

16.

Ueber die Zapfenreibung bei stehenden Wellen.

(Von Herrn Dr. Druckenmüller, Director des Königl. Gewerbe-Instituts zu Berlin.)

Vor einigen Jahren hat *Schiele* in England ein Patent auf eine neue Construction der Zapfen an stehenden Wellen erhalten, welche als besonders vortheilhaft gerühmt wird, weil die Reibung bei solchen Zapfen nicht allein geringer als bei andern, sondern auch in *allen Puncten gleich* sein soll. Man hat deshalb die Erzeugende der Umdrehungsfläche, welche den Zapfen begrenzt, *Antifrictionscurve* genannt.

Legt man die Axe der y eines rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches die Antifrictionscurve bezogen wird, in die Axe der Welle, so ist jene Curve dadurch characterisirt, dass die *Tangente* von einem Punct derselben bis zur Axe der y *constant* bleibt. Demgemäss ist jene Linie eine bekannte *Tractorie*, welche früher mit dem Namen *Lagoïde* bezeichnet worden ist. Wegen ihrer Eigenschaften kann u. A. auf die „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der anal. Geom.“, von *L. J. Magnus*, Theil I, p. 551 verwiesen werden.

Im dritten Bande des „*Practical Mechanic. Journal*“ von Glasgow ist eine grosse Zahl von Fällen erörtert, für welche die Anwendung jener Zapfenconstruction empfohlen wird. Zugleich wird auf frühere Nachrichten, welche im ersten Bande enthalten sind, verwiesen. Da ich mir den letztern nicht verschaffen könnte, und andere Mittheilungen über denselben Gegenstand mir nicht zugekommen sind, so ist mir nicht bekannt, worauf sich die Behauptung gründet, dass ein nach der Antifrictionscurve gebildeter Zapfen *gleiche* Reibung *in allen Puncten* erleide und dass das Reibungsmoment bei ihm ein Minimum sei. Man hat mir versichert, der Patent-Inhaber sei durch rein empirische Versuche auf jene Construction geführt worden. Die nachfolgende Untersuchung wird ergeben, in wie fern dieselbe einen Vorzug vor andern hat.

§. 1.

Indem man jeden Seitendruck auf eine stehende Welle ausschliesst, nehme man an, dass keine andere Kraft auf dieselbe wirke, als ein Druck in der Richtung ihrer Axe.

Durch den Zweck des Zapfens ist bedingt, dass er von einer Umdrehungsfläche, deren Axe mit der Axe der Welle zusammenfällt, begrenzt wird. Legt man eine Ebene senkrecht auf die Axe, so wird sie die Zapfen-Oberfläche im Allgemeinen in einer Kreislinie schneiden, deren Punkte bei der Umdrehung gleiche Reibung erleiden. Das ebene Zapfen-Ende kann als besonderer Fall betrachtet werden; alle Punkte einer um den Endpunkt der Axe beschriebenen Kreislinie erleiden aber auch hier gleiche Reibung.

Wenn man Ay (Fig. 1) in die Axe der Welle legt und Ax rechtwinklig zu Ay annimmt, so bestimmt die Ebene $x Ay$ einen Schnitt der Zapfen-Oberfläche, welcher als die Erzeugende der letztern betrachtet werden kann. Bezogen auf Ay und Ax als positive Arme der Coordinaten-Axen, wollen wir die Erzeugende durch

$$(1.) \quad f(x, y) = 0$$

darstellen.

Wenn man einen Bogen der Erzeugenden durch s und einen Bogen des Zapfenschnitts mit dem Radius x durch σ bezeichnet, so ist $ds.d\sigma$ ein Element der Zapfen-Oberfläche. Man suche zunächst den normalen Druck auf dieses Element zu bestimmen.

Bezeichnet man hierzu den verticalen Druck, welcher auf die Flächeneinheit des Querschnitts der Welle ausgeübt wird, durch p , den verticalen Druck auf die ganze Unterlage aber durch P , und nimmt an, dass zwischen Zapfen und Pfanne, von dem Radius $x = \varrho$ bis $x = r$, Berührung Statt finde, so ist

$$(2.) \quad p = \frac{P}{\pi(r^2 - \varrho^2)},$$

indem der verticale Druck auf gleiche Projectionen des gedrückten Pfannenstücks als gleich angenommen werden muss. Nun sei (Fig. 1) LM die Tangente und MN die Normale in dem Punkte M , welchem x und y als Coordinaten angehören, an die erzeugende Curve, und φ sei der Winkel, den MN mit der Axe der x macht, in dem herkömmlichen Sinne gezählt: dann wird für jede Lage von LM die Projection des Elements $ds.d\sigma$ auf den Querschnitt der Welle durch

$$ds \cdot d\sigma \cdot \sin \varphi$$

ausgedrückt. Indem man also den verticalen Druck, der auf diese Projection oder, was Dasselbe ist, auf das Flächen-Element $ds \cdot d\sigma$ ausgeübt wird, durch dp bezeichnet, ist

$$(3.) \quad dp = p \sin \varphi \cdot ds \cdot d\sigma.$$

Zieheth man ausserdem dasjenige Element in Betracht, welches in dem durch M gehenden Querschnitt des Zapfens mit M auf demselben Durchmesser liegt, so lassen sich die auf diese beiden Elemente wirkenden Kräfte zu einer, nach der Richtung der Axe wirkenden Mittelkraft $2dp$ zusammensetzen. Es sei M' der Endpunct des durch M gehenden Durchmessers: dann ist NM' normal zu dem Element in M' , und $2dp$ lässt sich nach den Richtungen NM und NM' in zwei gleiche Seitenkräfte zerlegen. Bezeichnet man jede dieser Seitenkräfte durch dq , so ist

$$(4.) \quad dq = \frac{dp}{\sin \varphi} = p \, ds \cdot d\sigma.$$

Der Druck, welcher normal auf ein Flächen-Element ausgeübt wird, ist also gleich diesem Flächen-Element selbst, multiplicirt mit dem Druck auf die Flächen-Einheit des Querschnitts der Welle.

Setzt man aus (2) den Werth für p , so geht (5) über in:

$$(5.) \quad dq = \frac{P}{\pi(r^2 - \rho^2)} \cdot ds \cdot d\sigma.$$

Dem Falle, dass die Berührung zwischen Pfanne und Zapfen sich vom Endpunct der Wellen-Axe bis zu dem Kreise mit dem Radius r ausdehnt, entspricht die Formel

$$(6.) \quad dq = \frac{P}{\pi r^2} \cdot ds \cdot d\sigma.$$

§. 2.

Die durch die Reibung verloren gehende mechanische Leistung ist aber die Arbeit der Reibung. Ob dabei Abnutzung des Zapfens Statt finde, hängt davon ab, wie der Zapfen in der Schmiere gehalten wird. Für jede Art von Schmiere kann der Druck im Verhältniss zu der Berührungsfläche nur bis zu

einer gewissen Grenze gesteigert werden, wenn sich eine zusammenhängende Fettlage auf der Berührungsfläche erhalten soll. Ist diese vorhanden, so richtet sich der Reibungscoefficient, gemäss den Versuchen von *Morin*, nicht mehr nach der Beschaffenheit der Materien, zwischen welche die Schmiere gebracht ist, und behält nahezu einen constanten Werth. Unter diesen Umständen werden also Zapfen und Pfanne nicht mehr unmittelbar auf einander gerieben, und es findet nur eine unmerkliche Abnutzung Statt. Findet aber zwischen Zapfen und Pfanne eine unmittelbare Berührung, und bei der Umdrehung also auch Abnutzung Statt, so muss die Arbeit der in jedem Puncte Statt findenden Reibung auch als das Maass der eintretenden Abnutzung betrachtet werden; und die letztere ergiebt sich, wenn man die Arbeit der Reibung mit einem von der Natur des geriebenen Körpers abhängigen Coefficienten multiplicirt.

Ist nun μ der Reibungscoefficient, so wird das Reibungsmoment für das Element in M , welches von der Axe um x entfernt ist, nach (4) durch

$$(7.) \quad \mu p x ds . d\sigma$$

dargestellt. Da die durch die Reibung bei einer Umdrehung aufgezehrte Arbeit hieraus gefunden wird, wenn man mit 2π multiplicirt, so legen wir im Folgenden den Ausdruck (7) zu Grunde.

Bezeichnet man das Reibungsmoment für den ganzen Zapfen, soweit derselbe mit der Pfanne in Berührung ist, durch M , so ist

$$(8.) \quad M = \int \int \mu p x ds . d\sigma ;$$

wo die Integration nach σ durch den ganzen Kreis mit dem Radius x zu nehmen ist, die nach s aber nach der frühern Bezeichnung von $x = q$ bis $x = r$. Da x für den ganzen Bogen σ denselben Werth hat, so lässt sich die erste Integration vollziehen und man erhält

$$(9.) \quad M = 2\pi \mu \int_{x=q}^{x=r} p x^2 ds .$$

Wie die Formel (7) das Maass der durch die Reibung in einem Punct bei einer Umdrehung aufgezehrten Arbeit darstellt, so giebt die Formel (9) dieselbe Grösse in Bezug auf die ganze geriebene Fläche. Bei der letztern ist aber hinsichtlich der Grenzen q und r zu bemerken, dass sie einer Aenderung unterworfen sind, wenn Abnutzung Statt findet. Mit ihnen ändert sich dann auch p , indem sich der Druck P auf eine grössere oder geringere Fläche vertheilt. Ausser-

dem wird unterstellt, dass die Berührung zwischen Zapfen und Pfanne innerhalb der eingenommenen Grenzen überall eine *gleich-innige* sei, während in der Wirklichkeit das Auslaufen des Zapfens damit beginnt, dass die Berührung in einzelnen Punkten, ohne ganz aufgehoben zu werden, weniger innig und dadurch die Reibung geringer wird. Allein auch der neue Zapfen wird sich an die Pfanne nicht in allen Punkten gleich dicht anschliessen, wie sorgfältig beide auch gemacht sein mögen; dennoch wird die Formel (9), verbunden mit (7), dazu dienen, die Vortheile und Nachtheile verschiedener Zapfenconstructions zu vergleichen, indem die erwähnten Umstände bei *allen* ausser Rechnung bleiben.

§. 3.

Wir geben zunächst einige Beispiele von der Anwendung der Formel (9), um sodann zur nähern Untersuchung der nach der Antifrictioncurve gebildeten Zapfen überzugehen.

I. Ist der Zapfen *senkrecht auf die Axe abgeschnitten*, so wird $ds = dx$ und demnach

$$M = \frac{2}{3}\pi\mu p(r^3 - \varrho^3) = \frac{2}{3}\mu P \cdot \frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^2} = \frac{2}{3}\mu P \cdot \frac{r^2 + \varrho r + \varrho^2}{r + \varrho}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum für $\varrho = 0$, d. h. wenn in allen Punkten der Endfläche des Zapfens Reibung Statt findet und daher das Integral von Rand zu Rand zu nehmen ist. In diesem Falle wird

$$M = \frac{2}{3}\mu P r.$$

II. Hat der Zapfen die *Kegelform*, und ruht vom Radius $\varrho = CD$ bis zu $r = AB$ (Fig. 2) in der Pfanne, so kann man die Abscissen-Axe in die Linie AB legen, so dass an die Stelle der Gleichung (1) die folgende tritt:

$$ry + hx = hr,$$

wenn $h = AE$ ist. Demnach wird

$$ds = \frac{\sqrt{(h^2 + r^2)}}{r} dx$$

und daher

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\mu p \cdot \frac{\sqrt{(h^2 + r^2)}}{r} \cdot (r^3 - \varrho^3) = \frac{2}{3}\mu P \cdot \frac{\sqrt{(h^2 + r^2)}}{r} \cdot \frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^2} \\ &= \frac{2}{3}\mu P \cdot \frac{\sqrt{(h^2 + r^2)}}{r} \cdot \frac{r^2 + \varrho r + \varrho^2}{r + \varrho}. \end{aligned}$$

Dieser Werth wird wieder ein kleinster für $q = 0$, d. h. wenn der Zapfen bis zur Spitze in der Pfanne ruht, und geht dann über in

$$M = \frac{2}{3} \mu P \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Er ist immer grösser als der in (1) gefundene, und geht in diesen über, wenn h verschwindet, also der Zapfen eben wird. Die Anwendung *conischer* Zapfen empfiehlt sich also nicht.

Statt h kann man den Winkel $BEA = \alpha$ einführen, indem $\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} = \frac{1}{\sin \alpha}$ ist.

III. Die geriebene Zapfenfläche sei die *Zone einer Kugelfläche* mit dem Radius R ; dann kann man für die Gleichung der Erzeugenden

$$x^2 + y^2 = R^2$$

annehmen, wodurch

$$ds = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot dx \quad \text{und}$$

$$M = 2\pi \mu p R \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \pi \mu p R \left\{ -x \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arctg \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right\} + \text{Const.}$$

sich ergibt; welches Integral von $x = q$ bis $x = r$ zu nehmen ist, wenn q und r die Radien der die geriebene Zone begrenzenden Kreise sind. Führt man für p seinen Werth aus (2) ein und bestimmt auch hier denjenigen Werth von q , für welchen M ein Minimum wird, so kommt man wieder zu $q = 0$.

Die günstigste Anwendung dieser Zapfenform ist also diejenige, wenn die Zone ein *Kugelsegment* ist, in welchem kein Theil ausser Berührung mit der Pfanne bleibt. Diesem Fall entspricht

$$M = \frac{\mu P R}{r^2} \left\{ -r \sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \arctg \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right\}.$$

Ist das Segment eine *Halbkugel*, also $R = r$, so wird

$$M = \frac{1}{2} \pi \mu P r.$$

In allen drei, hier untersuchten Fällen wächst das Reibungsmoment für ein einzelnes Element nach (7) mit x ; die Abnutzung nimmt also von der Mitte nach dem Rande hin zu. Zieht man aber nur die Grösse der durch die Reibung auf den ganzen Zapfen erzeugten Arbeit in Betracht, so hat der ebene Zapfen vor den beiden andern den Vorzug.

§. 4.

Die Gleichung der in neuerer Zeit sogenannten *Antifrictionscurve* ist

$$y = \sqrt{m^2 - x^2} - \frac{1}{2}m \cdot \ln \frac{(m - \sqrt{m^2 - x^2})^2}{x^2}.$$

Die Curve liegt symmetrisch auf beiden Seiten des positiven Armes der Axe der y , berührt dieselbe asymptotisch und wird von der Axe der x in zwei Punkten berührt, welche vom Anfangspunkt der Coordinaten um m entfernt sind, so dass sie ungefähr die in (Fig. 3) angegebene Gestalt hat, wenn $AB=AC=m$ ist. Der im ersten Quadranten des Coordinatenraumes enthaltene Arm der Curve wird für sich durch

$$(10.) \quad y = \sqrt{m^2 - x^2} - m \ln \frac{m - \sqrt{m^2 - x^2}}{x}$$

dargestellt, und diese Gleichung tritt für einen Zapfen, der nach dieser Curve gebildet ist, an die Stelle von (1).

Ist ein solcher Zapfen von $x = \varrho$ bis $x = r$ gerieben, so wird das Moment der Gesamtreibung, da hier

$$ds = \frac{m dx}{x}$$

ist, nach (9), indem man für p sogleich seinen Werth setzt:

$$M = \frac{2\mu P}{r^2 - \varrho^2} \int_{\varrho}^r m x dx = \mu P m.$$

Das Reibungsmoment ist also bei einem nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen einer stehenden Welle von der Grösse der geriebenen Zone ganz unabhängig, und behält denselben Werth, wie gross auch der Theil des Zapfens sein mag, der wirklich auf der Pfanne ruht. Demnach wird es immer vorzuziehen sein, den Zapfen bis zu der Linie BC in die Pfanne zu versenken, so dass $m = r$ und $M = \mu P r$ wird.

Dagegen erweist sich die Behauptung, dass bei einem solchen Zapfen wegen der Reibung ein geringerer Verlust an mechanischer Leistung Statt finde als bei andern, schon hier als unrichtig, indem nach (§. 3, I) der Werth von M bei einem eben abgeschnittenen Zapfen bei gleichem Enddurchmesser nur $\frac{2}{3}$ des hier gefundenen ist.

§. 5.

Um die Behauptung zu prüfen, dass ein nach der Antifrictionscurve gebildeter Zapfen in allen Puncten *gleiche* Reibung erleide, müssen wir auf die Formel (8) zurückgehen. Aus ihr folgt, dass überhaupt keine Zapfenform denkbar ist, für welche in allen Puncten *gleiche* Reibung Statt fände; denn diese Eigenschaft würde nur dann da sein, wenn das Reibungsmoment für gleiche Flächen-Elemente gleich wäre, während in (7) das Flächen-Element durch $ds \cdot d\sigma$ ausgedrückt wird und das ihm entsprechende Reibungsmoment also mit x wächst. Wir kommen aber auch hier zu einer sehr bemerkenswerthen Eigenschaft des fraglichen Zapfens, indem wir für ds seinen Werth in (7) einführen. Da nämlich

$$ds = \frac{m dx}{x}$$

ist, so wird das Reibungsmoment für das Element $ds \cdot d\sigma$ gleich

$$\mu p m \cdot dx \cdot d\sigma.$$

Nun ist $dx \cdot d\sigma$ offenbar die Projection von $ds \cdot d\sigma$, woraus folgt:

Bei einem nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen einer stehenden Welle erleiden solche Flächentheile deren Horizontalprojectionen gleich sind, gleiche Reibung.

Hierbei ist nicht zu übersehen, dass das in der vorstehenden Formel enthaltene p , selbst von r und q abhängig ist. Die Reibungen verschiedener Zapfen folgen, auch wenn die Erzeugende ihrer Oberfläche dieselbe ist, nur dann dem oben ausgesprochenen Gesetze, wenn auch die geriebenen Zonen an ihnen dieselben sind, und es folgt aus dem Gesagten, dass die Reibung in jedem einzelnen Puncte um so geringer wird, je grösser die geriebene Oberfläche ist, während die Gesamttreibung nach (§. 4) dieselbe bleibt.

§. 6.

In (§. 2) ist erörtert, dass die Abnutzung, wenn eine solche Statt findet, auf jedem Element der Zapfen-Oberfläche dem Reibungsmoment des Elements proportional gesetzt werden müsse. Giebt man diesen Grundsatz zu, so lässt sich aus (§. 5) ferner schliessen, dass *eine Antifrictionscurve durch die Abnutzung ihre Gestalt nicht ändert.*

Denn es sei (Fig. 4) AB ein Bogen-Element der Antifrictionscurve, also $AB = ds$, und dem entsprechend, $CB = dx$, $AC = dy$. Dann muss angenommen werden, dass die Abnutzung in einer hinlänglich kleinen Zeit auf dem ganzen Element AB *dieselbe* sei, so dass, wenn $AEFB$ den durch die Abnutzung weggenommenen Theil des entsprechenden Zapfenschnitts darstellt, EF mit AB parallel ist, während AE und BF die abgenutzten Theile der das Element AB begrenzenden Krümmungsradien sind. Bezeichnet man also den Krümmungshalbmesser durch λ und die Veränderung, welche derselbe in der angenommenen Zeit erleidet, durch $\Delta\lambda$, so ist

$$AEFB = ds \cdot \Delta\lambda;$$

und da diese Grösse dx proportional sein muss, weil die Abnutzung auf dem Flächen-Element $ds \cdot d\sigma$ der Grösse $dx \cdot d\sigma$ proportional und $d\sigma$ constant ist, so kann man

$$ds \cdot \Delta\lambda = k \cdot dx$$

setzen, wo k eine constante Grösse ist, in welche auch μ , p und m übergegangen sind. Man suche hieraus die Veränderung Δy zu bestimmen, welche y im Punkte B durch die Abnutzung erleidet. Zieht man BH mit AC parallel, so ist $\Delta y = BH$. Nun ist aber, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und BHF :

$$BH : BF = AB : BC \quad \text{oder}$$

$$\Delta y : \Delta\lambda = ds : dx, \quad \text{also}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta\lambda \cdot ds}{dx} = k;$$

d. h. die Abnutzung, welche den Zapfen nach der Richtung der Axe der y in einer unmessbaren Zeit erleidet, ist für alle Punkte der Erzeugenden *dieselbe*. Die Erzeugende erleidet also durch die Abnutzung nur *eine Verschiebung*, aber *keine Veränderung ihrer Gestalt*.

Dasselbe gilt für die Pfanne, und eine Folge dieser merkwürdigen Eigenschaft wird sein, dass Zapfen und Pfanne, vorausgesetzt, dass beide genau nach derselben Antifrictionscurve geformt seien, auch nach erfolgter Abnutzung genau in einander passen und also *den Uebelständen nicht unterworfen sind, welchen andere Zapfen bei ihrer Abnutzung unterliegen*.

§. 7.

Die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Eigenthümlichkeiten der nach der Antifrictionscurve gebildeten Zapfen sind nicht allein theoretisch interessant, sondern auch wichtig genug, um diese Zapfenform dem Praktiker zu empfehlen. Dagegen geht ihr, wie oben gezeigt ist, die andere wichtige Eigenschaft ab, dass das Reibungsmoment ein *Minimum* wird.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, diejenige Zapfenform zu ermitteln, welche den zuletzt erwähnten Vorzug hat.

Setzt man $p = \frac{dy}{dx}$, so ist das Reibungsmoment dem Integrale

$$\int x^2 \sqrt{1+p^2} \cdot dx$$

proportional. Nach den Regeln der Variationsrechnung lässt sich aber die Form bestimmen, welche die Gleichung (1) annehmen muss, damit das vorstehende Integral, zwischen festen Grenzpunkten genommen, einen *kleinsten* Werth habe. Wenn man der Deutlichkeit wegen vorübergehend $x^2 \sqrt{1+p^2} = V$ setzt, so ist

$$\delta \int V dx = \int V \cdot \delta dx + \int dx \cdot \delta V = V \cdot \delta x + \int (dx \cdot \delta V - \delta x \cdot dV).$$

Nun ist

$$dV = 2x \sqrt{1+p^2} \cdot dx + \frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} dp,$$

$$\delta V = 2x \sqrt{1+p^2} \cdot \delta x + \frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \delta p;$$

folglich

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int \frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} (dx \delta p - \delta x dp).$$

Durch eine bekannte Umformung von δp geht aber der letzte Ausdruck in

$$V \delta x + \frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} (\delta y - p \delta x) - \int \frac{d \cdot \left(\frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} \right)}{dx} (\delta y - p \delta x)$$

über, und erfordert, damit das zu bestimmende Integral ein Minimum oder ein Maximum sei, die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{d \cdot \left(\frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} \right)}{dx} = 0,$$

woraus durch Integration, wenn die hinzutretende willkürliche Constante durch k bezeichnet wird,

$$\frac{x^2 p}{\sqrt{1+p^2}} = k$$

folgt. Löset man diese Gleichung nach p auf und setzt für p seinen Werth, so ergiebt sich als Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$dy = \frac{k dx}{\sqrt{(x^4 - k^2)}}.$$

Um den Nenner homogen zu machen, schreibe man k^2 statt k . Man muss aber dann zur Erhaltung der Unbestimmtheit des Zeichens, welche der Factor k im Zähler hat, dem Werthe von dy das Doppelzeichen geben. Dadurch wird

$$(11.) \quad dy = \pm \frac{k^2 dx}{\sqrt{(x^4 - k^4)}}$$

und daher die Gleichung der gesuchten Curve:

$$(12.) \quad y = \pm k^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - k^4)}}.$$

Das vorstehende Integral lässt sich bekanntlich leicht auf eine *elliptische Function von der ersten Art* zurückführen. Indem man

$$(13.) \quad x = \frac{k}{\cos \varphi} \quad \text{setzt, wird}$$

$$dx = \frac{-k \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} \quad \text{und}$$

$$y = \pm \int \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^4 \varphi}} = \pm \frac{k}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Nach der bekannten Bezeichnung des elliptischen Integrals erster Art ist also

$$(14.) \quad y = \pm \frac{k}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) + k';$$

wo k' eine zweite willkürliche Constante bezeichnet und die obern Zeichen in den Formeln (13 und 14) miteinander gehen; wie auch die untern.

Giebt man der eingeführten Hilfsveränderlichen nach und nach beliebige Werthe, so lassen sich mit Hülfe der Gleichungen (13 und 14) beliebig viele Punkte der gesuchten Curve bestimmen.

Für einen Zapfen, dessen Begrenzungsfläche durch Umdrehung dieser Curve erzeugt wird, ist aber das Reibungsmoment ein *Minimum*, oder ein *Maximum*. Wir werden weiter unten das Reibungsmoment selbst angeben, und nachweisen, dass dasselbe ein *Minimum* ist.

Die Constante k' lässt sich durch Verlegung der Abscissen-Axe beseitigen. Dasselbe gilt aber nicht von k ; welches vielmehr, je nach seiner Wahl, die Natur der Curve, von welcher die Zapfenform abhängt, bestimmt. Man erwäge, dass k der *kleinste* Werth ist, den x annehmen kann, indem für ein kleineres x der Werth von dy in (11) *imaginär* wird. Hieraus folgt, dass der Zapfen von $x = 0$ bis $x = k$ keine Reibung erleiden darf, dass also k der Radius des kleinern Kreises ist, welcher die geriebene Zone des Zapfens begrenzt; wesshalb k dem frühern ϱ gleich ist. Geometrisch betrachtet, ist k der Abstand vom Anfangspunct der Coordinaten, in welchem die Curve (14) die Axe der x schneidet.

Ist $k = \varrho = 0$, so läuft der Zapfen in eine *Spitze* aus. Nach der Gleichung (13) muss aber in diesem Falle φ nothwendig constant und gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein, weil nur unter dieser Bedingung x selbst andere Werthe als 0 bekommen und beliebig angenommen werden kann. Zugleich geht aber die Gleichung (14) in

$$y = 0$$

über: die gesuchte Curve wird also zu einer *geraden Linie*, welche auf der Axe der y senkrecht steht, und der Zapfen ist demnach *eben abgeschnitten*. Da schon in (§. 3) nachgewiesen ist, dass ein solcher Zapfen ein geringeres Reibungsmoment hat, als ein conischer oder kugelförmiger Zapfen, und demgemäss ein Maximum nicht vorhanden sein kann, so liegt hierin folgender Satz:

Unter allen Zapfen stehender Wellen, deren Reibungsfläche um die Wellen-Axe nicht unterbrochen ist, erleiden, unter übrigens gleichen Umständen, (Dicke, Druck und Material) die eben abgeschnittenen die geringste Reibung.

In jedem andern Falle kann man k als Einheit annehmen und darnach x und y bestimmen; dann wird

$$x = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right).$$

Aus dem Werthe von y folgt, dass die Curve aus zwei, gegen die Axe der x symmetrischen Armen besteht. Sie beziehen sich auf die beiden zu unterscheidenden Fälle, dass der Zapfen *nach oben*, oder *nach unten* gerichtet sein soll.

Lässt man das obere Zeichen gelten, so liegt die Curve ganz auf der Seite der negativen y und ist nach (11) gegen die Axe der x *concau*.

x lässt sich leicht durch Construction aus φ finden. Da aber eine geometrische Construction der Curve nicht zu erreichen ist, so entnehmen wir für verschiedene Werthe von φ die entsprechenden Werthe von F aus den Tafeln für die elliptischen Functionen, und stellen sie in folgender Tabelle mit den entsprechenden Werthen von x und y zusammen, um eine Vorstellung von dem Verlauf der Curve zu geben. Dabei ist zu bemerken, dass der in Tafel IX der „Exercices de calcul intégral“ von *Legendre* vorkommende Winkel $\vartheta = \arcsin c$ ist, und dass, da der Modulus c im gegenwärtigen Falle den Werth $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hat, hier $\vartheta = 45^\circ$ zu setzen ist. Hiernach gehören folgende Werthe zusammen:

φ	F	x	y
0	0	1	0
6	0,104815	1,0054	0,0741
15	0,263297	1,0352	0,1861
30	0,535623	1,1547	0,3787
45	0,826018	1,4142(= $\sqrt{2}$)	0,5840
54	1,101237	1,7013	0,7158
60	1,142429	2	0,8078
66	1,277270	2,4586	0,9242
75	1,487884	3,8637	1,0521
84	1,706250	9,5668	1,2064
90	1,854075	∞	1,3109

Da y Anfangs im Verhältniss zu x ziemlich rasch wächst, so erhebt sich die Curve hier steil, entfernt sich aber im Ganzen nur um die Grösse 1,3109 von der Axe der x . Aus (11) ergibt sich, dass sie auf der Axe der x in dem Punkte $x = k = 1$ von einer mit der Axe der y parallelen geraden Linie berührt wird. (Fig. 5) giebt ihre Gestalt ungefähr an.

Es sei noch bemerkt, dass sich der Modulus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ rasch so umformen lässt, dass er von der Einheit nur um eine verschwindend-kleine Grösse verschieden ist. Setzt man nämlich

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1} \dots$$

und daneben

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = c \sin \varphi,$$

$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = c_1 \sin \varphi_1,$$

so wird

$$c = 0,70711, \quad c_1 = 0,98517, \quad c_2 = 0,99998,$$

so dass schon c_2 ohne merklichen Fehler gleich 1 angenommen werden kann.

Dann ist

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c_1} \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 \varphi_2}} = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c_1} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2}} \\ &= \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c_1} \int \frac{d\varphi_2}{\cos \varphi_2}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$y = \mp \frac{2\sqrt{2} \cdot k}{1,70711 \cdot 1,98517} \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\pi + \varphi_2);$$

welche Formel, mit den obigen Hilfsgleichungen, zur unmittelbaren Berechnung der Werthe von y benutzt werden kann.

§. 8.

Wir suchen jetzt das *Reibungsmoment* für einen Zapfen, dessen Oberfläche durch Umdrehung der Linie (14) entstanden ist. Damit die Darstellung in Uebereinstimmung mit den frühern Entwicklungen bleibe, schreibe man q statt k . Wenn man dann berücksichtigt, dass

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^4 - q^4)}}$$

ist, und für p seinen Werth in (9) setzt, so ergibt sich für das Reibungsmoment:

$$M = \frac{2\mu P}{r^2 - q^2} \int_q^r \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^4 - q^4)}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^4 - q^4)}} = \frac{1}{3} x \sqrt{(x^4 - q^4)} + \frac{1}{3} q^4 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - q^4)}};$$

wodurch jenes Integral auf das frühere elliptische Integral zurückgeführt ist.

Bemerkt man nun, dass $\varphi = 0$ sein muss, wenn $x = \varrho$ werden soll, und dass mit φ auch das elliptische Integral der ersten Art verschwindet, so ergibt sich, dass in dem Werthe von M der von der Grenze $x = \varrho$ herrührende Theil wegfällt. Damit aber x in die andere Grenze r übergehe, muss

$$\cos \varphi = \frac{\varrho}{r}$$

sein. Wenn man also denjenigen Werth von φ , welcher dieser Gleichung genügt, durch φ' bezeichnet, so wird

$$(15.) \quad M = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu P}{r^2 - \varrho^2} \left\{ r V(r^4 - \varrho^4) + \frac{\varrho^3}{V^2} F\left(\frac{1}{V^2}, \varphi'\right) \right\}.$$

Setzt man beispielsweise $\varrho = 1$, $r = 2$, so ist $F = 1,142429$, und demgemäss

$$M = \frac{2}{3} \mu P \cdot 2,85064.$$

Den angenommenen Werthen von ϱ und r entsprechen aber auf der erzeugenden Curve die Punkte

$$\begin{aligned} x = 1, \quad y = 0, \\ x = 2, \quad y = 0,8078, \end{aligned}$$

und die im vorhergehenden Paragraph enthaltene Entwicklung besagt, dass sich zwischen diesen beiden Punkten keine andere Linie construiren lasse, welche als Erzeugende eines Zapfenstücks, ein geringeres (oder grösseres) Reibungsmoment liefert, als das eben gefundene. Legt man z. B. eine gerade Linie durch jene beiden Punkte, so wird der entsprechende Zapfen *conisch*, und die Höhe des in Betracht kommenden Kegels ist $h = 2,08078$. Das entsprechende Reibungsmoment ist aber nach (§. 3, II):

$$\frac{2}{3} \mu P \cdot \frac{V(h^2 + r^2)}{r} \cdot \frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^2} = \frac{2}{3} \mu P \cdot 3,0503,$$

und daher in der That grösser als das oben gefundene; wodurch zugleich der Nachweis geliefert ist, dass der Ausdruck (15) nicht ein Maximum, sondern ein *Minimum* giebt.

Setzt man in (15) den kleinern Radius $\varrho = 0$, so geht jener Ausdruck in

$$M = \frac{2}{3} \mu P r$$

über; was mit (§. 3, I) übereinstimmt, da $\varrho = 0$ dem *eben* abgeschnittenen Zapfen angehört.

Man kann aber auch die Aufgabe stellen: ϱ in (15) so zu bestimmen, dass M ein *Minimum minimorum* wird. Um hier die Ableitung von M über ϱ zu bilden, ist zu bemerken, dass

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{1}{V(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi')} \cdot \frac{d\varphi'}{d\varrho}$$

ist; und da

$$\cos\varphi' = \frac{\varrho}{r}$$

ist, so geht der vorstehende Ausdruck in

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{V2}{r} \cdot V\left(\frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 + \varrho^2}\right)$$

über. Demgemäss wird

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\varrho} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu P}{r^2 - \varrho^2} \left\{ -\frac{2\varrho}{r^2 - \varrho^2} \left[r V(r^4 - \varrho^4) + \frac{\varrho^3}{V2} F\left(\frac{1}{V2}, \varphi'\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2r\varrho^3}{V(r^4 - \varrho^4)} + \frac{3\varrho^2}{V2} F\left(\frac{1}{V2}, \varphi'\right) + \frac{\varrho^3}{r} \cdot V\left(\frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 + \varrho^2}\right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \mu P \cdot \frac{\varrho}{(r^2 - \varrho^2)^2} \left\{ -\frac{2r^2 + \varrho^2}{r} \cdot V(r^4 - \varrho^4) + \frac{\varrho}{V2} (3r^2 - 5\varrho^2) F\left(\frac{1}{V2}, \varphi'\right) \right\} \end{aligned}$$

Diese Ableitung wird gleich 0, wenn ϱ verschwindet. Ob es reelle Werthe von ϱ gebe, welche den letzten Factor des vorstehenden Ausdrucks verschwinden machen, lässt sich nicht ermitteln.

Da $\varrho = 0$ dem *eben* abgeschnittenen Zapfen entspricht, so muss diese Zapfenform für stehende Wellen als diejenige angesehen werden, welche der Bewegung das *geringste Hinderniss* entgegensetzt.

Berlin, im Februar 1854.