# 18.

# Eine Eigenschaft des Dreiecks.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

---

Zu drei gegebenen Puncten $A, B, C$ (Taf. IV. Fig. 3.) einen vierten $D$, in derselben Ebene, unter der Bedingung zu finden, dafs die Summe $S$ der drei Entfernungen $DA, DB, DC$ ein Minimum sei.

Man nehme $AB = c$ zur Axe der Abscissen, $A$ zu ihrem Anfangspunct an. $AQ = e$ und $QC = h$ seien die rechtwinkligen Coordinaten von $C$, und $AP = x$, $PD = y$ die von $D$. Ferner seien $\varphi$ und $\psi$ die Winkel zwischen $DA$ und $DP$ und $DB$ und $DP$, und $\mu$ der Winkel zwischen $CD$ und $CQ$. Dann gehen vermöge der Gleichungen

$$AD^2 = x^2 + y^2;$$
$$BD^2 = (c - x)^2 + y^2 \text{ und}$$
$$CD^2 = (x - c)^2 + (h - y)^2$$

die beiden Bedingungen $dS_x = 0$ und $dS_y = 0$ für $S = \text{Min.}$ in

$$\sin\varphi - \sin\psi \pm \sin\mu = 0 \quad \text{und} \quad \cos\varphi + \cos\psi - \cos\mu = 0$$

über und aus ihnen folgt

$$\cos(\varphi + \psi) = -\tfrac{1}{2},$$

also

$$\varphi + \psi = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Der verlangte Punct $D$ liegt also so, dafs die drei Winkel $ADB$, $BDC$ und $CDA$ einander gleich sind. Ist einer der drei Winkel des Dreiecks $ABC$, etwa der in $C$, $= \frac{2}{3}\pi$, so fällt $D$ in $C$; ist derselbe $> \frac{2}{3}\pi$, so fällt $D$ aufserhalb des Dreiecks und es ist $DA + DB - DC$ ein Minimum.

## Construction des Punctes $D$.

Bezeichnen $a, b, c$ die Länge der drei Seiten des Dreiecks; $\alpha, \beta, \gamma$ die ihnen gegenüber liegenden Winkel, und $u, v, w$ die Längen $DA, DB, DC$, so folgt aus

$$c^2 = u^2 + v^2 + uv, \quad b^2 = u^2 + w^2 + uw \quad \text{und} \quad a^2 = v^2 + w^2 + vw,$$

verbunden mit

$$[uv+uw+vw]\sin\tfrac{2}{3}\pi = \begin{Bmatrix} bc\sin\alpha \text{ oder} \\ ac\sin\beta \text{ oder} \\ ab\sin\gamma \end{Bmatrix}:$$

$$[u+v+w]^2 \quad\text{oder}\quad S^2 = \begin{Bmatrix} b^2+c^2-2bc\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\alpha) \text{ oder} \\ a^2+c^2-2ac\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\beta) \text{ oder} \\ a^2+b^2-2ab\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\gamma) \end{Bmatrix}.$$

Daraus erhellet, dafs wenn über den Seiten des Dreiecks $ABC$, aufserhalb desselben, die *gleichseitigen* Dreiecke $ABC_1$, $BCA_1$ und $ACB_1$ gezeichnet werden:

*Erstlich.* Jede der drei Längen $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ gleich $S$ ist; und

*Zweitens.* Alle drei sich in dem gesuchten Punct $D$ schneiden.

Die gleiche Construction giebt $D$, wenn auch einer der drei Winkel, etwa $\gamma$, gröfser als $\frac{2}{3}\pi$ ist, so wie auch wenn $C$ in $AB$ fällt; sie giebt dann $DA+DB-DC$ für das Minimum.

Berlin, im November 1854.