

zu Minute noch die trigonometrischen Funktionen von 10 zu 10 Minuten, die Länge der Kreisbögen und Sehnen von Grad zu Grad, die Quadratzahlen der Zahlen bis 1000, sowie die Kubikzahlen, Quadrat- und Kubikwurzeln und natürliche Logarithmen der Zahlen von 1–100. Die Anordnung ist übersichtlich.

Arithmetik für die 6. Klasse der Gymnasien von J. Jacob. Wien, Deuticke, 1910.

Die Lehrbücher von Jacob sind durch Klarheit der Disposition, Beschränkung des Lehrstoffes und des Aufgabenmaterials auf das wesentlich Notwendige, durch sorgfältige Fassung der Lehrsätze und möglichste Reduktion ihrer Anzahl ausgezeichnet. Die arithmetische Aufgabe bildet hier zu meist einen speziellen Fall der allgemeinen Untersuchung eines bestimmten Funktionstypus, der durch graphische Darstellung hervorgehoben ist. An Besonderheiten in der Behandlung sei aus dem vorliegenden Bande des Lehrbuches folgendes hervorgehoben: Die komplexen Zahlen werden durch Zählung von Paaren ungleichartiger Objekte eingeführt, die Bedeutung von i wird erst durch die Multiplikationsvorschrift bestimmt. Die Differentialrechnung beginnt mit der Berechnung der Steigung einer Geraden und einer speziellen krummen Linie; es folgt die allgemeine Definition der ersten und zweiten Ableitung und ihre Anwendung zur Untersuchung der Steigverhältnisse verschiedener Funktionen. Für die Umkehrungsaufgabe der Differentiation wird die Eindeutigkeit bis auf eine Konstante durch den Hinweis darauf plausibel gemacht, daß zwei Kurven mit überall gleicher Steigung überall parallel, also in gleicher Höhendifferenz verlaufen müssen. Den Schluß bildet die Quadratur einer Fläche und der Zusammenhang ihres Wertes mit dem unbestimmten Integral. Der Beweis für diesen Zusammenhang ist allerdings weder streng noch klar; es wäre erst zu zeigen, daß die Vernachlässigungen trotz ihrer unendlichen Anzahl im Grenzübergang keine Differenz ergeben. Den auf die Infinitesimalrechnung vorbereitenden Abschnitt über Grenzwerte hält der Referent für didaktisch nicht sonderlich glücklich. Die Bedeutung des Grenzwertes dürfte nur dann klar werden, wenn man ihn zunächst für solche Stellen definiert, wo er einerseits nicht direkt als Funktionswert ersichtlich, anderseits aber doch für die Kenntnis der Funktion unentbehrlich erscheint, mithin eine Stelle im Endlichen, wo der definierende analytische Ausdruck, aber nicht die darzustellende Funktion unbestimmt wird.

Bei den im Buch an erster Stelle verwendeten Funktionen $\frac{1}{x}$ und a^x tritt ein solches Ergänzungsbedürfnis nirgends ein. F.

Geometrie der Ebene von J. Travniček, für die 4. Klasse der Gymnasien. **Planimetrie und Stereometrie** für die Mittelstufe der Realschulen von F. Schiffner. Wien, Deuticke, 1910 und 11.

Die Darstellung der Planimetrie ist in beiden Büchern (die demselben Unterrichtswerk angehören) größtenteils wörtlich dieselbe. An der Disposition ist folgendes hervorzuheben: Die Lage- und Größenbeziehungen an Strecken, Bogen, Winkeln und Vielecken werden so weit wie möglich ohne Zuhilfenahme der Dreieckskongruenz, zum Teil mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften behandelt; die Beziehungen: Kongruenz, Ähnlichkeit, Flächengleichheit sind somit an den Schluß verlegt. Von der euklidischen Grundlegung werden nur Reste

beibehalten; doch scheinen dem Referenten die gewählten Axiome nicht zweckmäßig zu sein. So ist der Grundsatz in dem Buch von Travniček: „Von einem bestimmten Punkt kann nach einer bestimmten Richtung nur eine Gerade gezogen werden“ viel zu unbestimmt, als daß man bei der Begründung des Parallelenatzes sich auf ihn berufen könnte. Bei Schiffner wird der Parallelenatz „aus der Erfahrung“ entnommen. Der Grundsatz: „zwei Bogen sind gleich, wenn sie aufeinandergelegt sich decken“ ist eine Tautologie. Bei der Definition der Flächengleichheit müßte außer der Deckbarkeit durch Zerlegung auch die durch Addition zugelassen werden. Als Vorzug des Buches seien die zahlreichen Hinweise auf Instrumente und Methoden zu praktischer Messung erwähnt. Einen Nachteil bildet nach Ansicht des Referenten die Tendenz, eingebürgerte Fremdwörter, wie Parallele, Centriwinkel, Parallelogramm usw. durch deutsche Beziehungen zu ersetzen.

F.

Essai de Géometrie Analytique Modulair à deux dimensions.
Par Gabriel Arnoux. Essais de Psychologie et de Métaphysique Positives. Paris, Gauthier-Villars, 1911. 6 fr.

Die etwas lang geratene Vorrede beginnt (ähnlich wie mehrere frühere Publikationen des Verfassers über verwandte Gegenstände) mit der Konstatierung, daß das Buch eigentlich auch von Laisant und Tarry mitverfaßt worden ist und einer weitläufigen Beschreibung des Vorgangs bei dieser gemeinsamen Arbeit.

Es handelt sich kurz gesagt um eine Geometrie der Gitterpunkte in der Ebene, wobei aber die Koordinaten nur nach einem (stets als ungerade Primzahl vorausgesetzten) Modul m genommen sind. Es gibt daher m^2 Punkte, $m+1$ Richtungen — nämlich die von $(0,0)$ nach $(1, \mu)$, wo $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ sein kann und nach $(0,1)$ — ebensoviele Winkel zwischen zwei Richtungen — jede Gerade hat m Punkte, unendlich ferne Elemente gibt es nicht, usw. Unter diesen Richtungen gibt es im Fall $m \equiv 1$ nach 4 zwei, die den isotropen (Minimal-) Richtungen der analytischen Geometrie entsprechen, nämlich, die von $(0,0)$ nach $(1, \pm i)$, wo $i^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ ist. Sie bilden (wie die isotropen Richtungen) mit allen anderen Richtungen denselben und mit sich selbst einen unbestimmten Winkel, jede von ihnen, erfüllt mit sich selbst kombiniert, die Orthogonalitätsbedingung, sie stehen daher, wie man auch sagen kann, auf sich selbst senkrecht. Dieser Umstand tritt hier in einer außerordentlich hübschen Weise in Erscheinung. Betrachtet man nämlich alle m auf einer solchen isotropen Geraden gelegenen Punkte, so bilden diese ein quadratisches Netz. Die reellen Richtungen (es sind ihrer $m-1$) im Sinne der gewöhnlichen Geometrie, die nach dem Modul m als voneinander und von der isotropen Richtung nicht verschieden anzusehen sind (man könnte sie geradezu kongruent nennen, doch wird diese Ausdrucksweise im Buch nicht gebraucht), lassen sich also in Paare von wirklich (d. h. im gewöhnlichen Sinne) orthogonalen zusammenfassen. (Dieses Resultat wird mit der Kunstweberei in Zusammenhang gebracht.) Im Falle $m \equiv 3$ nach 4 hingegen fällt alles dies aus sofort ersichtlichem Grunde weg. Die Abstände zweier Punkte sind teils „reell“, teils „imaginär“, je nachdem nämlich $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ Rest oder Nichtrest ist. Im Fall $m \equiv 1 \pmod{4}$ können auch verschiedene Punkte den Abstand Null haben, wenn nämlich ihre