderliche Winkel zwischen dieser Axe und der Linie ob , welche in der Tangentialebene sich befindet. Die andere Coordinate sei die Projection t von og auf „ ab “; also $of = t$. θ geht offenbar von 0 bis 2π und t von 0 bis $op = \sqrt{\varrho_0^2 - h^2}$. Als dritte Coordinate wählen wir den Winkel ψ zwischen der Linie og und ihrer Projection of auf die Tangentialebene; $gof = \psi$. ψ geht von 0 bis zu $\psi_0 = kof$, welches wir in folgender Weise bestimmen können.

Der Krümmungsradius des Schnittes $a'abb'$ ist bekanntlich gegeben durch die Euler'sche Formel:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2 \theta}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta}{r_2}.$$

Ferner sieht man aus der Figur, dass:

$$t^2 = (2r - t \operatorname{tg} \psi_0) t \operatorname{tg} \psi_0;$$

oder, weil $t < \varrho_0$, und wegen der Kleinheit von ϱ_0/r können wir einfach schreiben:

$$\psi_0 = \frac{t}{2r} = \frac{t}{2} \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta}{r_2} \right\}.$$

Das Volumenelement du lässt sich offenbar so ausdrücken:

$$du = t^2 dt \cdot d\psi \cdot d\theta.$$

Somit bleiben nur noch ϱ und λ zu ermitteln.

Aus dem Dreick *dog* folgt:

$$\varrho^2 = h^2 + \frac{t^2}{\cos^2 \psi} - 2h \frac{t}{\cos \psi} \cdot \sin \psi;$$

oder mit ausreichender Genauigkeit:

$$\varrho = + \sqrt{h^2 + t^2}.$$

Andererseits ist mit derselben Genauigkeit:

$$\cos \lambda = \frac{h}{+ \sqrt{h^2 + t^2}}.$$

Setzt man alle diese Werthe in die Formel (6) ein und integrirt zwischen den angedeuteten Grenzen, so erhält man für die gesuchte Kraft F den folgenden Ausdruck:

$$(7) \quad F = m \int_0^{\sqrt{\varrho_0^2 - h^2}} dt \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\psi_0} f(\sqrt{h^2 + t^2}) \frac{h \cdot A \cdot t^2}{+ \sqrt{h^2 + t^2}} d\psi.$$

Die Dichte A der Flüssigkeit ist ebenfalls eine Function der Coordinaten, insbesondere in der Nähe der freien Oberfläche, aber wenn man berücksichtigt, dass bei der Integration sowohl nach ψ , wie auch sodann nach θ und t der Factor von A sein Vorzeichen zwischen den angedeuteten Grenzen behält, so kann man nach einem bekannten Satz A für jeden einzelnen Fall durch einen mittleren Werth ersetzen und vor das Integralzeichen stellen. Aber der Einfachheit wegen werden wir A als constant betrachten.

Führt man die in Formel (7) angedeutete Integration aus und berücksichtigt dabei, dass:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi,$$

so bekommt man den folgenden Ausdruck:

$$F = \frac{m \cdot A \cdot \pi}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) h \int_0^{\sqrt{\varrho_0^2 - h^2}} \frac{t^3 f(\sqrt{h^2 + t^2})}{\sqrt{h^2 + t^2}} dt$$

oder:
$$F = \frac{m \cdot A \cdot \pi}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) h \cdot \varphi(h, \varrho_0),$$

wenn:
$$\int_0^{\sqrt{\varrho_0^2 - h^2}} \frac{t^3 f(\sqrt{h^2 + t^2})}{\sqrt{h^2 + t^2}} dt = \varphi(h, \varrho_0)$$

gesetzt wird. Die gesuchte elementare Arbeit $d\tau$ ist gleich:

$$\int_0^{\varrho_0} F dh.$$

Also:
$$d\tau = \frac{m \cdot A \cdot \pi}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \int_0^{\varrho_0} h \varphi(h, \varrho_0) dh.$$

Dieses Integral ist offenbar nur Function von ϱ_0 . Bezeichnen wir sie mit $\psi(\varrho_0)$. Sodann:

$$d\tau = \frac{m \cdot A \cdot \pi}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \psi(\varrho_0).$$

Wenn die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 für alle Punkte der Oberfläche als dieselben betrachtet werden dürfen, so erhält man den folgenden Ausdruck für die gesammte Arbeit τ :

$$\tau = \frac{\pi A}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \psi(\varrho_0) \Sigma m.$$

Setzt man dies in (5) ein, so folgt:

$$p_1 - p_2 = \frac{\pi A^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \psi(\varrho_0) \frac{w}{r_1 - w},$$

denn $\Sigma m = A \cdot w$.

Oder schliesslich, wenn σ die Dichte des gesättigten Dampfes bedeutet:

$$(8) \quad p_1 - p_2 = \frac{\pi A^2}{2} \psi(\varrho_0) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{\sigma}{A - \sigma}.$$

Dies ist aber nur ein anderer Ausdruck für die Thomson'sche Formel.

Diese Formel (8) ist auf einem verschiedenen Wege gewonnen worden, und trotzdem liefert sie dasselbe Resultat in Bezug auf den Einfluss der Krümmung der Oberfläche einer Flüssigkeit auf die Spannkraft ihres gesättigten Dampfes.

Setzt man diese beiden Ausdrücke für $p_1 - p_2$ einander gleich, so stellt sich heraus:

$$T = \frac{\pi}{2} A^2 \psi(\rho_0) \quad \text{oder} \quad (9) \quad \frac{T}{A^2} = F_1(\rho_0).$$

Das heisst: die Oberflächenspannung, dividirt durch das Quadrat der Dichte, ist nur Function der Wirkungsweite der Molecüle.

Zum Schlusse ist es interessant, dieses Resultat in Zusammenhang mit einem von Bartoli¹⁾ gefundenen empirischen Gesetz zu bringen.

Dieses Gesetz lautet wie folgt: Wenn a^2 die bekannte Capillaritätsconstante bedeutet, d das specifische Gewicht der Flüssigkeit und c ihre specifische Wärme bei gewöhnlicher Temperatur, so ist der Ausdruck a^2/cd für eine grosse Anzahl von Flüssigkeiten als constant zu betrachten.

Bekanntlich ist²⁾ $a^2 = 2 T/d$, also können wir schreiben:

$$\frac{T}{c A^2} = \text{Const.}$$

Vergleicht man dies mit der Formel (9), so stellt sich heraus:

$$c = \omega(\rho_0).$$

Das heisst: die specifische Wärme ist nur Function der Wirkungsweite der Molecüle.

Strassburg i. E.

1) Bartoli, Nuov. Cim. (3) 6. p. 141. 1879; Beibl. 4. p. 332. 1880; Journ. de Phys. 9. p. 399. 1880; Fortschritte der Physik 36. p. 233. 1880. Auch Transunti della R. Ac. dei Lincei (3) 8. p. 340. 1884.

2) Vgl. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 4. Aufl. 1. p. 334.