2.

Kräfte im Raume.

(Von Herrn Geh. Hofr. und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

1.

Die Bewegung eines Kräftensystems lässt sich auf eine gerade fortgehende und auf eine drehende Bewegung oder Kraft zurückführen. Die erste erhält man durch das Parallelepipedum, dessen Kanten die Summen der Projectionen der Kräfte auf die Coordinaten-Axen sind. Sie ist bekanntlich für alle Puncte im Raume von gleicher Grösse und gleicher (paralleler) Richtung.

Ein anderes Parallelepipedum führt zur Grösse der drehenden Kraft, zur Ebene, in welcher diese drehende Kraft wirkt, und zur Richtung der Dreh-Axe, um welche die Drehung Statt findet. Es werden nämlich auf die Coordinaten-Ebenen xy, xz, yz die Drehmomente der Kräfte projicirt und, wenn der Anfangspunct der Coordinaten der Drehpunct ist, auf den Coordinaten z, y, x Theile z', y', x' nach Verhältniss der Summen N, M, L dieser Projectionen genommen. Diese Theile sind die Kanten des rechtwinklichten Parallelepipedums, dessen Diagonale nicht allein die Grösse des Drehmoments des ganzen Kräftensystems, sondern auch die Richtung der Dreh-Axe dieses Drehmoments angibt, dessen Kraft in der Ebene liegt, die senkrecht zu dieser Dreh-Axe ist und durch den Drehpunct geht.

Hier habe ich die Gegenstände bezeichnet: *Drehmoment*, *Dreh-Axe*, *Momenten-Ebene*, und die durch das Durchschueiden dieser Ebenen erzeugten *Gegenlinien*, welche ich einer neuen Untersuchung unterworfen habe, deren reichliche und wichtige Ergebnisse ich hier bekannt mache. — Herr Professor *Möbius* hat dieselben Gegenstände in der gegenwärtigen Zeitschrift im X. Bd. 1833, Seite 336. und in seiner Statik 1. Th. 1837 auf eine ihm ganz eigenthümliche Weise behandelt, und sich dadurch ein grosses Verdienst erworben. Mein Verfahren hat mit dem seinigen nichts gemein. Es ist nicht meine Absicht, Bekanntes zu geben; ich werde hievon so viel mittheilen, als nöthig ist, um Das, was mir angehört, verständlich zu machen, und jenen selbst neue Grundlagen geben. Der Stoff ist reich genug, dass Mehrere Antheil nehmen können. Ich werde es anzeigen, wenn ich mit ihm in den Resultaten zusammenkomme.

In Hinsicht der Drehmomente unterscheide ich (was bisher nicht geschehen ist) ein *vollständiges* von einem *unvollständigen* Drehmomente. Jenes ist die Summe der Projectionen der Drehmomente der einzelnen Kräfte auf die Ebene, welche ich oben Momenten-Ebene genannt habe; oder: wenn auf drei zu einander senkrechten Ebenen, deren Durchschnitt zum Drehpunct genommen wird, die Drehmomente der Kräfte projicirt werden und die Summen dieser Projectionen auf zwei dieser Ebenen $= 0$ sind, so ist das Drehmoment in der dritten Ebene ein *vollständiges*: verschwinden diese Summen aber nicht, so ist das Drehmoment in jeder dieser Ebenen ein *unvollständiges.* Zu dieser Unterscheidung bin ich geführt durch die Beobachtung, dass es viele Wahrheiten gibt, die für ersteres, aber nicht für letzteres gelten.

Um die Uebersicht zu erleichtern, habe ich den reichen Stoff unter folgende Ueberschriften gebracht: A. *Vollständiges Drehmoment,* und zwar *a.* Drehmoment, Momenten-Ebene und Dreh-Axe; *b.* Momenten-Ebenen in Verbindung, und *c.* Gegenlinien. B. *Unvollständiges Drehmoment,* und C. *Ein Kräftensystem durch zwei Kräfte ersetzt.*

A. *Vollständiges Drehmoment.*

a. *Drehmoment, Momenten-Ebene und Dreh-Axe.*

2.

Die Bezeichnung sei diejenige, welche gewöhnlich gebraucht wird; nämlich die Summen der Projectionen der Kräfte $P, P_1, \ldots$ auf die rechtwinklichten Coordinaten-Axen x, y, z seien

$$\Sigma X = A, \qquad \Sigma Y = B, \qquad \Sigma Z = C,$$

und die Summen der Projectionen der Drehmomente der Kräfte um den Anfangspunct (000) der Coordinaten auf die Coordinaten-Ebenen yz, xz, xy seien

$$\Sigma(yZ - zY) = L, \qquad \Sigma(zX - xZ) = M, \qquad \Sigma(xY - yX) = N.$$

Hiezu komme folgende Bezeichnung: Für den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ gehen L, M, N über in

$$\begin{aligned} L - y_0 C + z_0 B &= L_0, \\ M - z_0 A + x_0 C &= M_0, \\ N - x_0 B + y_0 A &= N_0. \end{aligned}$$

Aehnliches gilt von $L_1, M_1, N_1, L', M', N', \ldots$ für die Drehpuncte $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x'\, y'\, z')$, ...

Für die Drehpuncte (000), $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$, ... sollen die Drehmomente durch $R, R_0, R_1, \ldots$, die Momenten-Ebenen durch $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots$, die zugehörigen Dreh-Axen durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$, die diesen Drehpuncten zugehörigen gerade fortgehenden Kräfte durch $E, E_0, E_1, \ldots$ (welche sämmtlich gleich sind), vorgestellt werden, und zuletzt durch K die Summe der Producte

$$A.L + B.M + C.N = K.$$

3.

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können für einen bestimmten Drehpunct das vollständige Drehmoment, die Momenten-Ebene und die Dreh-Axe in wenigen Zeichen angegeben werden. Es ist nämlich für den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ das *vollständige Drehmoment*

$$1. \qquad R_0^2 = L_0^2 + M_0^2 + N_0^2;$$

die *Momenten-Ebene* $\mathfrak{M}_0$ ist

$$2. \qquad (x - x_0)L_0 + (y - y_0)M_0 + (z - z_0)N_0 = 0$$

und die *Dreh-Axe* $\mathfrak{A}_0$ ist

$$3. \qquad \frac{x - x_0}{L_0} = \frac{y - y_0}{M_0} = \frac{z - z_0}{N_0}.$$

4.

Die Grundwahrheit für einen grossen Theil der Untersuchung ist die Unveränderlichkeit der Summe der Producte, welche durch K vorgestellt ist. Es ist merkwürdig, dass, obgleich A, B, C mit der Richtung des Coordinatensystems, und L, M, N sowohl mit dem Drehpuncte als mit der Richtung des Coordinatensystems sich ändern, die Summe der Producte

$$A.L + B.M + C.N = K$$

keine Aenderung erleidet.

Dass K sich nicht mit dem Drehpuncte ändert, ist leicht zu beweisen; denn man hat nur in

$$A.L_0 + B.M_0 + C.N_0$$

die obigen Werthe für L_0, M_0, N_0 einzuführen. Dies gibt

$$A.L + B.M + C.N;$$

es ist also

$$K = K_0 = K_1 = \ldots.$$

Um aber zu beweisen, dass auch die Veränderung der Richtung der

Coordinaten-Axen keinen Einfluss auf K hat, werde angenommen, dass die neuen Coordinaten x', y', z' mit den alten Coordinaten Winkel bilden, deren Cosinusse folgende sind:

Mit	x	y	z
x'	α	β	γ
y'	α'	β'	γ'
z'	α''	β''	γ''.

Hiedurch geht nach Dem, was sich in meiner Untersuchung über die virtuelle Geschwindigkeiten *) findet,

$$\begin{array}{lll} A & \text{über in} & \alpha\Sigma X' + \alpha'\Sigma Y' + \alpha''\Sigma Z', \\ B & - \quad - & \beta\Sigma X' + \beta'\Sigma Y' + \beta''\Sigma Z', \\ C & - \quad - & \gamma\Sigma X' + \gamma'\Sigma Y' + \gamma''\Sigma Z', \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{lll} A.L & \text{über in} & (\alpha A' + \alpha' B' + \alpha'' C').L, \\ B.M & - \quad - & (\beta A' + \beta' B' + \beta'' C').M, \\ C.N & - \quad - & (\gamma A' + \gamma' B' + \gamma'' C').N, \end{array}$$

mithin $A.L + B.M + C.N$ über in

$$A'(\alpha L + \beta M + \gamma N) + B'(\alpha' L + \beta' M + \gamma' N) + C'(\alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N).$$

Es sind aber die Factoren von A', B', C' die Summen der Projectionen von L, M, N auf die Ebenen $y'z'$, auf $x'z'$ und auf $x'y'$: werden diese durch L', M', N' vorgestellt, so entsteht die Gleichung

$$4. \qquad A.L + B.M + C.N = A'.L' + B'.M' + C'.N',$$

d. h.: *Die Summe der Producte* AL, BM *und* CN *ist für dasselbe Kräftensystem sowohl von dem Drehpuncte als von der Richtung des Coordinatensystems unabhängig, und eine beständige Grösse.*

5.

Diese Eigenschaft der Summe K ist auch der Grund, warum ich von ihr beginne. Ich messe [dividire] sie durch das Product aus der gerade fortgehenden Kraft und aus dem vollständigen Drehmomente, nämlich durch $E_0 \,.\, R_0$; so dass

$$\frac{K}{E_0 \,.\, R_0} = \frac{A}{E_0} \cdot \frac{L_0}{R_0} + \frac{B}{E_0} \cdot \frac{M_0}{R_0} + \frac{C}{E_0} \cdot \frac{N_0}{R_0}.$$

Die ersten Factoren vorstehender Producte sind die Cosinusse der Winkel, welche E_0 oder die Diagonale des ersten Parallelepipedums —, und die zweiten

*) Perfecta solutio problematis. 4. 1843. Heidelbergae. pag. 13.

Factoren sind die Cosinusse der Winkel, welche $\mathfrak{A}_0$, die Diagonale des zweiten Parallelepipedums, mit den Coordinaten-Axen bildet. Das, was zur Rechten des Gleichheitszeichens steht, ist also der Cosinus des Winkels, den die beiden Diagonalen oder die gerade fortgehende Kraft und die Dreh-Axe bilden; also ist

$$\frac{K}{E_0 \,.\, R_0} = \cos(\mathfrak{A}_0 E_0),$$

oder

$$5. \qquad A.L + B.M + C.N = K = E_0 \,.\, R_0 \,.\, \cos(\mathfrak{A}_0 E_0).$$

Diese Gleichung kann auf verschiedene Weise gedeutet werden. Zuerst kann

$$E_0 \,.\, \cos(\mathfrak{A}_0 E_0)$$

betrachtet werden als die Projection der gerade fortgehenden Kraft E_0 oder als die Projection aller Kräfte P, P_1, ... auf die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$. Wird die Summe dieser Projectionen durch

$$\Sigma P_a$$

vorgestellt, so ergibt sich bei dieser Betrachtungsweise aus vorstehender Gleichung folgender Satz:

$$6. \qquad A.L + B.M + C.N = K = R_0 \,.\, \Sigma P_a;$$

d. h.: *Das Product aus dem vollständigen Drehmomente eines Puncts und aus der Projection aller Kräfte auf die Richtung der Dreh-Axe dieses Drehmoments ist eine beständige Grösse und gleich der Summe der Producte* AL, BM *und* CN.

Dieser Satz kann benutzt werden, um durch ein einfaches Verfahren das vollständige Drehmoment einer Linie als Dreh-Axe zu finden. Man projicire die sämmtlichen Kräfte auf diese Linie, und suche R_0 durch die Gleichung

$$R_0 = \frac{K}{EP_a}.$$

Dieses Verfahren setzt aber voraus, es sei schon bekannt, dass die Linie die Eigenschaft einer Dreh-Axe hat; denn nicht alle Linien (wie ich später zeigen werde) können Dreh-Axen sein. Wer dieses nicht beachten wollte, würde zu grossen Irrthümern gelangen.

Die obige Gleichung (5.) gibt auch zu folgender Betrachtung Anlass. In ihr sind K und E_0 unveränderliche Grössen; also ist auch das Product

$$R_0 \,.\, \cos(\mathfrak{A}_0 E_0)$$

eine beständige Grösse und, obgleich seine Factoren von dem Drehpuncte abhangen, von diesem Drehpuncte unabhängig. Ich nehme eine Ebene an, welche senkrecht zu der gerade fortgehenden Kraft oder senkrecht zu allen $E, E_0, E_1 \ldots$ ist, und nenne sie *Normal-Ebene*. Im allgemeinen ist es gleichgültig, durch welchen Drehpunct diese Ebene geht.

Da nun das vorstehende Product die Projection des Drehmoments R_0 auf eine Normal-Ebene ist, so ist durch diese Betrachtungsweise folgender Satz erlangt:

7. *Die Projectionen aller vollständigen Drehmomente auf eine Normal-Ebene sind gleich, und jede Projection ist* $= \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{E}}$.

6.

Der Winkel, welchen die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ des vollständigen Drehmoments R_0 mit der gerade fortgehenden Kraft E_0 bildet, kann von 0^0 bis 90^0 wachsen, also der Cosinus von 1 bis 0 abnehmen, mithin der Factor R_0 von seinem kleinsten Werthe bis ins Unendliche wachsen. Dieses führt zu der Frage: *Für welche Drehpuncte findet das* k l e i n s t e *vollständige Drehmoment Statt?*

Die Drehpuncte für das kleinste vollständige Drehmoment, und dieses Drehmoment selbst, werden durch die Gleichung

$$K_0 = E_0 \,.\, R_0,$$

oder durch

$$(AL_0 + BM_0 + CN_0)^2 = (A^2 + B^2 + C^2)\,(L_0^2 + M_0^2 + N_0^2).$$

bestimmt. Diese nimmt auch folgende Gestalt an:

$$(AM_0 - BL_0)^2 + (AN_0 - CL_0)^2 + (BN_0 - CM_0)^2 = 0$$

und gibt zu erkennen, dass

$$AM_0 - BL_0 = AN_0 - CL_0 = BN_0 - CM_0 = 0,$$

oder dass

$$\begin{aligned} AM - BL + ACx_0 + BCy_0 - (A^2 + B^2)\,z_0 &= 0,\\ CL - AN + ABx_0 - (A^2 + C^2)\,y_0 + BCz_0 &= 0,\\ BN - CM - (B^2 + C^2)\,x_0 + ABy_0 + ACz_0 &= 0 \end{aligned}$$

ist; woraus sich folgende Gleichungen ergeben:

$$8. \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{AK}{E^2} + L - Cy + Bz &= 0,\\ -\frac{BK}{E^2} + M - Az + Cx &= 0,\\ -\frac{CK}{E^2} + N - Bx + Ay &= 0. \end{aligned} \right.$$

Die Drehpuncte, für welche das kleinste vollständige Drehmoment Statt findet, liegen also in einer geraden Linie. Ferner geht aus diesen Gleichungen, welche auch schon bei Andern vorkommen, hervor, dass diese Linie die Richtung der gerade fortgehenden Kraft hat. Ferner gehen die Gleichungen der Dreh-Axe

$$\frac{x-x_0}{L_0} = \frac{y-y_0}{M_0} = \frac{z-z_0}{N_0}$$

für einen Punct ($x_0\, y_0\, z_0$) in dieser Linie der kleinsten Drehmomente mittels der eben gefundenen Gleichungen, weil x_0, y_0, z_0 ihnen genügen müssen, in folgende über:

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$$

Die Dreh-Axe hat also die Richtung der gerade fortgehenden Kraft und fällt mit dieser Linie der kleinsten vollständigen Drehmomente zusammen. Daher:

9. *Die Linie der kleinsten vollständigen Drehmomente, auch Hauptdrehlinie genannt, ist die Dreh-Axe aller Drehpuncte, welche in ihr angenommen werden. Die Momenten-Ebenen dieser Drehpuncte sind zu ihr senkrecht und das vollständige Drehmoment jedes Drehpuncts in ihr ist*

$$R_k = \frac{K}{E} = \frac{AL+BM+CN}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und gleich der Projection jedes vollständigen Drehmoments irgend eines Drehpuncts im Raume auf die Normal-Ebene.

Hieraus folgt umgekehrt, dass

10. $$K = E \,.\, R_k;$$

d. h.: *Die Summe der Producte* AL, BM *und* CN *ist gleich dem Producte aus der gerade fortgehenden Kraft und aus dem kleinsten vollständigen Drehmomente.*

7.

Das vollständige Drehmoment jedes Puncts ausserhalb der Hauptdrehlinie ist grösser, als das eben gefundene Drehmoment R_k; es hangt von der Entfernung seines Drehpuncts von dieser Hauptdrehlinie ab, und seine Grösse kann durch das kleinste vollständige Drehmoment R_k und durch die Entfernung seines Drehpuncts von der Hauptdrehlinie angegeben werden. Denn fället man aus dem Drehpuncte ($x_0\, y_0\, z_0$) auf die Hauptdrehlinie eine senkrechte Linie h, so findet sich für ihre Grösse durch geeignete Rechnungen die Gleichung

$$h^2 = \frac{R_0^2 . E^2 - K^2}{E^4},$$

und folglich, mit Berücksichtigung von (10.), die Gleichung

$$11. \qquad R_0^2 = R_k^2 + h^2 . E^2 \qquad \text{oder} \qquad R_0^2 - R_k^2 = h^2 . E^2 ;$$

d. h.: *Die Zunahmen der zweiten Potenzen der vollständigen Drehmomente wachsen nach Verhältniss der zweiten Potenzen der Entfernungen ihrer Drehpuncte von der Hauptdrehlinie.*

Bei Kräften im Raume gilt also im Allgemeinen nicht das Verhältniss der Drehmomente, welches bei Kräften in der Ebene gilt. Nur dann, wenn eine Mittelkraft Statt findet, oder wenn $R_k = 0$ ist, findet unter den vollständigen Drehmomenten bei Kräften im Raume dasselbe Verhältniss Statt, wie bei Kräften in der Ebene. — Dass die Drehmomente mit der Entfernung der Drehpuncte von der Hauptdrehlinie wachsen, war schon bekannt; aber nicht, nach welchem Verhältnisse.

Aus dem so eben gefundenen Satze folgt, dass Drehpuncte, welche von der Hauptdrehlinie gleich weit abstehen, gleiche vollständige Drehmomente haben.

Nachdem das Verhältniss der vollständigen Drehmomente in Hinsicht ihrer Grösse gefunden, ist noch übrig, dasjenige in Hinsicht ihrer Richtung zu suchen.

Bei den Drehpuncten in der Hauptdrehlinie fallen die Dreh-Axen mit dieser Hauptdrehlinie zusammen, und ihre Momenten-Ebenen sind senkrecht zu derselben. Wenn nun der Drehpunct die Hauptdrehlinie verlässt, so wird das vollständige Drehmoment grösser; zugleich neigt sich die Dreh-Axe und weicht von der Hauptdrehlinie immer mehr ab*). Man sieht dieses aus der oben gefundenen Gleichung

$$\cos(\mathfrak{A}_0 E_0) = \frac{K}{E . R_0},$$

oder noch besser, wenn man den Cosinus in die Tangente umsetzt, nämlich aus

$$12. \qquad \operatorname{tg}(\mathfrak{A}_0 E_0) = h . \frac{E^2}{K} = h . \frac{A^2 + B^2 + C^2}{AL + BM + CN}.$$

Die Tangente dieses Winkels wächst also im Verhältniss der Entfernung des Drehpuncts von der Hauptdrehlinie. Die Dreh-Axe für unendlich entfernte Drehpuncte wird zu einer Senkrechten auf die Hauptdrehlinie, und die Momenten-Ebene geht durch dieselbe.

---

*) Herr Professor *Möbius* gelangt S. 141, 1. Thl. durch andere Betrachtungen zu demselben Satze.

8.

Ausser der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$, welche durch die Gleichung (2.) angegeben wird, kommen hier noch folgende Ebenen in Betracht:

Erstens: die Ebene, welche ich Normal-Ebene nannte; und zwar diejenige, welche durch den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht; ihre Gleichung ist, weil sie zu B_0 senkrecht ist, folgende:

$$13. \quad (x-x_0)A+(y-y_0)B+(z-z_0)C=0.$$

Zweitens: die Ebene, welche durch die Hauptdrehlinie und durch den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht; ihre Gleichung ist

$$14. \quad (x-x_0)(E^2L_0-AK)+(y-y_0)(E^2M_0-BK)+(z-z_0)(E^2N_0-CK)=0, \text{ und}$$

Drittens: die Ebene, welche durch die Dreh-Axe und durch die gerade fortgehende Kraft E_0 geht; ihre Gleichung ist

$$15. \quad (x-x_0)(CM_0-BN)+(y-y_0)(AN_0-CL_0)+(z-z_0)(BL_0-AM_0)=0.$$

Die drei Ebenen (2., 13. und 14.) durchschneiden sich in einer Linie, welche senkrecht zur Hauptdrehlinie ist; denn die Gleichungen dieses Durchschnitts sind

$$16. \quad \frac{x-x_0}{C.M_0-B.N_0}=\frac{y-y_0}{A.N_0-C.L_0}=\frac{z-z_0}{B.L_0-A.M_0}.$$

Die Ebene $\mathfrak{A}_0 E_0$ (15.) durchdringt die Momenten-Ebene $\mathfrak{M}.2$ in einer Linie, deren Gleichungen

$$17. \quad \frac{x-x_0}{A.R_0^2-L_0.K}=\frac{y-y_0}{B.R_0^2-M_0.K}=\frac{z-z_0}{C.R_0^2-N_0.K}$$

sind, und die Normal-Ebene N 13 in einer Linie, deren Gleichungen

$$18. \quad \frac{x-x_0}{E^2.L_0-A.K}=\frac{y-y_0}{E^2.M_0-B.K}=\frac{z-z_0}{E^2.N_0-C.K}.$$

sind. Aus den Gleichungen (15. und 16.) geht hervor, dass die Ebene $\mathfrak{A}_0 E_0$ zu der Linie, welche vom Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$ auf die Hauptdrehlinie senkrecht gefället wird, senkrecht ist. Daher:

19. *Die Momenten-Ebene, die Normal-Ebene eines Drehpuncts, und die Ebene, welche durch diesen Drehpunct und durch die Hauptdrehlinie geht: diese drei Ebenen durchschneiden sich in einer Linie, welche zur Hauptdrehlinie senkrecht ist; und zu dieser Durchschnittslinie ist die Ebene senkrecht, welche durch die gerade fortgehende Kraft* E_0 *und durch die Dreh-Axe* $\mathfrak{A}_0$ *geht.*

9.

Die Drehpuncte in der Richtung einer gerade fortgehenden Kraft haben gleiche Drehmomente, denn sie stehen von der Hauptdrehlinie gleich weit ab. Die Momenten-Ebenen dieser Drehpuncte gehen durch die Linien, welche von diesen Puncten senkrecht auf die Hauptdrehlinie gefället werden und unter sich parallel sind. Auch bilden diese Momenten-Ebenen mit der Hauptdrehlinie gleiche Winkel. Hieraus folgt, dass die Momenten-Ebenen dieser Drehpuncte parallel sind, und dass auch ihre Dreh-Axen in einer und derselben Ebene liegen und parallel sind*). Dieser Satz lässt sich auch unabhängig von obiger Betrachtungsweise begründen. Ist nämlich $(x'y'z')$ ein Punct der Linie E_0, so ist

$$\frac{x'-x_0}{A} = \frac{y'-y_0}{B} = \frac{z'-z_0}{C},$$

also

$$y' = \frac{B(x'-x_0)+Ay_0}{A}, \qquad z' = \frac{C(x'-x_0)+Az_0}{A},$$

mithin

$$L' = L - y'C + z'B = L - y_0C + z_0B = L_0,$$

und eben so ist auch

$$M' = M_0 \qquad \text{und} \qquad N' = N_0.$$

Es können also L', M', N' mit L_0, M_0, N_0 verwechselt werden. Die Gleichungen des vollständigen Drehmoments R', der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}'$ und der Dreh-Axe $\mathfrak{A}'$, nämlich

$$R'^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2,$$
$$(x-x')L' + (y-y')M' + (z-z')N' = 0,$$
$$\frac{x-x'}{L'} = \frac{y-y'}{M'} = \frac{z-z'}{N'},$$

gehen durch diese Verwechselung in folgende über:

$$R'^2 = L_0^2 + M_0^2 + N_0^2 = R_0^2,$$
$$(x-x')L_0 + (y-y_1)M_0 + (z-z')N_0 = 0,$$
$$\frac{x-x'}{L_0} = \frac{y-y'}{M_0} = \frac{z-z'}{N_0};$$

aus welchen folgt, dass die Drehmomente der Puncte in der Linie E_0 gleich, die Momenten-Ebenen parallel und auch ihre Dreh-Axen parallel sind, und also in einer Ebene $(\mathfrak{A}_0 E_0)$ liegen.

10.

Es ist noch übrig, auszumitteln, ob nur die Momenten-Ebenen von Puncten in der Richtung einer gerade fortgehenden Kraft die oben gefundene Eigenschaft, nämlich die der Parallelität besitzen, oder ob noch andere Momen-

*) *Möbius* Statik. 1. Th. S. 154.

ten-Ebenen parallel sein können. Zu diesem Zwecke nehme man irgend zwei Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$, zu welchen die Momenten-Ebenen

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0,$$
$$(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0$$

gehören. Sollen diese parallel sein, so müssen folgende Gleichungen zugleich Statt finden:

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{M_0}{M_1} = \frac{N_0}{N_1}.$$

Wird nun zur Abkürzung

$$L(x_1-x_0) + M(y_1-y_0) + N(z_1-z_0)$$
$$+ A(y_0 z_1 - y_1 z_0) + B(z_0 x_1 - z_1 x_0) + C(x_0 y_1 - x_1 y_0) = f$$

gesetzt, so kann diesen Bedingungsgleichungen folgende Gestalt gegeben werden:

$$C.f - (z'-z_0)K = -B.f + (y'-y_0)K = A.f - (x'-x_0)K = 0,$$

und hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{x'-x_0}{A} = \frac{y'-y_0}{B} = \frac{z'-z_0}{C}.$$

Da nun diese Gleichungen der Linie E_0 angehören, so ist durch sie folgender Satz gewonnen:

20. *Nur die Momenten-Ebenen von Drehpuncten in der Richtung einer geraden fortgehenden Kraft können parallel sein.*

11.

Aus allem Diesen geht Folgendes hervor:

Die Drehpuncte, die in dem Mantel einer Walze liegen, deren Durchschnitt ein Kreis und deren Axe die Hauptdrehlinie ist, haben gleiche Drehmomente*); ihre Momenten-Ebenen bilden gleiche Winkel mit der Hauptdrehlinie; die Momenten-Ebenen derjenigen Puncte, welche in einem Umringe liegen, berühren einen Doppelkegel, dessen Spitze und Axe in der Hauptdrehlinie liegen; und in der Ebene, welche den Mantel berührt, liegen alle parallele Dreh-Axen der Drehpuncte, die in der Berührungslinie dieses Mantels sich befinden.

12.

Die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ berührt den Mantel in dem Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$; jede zwei Puncte dieser Dreh-Axe, die auf beiden Seiten dieses Drehpuncts

*) *Möbius*, Seite 141. N. 1.

liegen und gleich weit von ihm abstehen, sind auch gleich weit von der Hauptdrehlinie entfernt, haben also gleiche Drehmomente, die aber grösser sind, als das Drehmoment des Berührungspuncts ($x_0\, y_0\, z_0$); denn ihre Drehpuncte stehen von der Hauptdrehlinie weiter ab als ($x_0\, y_0\, z_0$). Daher:

21. *Zu jedem Drehpuncte gehört eine bestimmte Dreh-Axe und ein bestimmtes vollständiges Drehmoment; jeder andere Punct der Dreh-Axe hat ein grösseres vollständiges Drehmoment, und dieses ist desto grösser, je weiter sein Drehpnnct von dem Berührungspuncte* ($x_0 y_0 z_0$) *absteht.*

Da hier kein freies Drehmoment ist, und verschiedenen Drehpuncten verschiedene Momenten-Ebenen und verschiedene Dreh-Axen angehören, so muss, wenn die Momenten-Ebene oder die Dreh-Axe gegeben ist, auch der zugehörige Drehpunct gefunden werden können.

Das vollständige Drehmoment bestimmt nicht den Drehpunct, sondern nur den Mantel der Walze, in welchem der Drehpunct liegt. Dieses folgt sowohl aus dem Obigen, als aus der Gleichung für das vollständige Drehmoment

$$R_0^2 = (L - y_0 C + z_0 B)^2 + (M - z_0 A + x_0 C)^2 + (L - x_0 B + y_0 A)^2,$$

welche die Gleichung einer Walze mit kreisförmigem Durchschnitte ist.

Die erste hier zu lösende Aufgabe ist: *den Drehpunct der Ebene*

$$ax + by + cz = d$$

suchen.

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung der Momenten-Ebene

$$(x - x_0) L_0 + (y - y_0) M_0 + (z - z_0) N_0 = 0,$$

oder mit

$$x L_0 + y M_0 + z N_0 = x_0 L + y_0 M + z_0 N,$$

so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten des Drehpuncts die Gleichungen

$$\frac{L_0}{a} = \frac{M_0}{b} = \frac{N_0}{c} = \frac{x_0 L + y_0 M + z_0 N}{d},$$

und aus diesen Gleichungen folgende Werthe:

$$22. \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{dA - cM + bM}{aA + bB + cC}, \\ y_0 &= \frac{dB - aN + cL}{aA + bB + cC}, \\ z_0 &= \frac{dC - bL + aM}{aA + bB + cC}. \end{aligned} \right.$$

Man kann selbst die Grösse des vollständigen Drehmoments R_0, welches der gegebenen Ebene angehört, aus den Elementen der gegebenen Gleichung berechnen. Man findet, wenn man die gefundenen Werthe von x_0, y_0, z_0 in die Gleichung für R_0 einführt:

$$23. \qquad R_0 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{aA+bB+cC} \cdot K.$$

Es ist nicht unwichtig, hievon Anwendung auf die Coordinaten-Ebenen zu machen und den Drehpunct jeder dieser Ebenen aufzusuchen. Die Gleichung der Ebene xy ist

$$z = 0;$$

mithin ist $a = b = d = 0$, und die Coordinaten des Drehpuncts dieser Ebene sind

$$x_0 = -\frac{M}{C}, \qquad y_0 = +\frac{L}{C}, \qquad z_0 = 0.$$

Eben so ergeben sich für den Drehpunct der Ebene xz die Coordinaten

$$x_0 = +\frac{N}{B}, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = -\frac{L}{B},$$

und für den Drehpunct der Ebene yz die Coordinaten

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = -\frac{N}{A}, \qquad z_0 = +\frac{M}{A}.$$

Merkwürdig ist, dass in allen diesen drei Fällen der Gleichung

$$xL + yM + zN = 0$$

durch die drei Werthe x_0, y_0, z_0 Genüge geschieht. Da nun dieselbe die Gleichung der Ebene des Drehmoments ist, wenn der Anfangspunct der Coordinaten zum Drehpunct angenommen wird, so haben die vier Drehpuncte folgende Eigenschaft:

24. *Die drei Drehpuncte der drei rechtwinklichten Coordinaten-Ebenen und ihr Durchschnittspunct liegen in einer Ebenc, und der Durchschnittspunct oder der Anfangspunct der Coordinaten ist der Drehpunct dieser Ebene* *).

Die vollständigen Drehmomente dieser drei Ebenen xy, xz, yz, durch R_{xy}, R_{xz}, R_{yz} bezeichnet, sind nach N. 23.:

$$25. \qquad R_{xy} = \frac{K}{C}, \qquad R_{xz} = \frac{K}{B}, \qquad R_{yz} = \frac{K}{A}.$$

Die vollständigen Drehmomente für die Coordinaten-Ebenen sind nicht N, M, L: diese sind nur die Projectionen des vollständigen Drehmoments, welches dem Anfangspuncte der Coordinaten als Drehpunct angehört.

*) *Möbius*, S. 154.

13.

Ich gehe jetzt zur zweiten, wichtigeren Aufgabe über, nämlich: *den Drehpunct einer Linie suchen.*

Die Gleichungen der Linie seien

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1.$$

Dieselben, verbunden mit den Gleichungen der Dreh-Axe, führen zu den vier Gleichungen

$$a \cdot L_0 = M_0, \qquad a_1 L_0 = N_0, \qquad y_0 = ax_0 + b, \qquad z_0 = a_1 x_0 + b_1,$$

zwischen den drei Grössen x_0, y_0, z_0, und diese nicht allein zu den Werthen dieser Grössen oder der Coordinaten des zu bestimmenden Drehpuncts, sondern auch zu einer Bedingungsgleichung. Wird nämlich zur Abkürzung

$$26. \qquad 1 + a^2 + a_1^2 = p, \qquad A + aB + a_1 C = q,$$
$$L - bC + b_1 B = l, \qquad M - Ab_1 = m, \qquad N + Ab = n$$

gesetzt, so sind die Coordinaten des Drehpuncts:

$$27. \qquad x_0 = \frac{al - m}{pC - a_1 q} \qquad \text{oder} \qquad = \frac{a_1 l - n}{-pB + aq},$$
$$y_0 = ax_0 + b, \qquad z_0 = a_1 x_0 + b_1$$

und die Bedingungsgleichung, welche von a, b, a_1, b_1 befriedigt werden muss, wenn die gegebene Linie einen Drehpunct haben oder die Linie einer Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments sein soll, ist

$$28. \qquad (a_1 l - n)(pC - a_1 q)(al - m)(pB - aq) = 0.$$

Um die Anwendung dieser wichtigen Bedingungsgleichung zu erleichtern, gebe ich ihr folgende Gestalt:

$$29. \qquad q \cdot h - p \cdot K = 0,$$

wo

$$30. \qquad h = L - bC + b_1 B + a(M - b_1 A) + a_1(N + bA)$$
$$= l + a \cdot m + a_1 \cdot n.$$

ist. Es ist gut, hier anzumerken, dass

$$31. \qquad A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = K$$

ist. Hieraus geht hervor, dass man nicht nach Willkür Dreh-Axen annehmen kann; denn für jeden Punct gibt es zwar eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments, aber nicht umgekehrt für jede Linie einen Drehpunct; oder nicht jede Linie kann eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments sein.

Führt man diese Werthe (27.) von x_0, y_0, z_0 in die Gleichung für das Drehmoment R_0 ein, so erhält man zuerst

$$L_0 = L - bC + b_1 B + (-aC + a_1 B) x_0 = \frac{Ch - a_1 K}{Cp - a_1 q},$$
$$M_0 = M - b_1 A + (C - a_1 A) x_0 = \frac{a(Ch - a_1 K)}{Cp - a_1 q},$$
$$N_0 = N + bA + (-B + aA) x_0 = \frac{K - Ah + a(aK - Bh)}{Cp - a_1 q},$$

und zuletzt das Drehmoment

$$32. \qquad R_0^2 = \frac{(1+a^2)(Ch - a_1 K)^2 + (Ah - K + a(Bh - aK))^2}{(Cp - a_1 q)^2};$$

wobei noch die Bedingungsgleichung

$$q \,.\, h - p \,.\, K = 0$$

zu berücksichtigen ist.

Die Gleichungen (29., 27. und 32.) geben die Eigenschaft an, welche eine Linie haben muss, wenn sie eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments sein soll; ferner, wenn diese Eigenschaft vorhanden ist, wie ihr Drehpunct gefunden, und zuletzt, wie das Drehmoment selbst aus den Elementen der Gleichungen der Linie berechnet wird.

Bedenkt man, dass in einer Ebene, welche den Mantel einer Walze berührt, nur die Linien nach einer bestimmten Richtung Dreh-Axen sein können, alle übrigen Linien in dieser Ebene nicht, so kommt man bald zu der Ueberzeugung, dass die Anzahl der Linien, welche zu Dreh-Axen eines vollständigen Drehmoments genommen werden können, im Verhältniss zu jenen, welche zu beseitigen sind, sehr klein ist.

Zur Berechnung der Grösse des vollständigen Drehmoments einer Linie, als Dreh-Axe betrachtet, habe ich in (5. und 32.) zwei verschiedene Verfahrungs-Arten angegeben. Beide setzen aber voraus, dass man sich entweder durch die Bedingungsgleichung (28. oder 29.) von der Zuverlässigkeit der Linie als Dreh-Axe versichert hat, oder dass dieses durch andere Betrachtungen schon ausgemittelt sei.

Um einige Anwendungen hievon zu machen, soll untersucht werden, wann die Coordinaten-Axen Dreh-Axen eines vollständigen Drehmoments, und wo ihre Drehpuncte sind.

Die Gleichungen für die Coordinaten-Axe x sind

$$y = 0, \qquad z = 0;$$

also ist $a = a_1 = b = b_1 = 0$. Die Coordinaten-Axe x ist also nur dann eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments, wenn

$$B \,.\, M + C \,.\, N = 0$$

ist, und wenn diese Bedingung erfüllt wird, so sind die Coordinaten des Drehpuncts

$$x_0 = \frac{N}{B} = -\frac{M}{C}, \quad y_0 = 0 \quad \text{und} \quad z_0 = 0.$$

Das vollständige Drehmoment dieses Drehpuncts ist nach (32.)

$$R_0 = L.$$

Auf gleiche Weise findet man in (29.), $\frac{1}{a} = b_1 = 0$, also, dass die Coordinaten-Axe y nur dann eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments ist, wenn

$$A.L + C.N = 0.$$

ist. Das Gleiche gilt von z (in (29.), $\frac{1}{a_1} = b = 0$), wenn

$$A.L + B.M = 0.$$

ist. Also:

33. *Drei zu einander senkrechte und in einem Puncte sich durchschneidende Linien können nicht zugleich Dreh-Axen vollständiger Drehmomente sein; und nur zwei derselben, z. B.* x *und* y, *können Dreh-Axen sein, wenn*

$$\mathrm{A.L} = -\mathrm{B.M} = -\mathrm{C.N} \quad \textit{ist.}$$

14.

Vermittelst der oben (29.) gefundenen Bedingungsgleichung kann jetzt auch bewiesen werden, dass die Linien, welche in einer Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegen und durch den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ gehen, keine Dreh-Axen vollständiger Drehmomente sein können. Der Beweis ist folgender.

Wird zur Vereinfachung der Rechnung der Anfangspunct der Coordinaten zum Drehpuncte angenommen, so sind die Gleichungen für eine dieser Linien

$$y = ax, \qquad z = a_1 x.$$

Da diese Linie in der Momenten-Ebene

$$xL + yM + zN = 0$$

liegt, so müssen die Vorzahlen a, a_1 der Gleichung

$$L + aM + a_1 N = 0$$

genügen. Zugleich müssen a, a_1 die Bedingungsgleichung (28.) befriedigen. Beide Gleichungen vereint führen zu

$$1 + a^2 + a_1^2 = 0;$$

was nicht möglich ist. Daher:

34. *Die Linien, welche in einer Momenten-Ebene liegen und durch*

den Drehpunct derselben gehen, können keine Dreh-Axen von vollständigen Drehmomenten sein. *)

15.

Wenn das vollständige Drehmoment einer Ebene auf eine andere Ebene projicirt wird, so kann im allgemeinen diese Projection dem vollständigen Drehmomente, welches dieser zweiten Ebene angehört, nicht gleich sein. Es ist nothwendig, diese wichtige und wohl zu beachtende Wahrheit zu beweisen.

Sind R_0, R' die vollständigen Drehmomente der Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x'\, y'\, z')$ und

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0,$$
$$(x-x')L' + (y-y')M' + (z-z')N' = 0$$

die Gleichungen ihrer Momenten-Ebenen $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'$, so ist der Cosinus des Winkels, den diese beiden Ebenen bilden,

$$\cos(\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}') = \frac{L_0.L'+M_0.M'+N_0.N'}{R_0.R'},$$

mithin die Projection des Drehmoments R' auf die Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$:

$$35. \qquad R'.\cos(\mathfrak{M}_0\mathfrak{M}') = \frac{L_0.L'+M_0.M'+N_0.N'}{R_0}.$$

Dieser Bruch ist im allgemeinen nicht gleich dem Drehmomente R_0. Die Fälle, in welchen diese Gleichheit Statt findet, ergeben sich aus der Gleichung

$$L_0.L' + M_0.M' + N_0.N' = R_0^2.$$

Damit Das, was gesucht wird, sich bald offenbare, gebe ich den L', M', N' folgende Gestalt:

$$L' = L_0-(y'-y_0)C + (z'-z_0)B,$$
$$M' = M_0-(z'-z_0)A + (x'-x_0)C,$$
$$N' = N_0-(x'-x_0)B + (y'-y_0)A,$$

und vervielfache (multiplicire) sie mit L_0, M_0, N_0. Die Endgleichung ist

$$(x-x_0)(BN_0-CM_0) + (y'-y_0)(CL_0-AN_0) + (z'-z_0)(AM_0-BL_0) = 0.$$

Diese Gleichung gibt, wenn x', y', z', für welche hier x, y, z gesetzt sind, als laufende Coordinaten betrachtet werden, eine Ebene an, die so beschaffen ist, dass, wenn ein Punct $(x'\, y'\, z')$ derselben als Drehpunct angenommen wird, die Projection seines vollständigen Drehmoments auf die Ebene $\mathfrak{M}_0$ dem vollstän-

*) Herr Prof. *Möbius* nennt Seite 143. die Ebene, welche ich *Momenten-Ebene* nenne, *Null-Ebene*, weil das Drehmoment der Linien, welche in der Ebene liegen und durch den Drehpunct gehen, $= 0$ ist; er nennt den Drehpunct *Nullpunct*. Allein der Name ist von dem Besitze und nicht von dem Nichtbesitze herzunehmen.

digen Drehmomente R_0 dieser Ebene gleich ist. Diese Ebene ist nach No. 15. die Ebene $\mathfrak{A}_0 E_0$. Daher:

36. *Die Projection eines vollständigen Drehmoments* R' *auf die Ebene* $\mathfrak{M}_0$ *ist im allgemeinen nicht dem vollständigen Drehmomente* R_0 *dieser Ebene gleich, sondern nur dann, wenn der Drehpunct* (x' y' z') *jenes Drehmoments* R' *in der Ebene liegt, welche den Mantel der Walze, deren Axe die Hauptdrehlinie ist, im Puncte* $(x_0\, y_0\, z_0)$, *oder in der Linie* E_0 *berührt.*

b. *Momenten-Ebenen in Verbindung.*

16.

Die Gleichung der Momenten-Ebene für den Drehpunct $(x_0 y_0 z_0)$ ist

$$(x-x_0)L_0+(y-y_0)M_0+(z-z_0)N_0=0.$$

Ist $(x_1 y_1 z_1)$ ein Punct in dieser Ebene, so ist

$$(x_1-x_0)L_0+(y_1-y_0)M_0+(z_1-z_0)N_0=0,$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} L_0 &= L_1-(y_0-y_1)C+(z_0-z_1)B, \\ M_0 &= M_1-(z_0-z_1)A+(x_0-x_1)C, \\ N_0 &= N_1-(x_0-x_1)B+(y_0-y_1)A \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$\alpha.\qquad (x_0-x_1)L_1+(y_0-y_1)M_1+(z_0-z_1)N_1=0.$$

Werden nun x_0, y_0, z_0 als laufende Coordinaten angenommen, so erhält man die Gleichung einer Ebene

$$37.\qquad (x-x_1)L_1+(y-y_1)M_1+(z-z_1)N_1=0,$$

in welcher der Punct $(x_1\, y_1\, z_1)$ liegt, und welche durch den Punct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht. Da nun diese Gleichung die Gleichung der Momenten-Ebene des Drehpuncts $(x_1 y_1 z_1)$ ist, so ist folgender Satz gefunden:

38. *Die Momenten-Ebene eines Puncts einer andern Momenten-Ebene geht durch den Drehpunct dieser Ebene; oder: Liegt im Durchschnitte zweier Ebenen der Drehpunct einer Ebene, so liegt in diesem Durchschnitte auch der Drehpunct der andern Ebene* *).

Diese Gleichung (37.) nimmt eine andere Gestalt an, wenn die Gleichung (α) von ihr abgezogen wird. Es entsteht die Gleichung

$$39.\qquad (x-x_0)L_1+(y-y_0)M_1+(z-z_0)N_1=0,$$

---

*) *Möbius*, Seite 151.

wodurch dieselbe Ebene ausgedrückt wird. Man kann also die Momenten-Ebene eines Drehpuncts $(x_1 y_1 z_1)$, der in der Momenten-Ebene des Drehpuncts $(x_0 y_0 z_0)$ liegt, entweder durch die Gleichung (37.), oder durch die Gleichung (39.) darstellen. Aus der Gleichung (38.) folgt unmittelbar folgender Satz:

40. *Die Momenten-Ebenen aller Drehpuncte einer Ebene durchschneiden sich in dem Drehpuncte dieser Ebene* *).

Umgekehrt kann behauptet werden, dass die Drehpuncte aller Momenten-Ebenen, welche sich in dem Drehpuncte $(x_0 y_0 z_0)$ durchschneiden, in der Momenten-Ebene dieses Drehpuncts liegen. Denn die Gleichung einer Momenten-Ebene, deren Drehpunct $(x_1 y_1 z_1)$ ist, ist

$$(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0.$$

Soll nun diese durch den gemeinschaftlichen Punct $(x_0 y_0 z_0)$ gehen, so ist

$$(x_0-x_1)L + (y_0-y_1)M_1 + (z_0-z_1)N_1 = 0.$$

Werden beide Gleichungen von einander abgezogen, so entsteht die Gleichung

$$(x-x_0)L_1 + (y-y_0)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0.$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene (39.), deren Drehpunct in der Momenten-Ebene des Drehpuncts $(x_0 y_0 z_0)$ liegt. Daher:

41. *Die Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einem Puncte durchschneiden, liegen in einer Ebene, und zwar in der Momenten-Ebene des gemeinschaftlichen Puncts* **).

Um mich kurz und bestimmt ausdrücken zu können, nenne ich alle Linien, welche in einer Ebene liegen und durch den Drehpunct dieser Ebene gehen, *Strahlen.* Für diese Strahlen ergibt sich aus (38.) folgende Eigenschaft, die noch später ihre besondere Würdigung finden wird:

42. *Die Momenten-Ebenen aller Puncte eines Strahls durchschneiden sich in diesem Strahle; und umgekehrt: die Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einem Strahle durchschneiden, liegen auch in diesem Strahle.*

Nur die Strahlen (wie ich sie oben bezeichnet habe) besitzen diese Eigenschaft, und keine andere Linien; denn nicht jede Linie kann zum Strahle angenommen werden, oder nicht jede Linie liegt in einer Ebene und geht zugleich durch den Drehpunct dieser Ebene. Soll nämlich die Linie

$$y-y_0 = a(x-x_0), \qquad z-z_0 = a_1(x-x_0)$$

ein Strahl sein, so müssen die fünf Grössen a, a_1, x_0, y_0, z_0 der Gleichung

$$L_0 + aM_0 + a_1 N_0 = 0$$

*) *Möbius*, S. 151.

Genüge leisten. Ich werde sogleich diesen Gegenstand in grösserer Allgemeinheit behandeln.

c_1. *Gegenlinien im Allgemeinen.*

17.

Nach (40.) ist der Ort der Durchschnitte der Momenten-Ebenen aller Puncte, welche in einer Ebene liegen, ein Punct: der Drehpunct dieser Ebene; und umgekehrt: der Ort der Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einem Puncte durchschneiden, ist eine Ebene: die Momenten-Ebene dieses Puncts. Es liegt jetzt die Frage sehr nahe: *Wo ist der Ort der Drehpuncte von Ebenen, welche sich in einer Linie durchschneiden?* Die Lösung dieser Aufgabe ist folgende:

Es seien

$$\beta. \qquad y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen des Durchschnitts der Momenten-Ebene, und

$$(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0$$

die Gleichung einer dieser Momenten-Ebenen: man sucht den Ort ihres Drehpuncts $(x_1\, y_1\, z_1)$.

Da die Ebene durch die gegebene Linie gehen soll, so finden folgende Bedingungsgleichungen Statt:

$$L_1 + aM_1 + a_1 N_1 = 0,$$
$$x_1 L + y_1 M + z_1 N - bM_1 - b_1 N_1 = 0,$$

aus welchen sich, wenn entweder z_1 oder y_1 eliminirt wird, die Gleichungen einer geraden Linie ergeben, nämlich:

$$43. \quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} x_1(n(aC-a_1B) - l(B-aA)) \\ +\, y_1(n(a_1A-C) - m(B-aA)) \\ +\, n(L+aM+a_1N) + (bM+b_1N)(B-aA) \end{array}\right\} = 0 \text{ und} \\ \left.\begin{array}{c} x_1(m(aC-a_1B) - l(a_1A-C)) \\ +\, z_1(m(B-aA) - n(a_1A-C)) \\ +\, m(L+aM+a_1N) + (bM+b_1N)(a_1A-C) \end{array}\right\} = 0; \end{array}\right.$$

wo l, m, n dieselbe Bedeutung haben, wie früher in (§. 13.).

Dieses sind die Gleichungen einer geraden Linie, in welcher sich der Drehpunct jeder Ebene befindet, welche durch die gegebene Linie p geht. Daher:

44. *Der Ort der Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einer Linie durchschneiden, ist eine gerade Linie.*

18.

Ich kehre die Aufgabe um, und suche den Ort der Durchschnitte von Momenten-Ebenen, deren Drehpuncte in einer geraden Linie liegen.

Die Gleichungen der Linie, in welcher die Drehpuncte liegen, seien

$$\gamma. \qquad y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1.$$

Sind $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$ zwei Puncte der gegebenen Linie, so sind die beiden zugehörigen Momenten-Ebenen

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0,$$
$$(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0.$$

Die Gleichungen des Durchschnitts dieser beiden Ebenen sind

$$45. \quad \begin{cases} x(-Bh+aK) + y(Ah-K) + Nh + bK = 0, \\ x(-Ch+a_1K) + z(Ah-K) - Mh + b_1 K = 0, \\ y(-Ch+a_1K) + z(Bh-aK) + L + (ab_1-a_1b)K = 0; \end{cases}$$

wo h die Bedeutung in (30.) hat.

Da diese Gleichungen unabhängig sind von den Coordinaten der beiden Drehpuncte, so folgt, dass alle Momenten-Ebenen sich in dieser Linie durchschneiden. Daher:

46. *Alle Momenten-Ebenen, deren Drehpuncte in einer geraden Linie liegen, durchschneiden sich in einer und derselben geraden Linie.*

Diese beiden Linien bestimmen sich gegenseitig. Herr Prof. *Möbius* nennt sie *Gegenlinien.* Vergleicht man die Gleichungen (43. und 45.) mit einander, so findet man, dass sie identisch, dass aber ihre Elemente auf verschiedene Weise gruppirt sind. Daher:

47. *Die erste der beiden Gegenlinien enthält die Drehpuncte, deren Momenten-Ebenen sich in der zweiten Gegenlinie durchschneiden, und die zweite Gegenlinie enthält die Drehpuncte, deren Momenten-Ebenen sich in der ersten Gegenlinie durchschneiden* *).

19.

Diese Gegenlinien verdienen eine grössere Aufmerksamkeit, als ihnen bisher zu Theil wurde. Ich werde hier eine ihrer Haupt-Eigenschaften entwickeln, von welcher ich später wichtige Anwendungen machen werde. Ich suche nämlich die Gleichungen der Linie, welche zu beiden Gegenlinien senkrecht ist, oder welche durch die beiden nächsten Puncte zweier Gegenlinien geht.

---

*) *Möbius* Statik, Seite 152.

$(x_0\, y_0\, z_0)$ sei einer dieser nächsten Puncte, und

$$y - y_0 = \mu(x - x_0), \qquad z - z_0 = \mu_1(x - x_0)$$

seien die Gleichungen der ersten, also nach No. (45.),

$$x(-Bh + \mu K) + y(Ah - K) + Nh + (-\mu x_0 + y_0)K = 0,$$
$$x(-Ch + \mu_1 K) + z(Ah - K) - Mh - (-\mu_1 x_0 + z_0)K = 0$$

die Gleichungen der zweiten Gegenlinie; wo

$$h = L_0 + \mu M_0 + \mu_1 N_0$$

ist. Die Gleichungen der Linie, welche durch ihre beiden nächsten Puncte geht, seien

$$y - y_0 = \delta(x - x_0),$$
$$z - z_0 = \delta_1(x - x_0).$$

Es sind hier nun die Bedingungen zu suchen, welchen die Vorzahlen δ und δ_1 unterworfen sind. Die erste ist

$$\mathfrak{A}. \qquad L_0 + \delta . M_0 + \delta_1 . N_0 = 0;$$

denn die verlangte Linie muss in der Momenten-Ebene des Puncts $(x_0\, y_0\, z_0)$ liegen. Die zweite ist

$$\mathfrak{B}. \qquad 1 + \delta . \mu + \delta_1 . \mu_1 = 0;$$

denn die genannte Linie ist senkrecht zur ersten Gegenlinie. Und da sie auch zur zweiten Gegenlinie senkrecht ist, so ist die dritte Bedingung:

$$Ah - K + \delta(-Bh + \mu K) + \delta_1(-Ch + \mu_1 K) = 0$$

oder

$$\mathfrak{C}. \qquad A + \delta . B + \delta_1 . C = 0.$$

Aus ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{C}$) ergeben sich für δ und δ_1 die Werthe:

$$\mathfrak{D}. \qquad \delta = \frac{AN_0 - CL_0}{CM_0 - BN_0}, \qquad \delta_1 = \frac{BL_0 - AM_0}{CM_0 - BN_0},$$

und die Gleichungen der verlangten Linie sind

$$48. \qquad \frac{x - x_0}{CM_0 - BN_0} = \frac{y - y_0}{AN_0 - CL_0} = \frac{z - z_0}{BL_0 - AM_0};$$

also dieselben, welche früher No. 16. gefunden sind. Daher:

49. *Die Linie, welche zu zweien Gegenlinien senkrecht ist, oder welche durch ihre beiden nächsten Puncte geht, ist senkrecht zur Hauptdrehlinie und geht durch dieselbe; oder: Zwei Gegenlinien sind senkrecht zu einer Linie, welche senkrecht zu der Hauptdrehlinie ist und durch diese geht.*

Die erste Gegenlinie ist durch $x_0, y_0, z_0, \mu, \mu_1$ gegeben. Die Verbindung der Gleichungen ($\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$) giebt folgende:

$$50. \qquad CM_0 - BN_0 + \mu(AN_0 - CL_0) + \mu_1(BL_0 - AM_0) = 0,$$

welche den Zusammenhang der Richtung der ersten Gegenlinie und ihres nächsten Punctes $(x_0\, y_0\, z_0)$ angiebt.

20.

In dem Falle, wenn die beiden Gegenlinien zusammenfallen, muss

$$-Ah + K = \frac{-Bh+aK}{a} = \frac{Nh+bK}{b} = \frac{-Ch+a_1K}{a_1} = \frac{-Mh+b_1K}{b_1} = \frac{Lh+(ab_1-a_1b)K}{ab_1-a_1b},$$

folglich

$$(-A+\frac{B}{a})h = (-A-\frac{N}{b})h = (-A+\frac{C}{a_1})h = (-A+\frac{M}{b_1})h = (-A-\frac{L}{ab_1-a_1b})h = 0$$

sein. Also muss entweder $h = 0$, oder

$$-A+\frac{B}{a} = -A-\frac{N}{b} = -A+\frac{C}{a_1} = -A+\frac{M}{b_1} = -A-\frac{L}{ab_1-a_1b} = 0$$

sein. Die letztere Annahme führt durch Vereinigung der Gleichungen zu der Endgleichung

$$A.L + B.M + C.N = 0;$$

was gegen die Voraussetzung ist. Es ist also

$$h = 0.$$

Nimmt man in dieser Doppellinie zwei Puncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$ an, so ist

$$a = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \qquad a_1 = \frac{z_1-z_0}{x_1-x_0}, \qquad b = y_0 - ax_0, \qquad b_1 = z_0 - a_1x_0.$$

Werden nun diese Werthe in die Gleichung $h = 0$ gesetzt, so ergiebt sich

$$(x_1-x_0)L_0 + (y_1-y_0)M_0 + (z_1-z_0)N_0 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, dass der Punct $(x_1\, y_1\, z_1)$ in der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegt, und also die Doppellinie ein Strahl in der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ ist. Daher:

51. *Die Doppellinie ist ein Strahl einer Momenten-Ebene.*

Dieses stimmt ganz mit Demjenigen überein, was am Ende von (§. **16.**) gefunden wurde.

21.

Wenn aber eine der Gegenlinien die Richtung der gerade fortgehenden Kraft hat, so sind die Momenten-Ebenen aller Puncte dieser Linie parallel, und es findet entweder keine zweite Gegenlinie Statt, oder diese liegt im Unendlichen. Dieses bestätigt auch die obige Rechnung; denn ist in der Gleichung (γ in §. 18.)

$$a = \frac{B}{A} \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{C}{A},$$

so verschwinden auch die Vorzahlen von x, y, z in den Gleichungen (**45.**) der Gegenlinie.

22.

c_2. *Gegenlinien, welche zu einander senkrecht sind.*

Die Momenten-Ebenen aller Puncte einer Ebene $\mathfrak{M}_0$ durchschneiden sich in dem Puncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, und von diesen Ebenen durchschneiden sich jene in einer geraden Linie; nämlich in einem Strahle, dessen Drehpuncte in diesem Strahle selbst liegen. Allein welche von diesen Momenten-Ebenen durchschneiden sich in der geraden Linie, die durch diesen Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht und senkrecht zu der Ebene $\mathfrak{M}_0$ ist? oder: welche Momenten-Ebenen durchschneiden sich in $\mathfrak{A}_0$, der Dreh-Axe der Ebene $\mathfrak{M}_0$?

Zur Beantwortung dieser Frage kann man von der Eigenschaft zweier senkrechter Linien (hier Gegenlinien), oder von der Eigenschaft zweier senkrechten Ebenen ausgehen. Es soll der letzte Weg gewählt werden. Die Gleichung der Ebene $\mathfrak{M}_0$ ist

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0;$$

und ist $(x_1\, y_1\, z_1)$ ein Punct dieser Ebene, so ist

$$(x-x_0)L_1 + (y-y_0)M_1 + (z-z_0)N_1 = 0$$

die Gleichung seiner Momenten-Ebene. Die Bedingungsgleichung für den senkrechten Stand dieser Ebene ist

$$L_0 . L_1 + M_0 . M_1 + N_0 . N_1 = 0.$$

Die Grössen L_1, M_1, N_1 ersetze ich durch andere, nemlich durch

$$\left.\begin{array}{l} L_0(L_0-(y_1-y_0)C + (z_1-z_0)B) \\ + M_0(M_0-(z_1-z_0)A + (x_1-x_0)C) \\ + N_0(N_0-(x_1-x_0)B + (y_1-y_0)A) \end{array}\right\} = 0,$$

und vertausche x_1, y_1, z_1 gegen x, y, z. Die Gleichung, welche hierdurch entsteht, ist

$$52. \quad \begin{array}{l} (x-x_0)(CM_0-BN_0) + (y-y_0)(AN_0-CL_0) \\ + (z-z_0)(BL_0-AM_0) + R_0^2 = 0. \end{array}$$

Sie drückt eine Ebene aus, welche so beschaffen ist, dass, wenn ein Punct derselben zum Drehpuncte genommen wird, seine Momenten-Ebene zu der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ senkrecht ist, und zwar durch $\mathfrak{A}_0$, durch die Axe dieser Momenten-Ebene geht.

Diese Ebene (52.) ist parallel zu der Ebene $\mathfrak{A}_0 E_0$ (15.), also auch parallel zu der Hauptdrehlinie.

Die Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ wird von der Ebene (52.) in einer Linie durchschnitten, welche durch folgende Gleichungen ausgedrückt wird:

$$53.\quad \begin{cases} (x-x_0)(BR_0^2-M_0K)-(y-y_0)(AR_0^2-L_0K)-N_0R_0^2=0, \\ (x-x_0)(CR_0^2-N_0K)-(z-z_0)(AR_0^2-L_0K)+M_0R_0^2=0, \\ (y-y_0)(CR_0^2-N_0K)-(z-z_0)(BR_0^2-M_0K)-L_0R_0^2=0. \end{cases}$$

Dies sind die Gleichungen einer Linie, welche in der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegt, und so beschaffen ist, dass die Momenten-Ebenen ihrer Puncte senkrecht zu der Ebene $\mathfrak{M}_0$ sind und durch die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ derselben gehen, und dass mithin die Dreh-Axen dieser Momenten-Ebenen in der Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegen.

Diese Linie (53.) und die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ sind zwei zu einander senkrechte Gegenlinien.

Die Gleichungen (53.) enthalten R_0, das Drehmoment der Ebene $\mathfrak{M}_0$. Ich suche den Zusammenhang dieses Drehmoments mit den Drehmomenten der eben erwähnten senkrechten Momenten-Ebenen, und gebe deshalb diesen Gleichungen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} R_0^2(N-Bx+Ay) &= K(-(x-x_0)M_0+(y-y_0)L_0), \\ R_0^2(M-Az+Cx) &= K(+(x-x_0)N_0-(z-z_0)L_0), \\ R_0^2(L-Cy+Bz) &= K(-(y-y_0)N_0+(z-z_0)M_0). \end{aligned}$$

Ich wähle einen bestimmten Punct $(x_1\,y_1\,z_1)$ dieser Linie, und setze deshalb diese bestimmten Coordinaten statt der allgemeinen x, y, z. Die Factoren von R_0^2 werden hiedurch N_1, M_1, L_1. Ich vervielfache (multiplicire) die Gleichungen mit sich selbst, und zähle sie zusammen. Dies giebt

$$\begin{aligned} R_0^4(L_1^2+M_1^2+N_1^2) = {} & R_0^2K^2((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2) \\ & -K^2((x_1-x_8)L_0+(y_1-y_0)M_0+(z_1-z_0)N_0)^2. \end{aligned}$$

Wird nun die Entfernung der beiden Puncte $(x_0y_0z_0)$, $(x_1y_1z_1)=r_1$ gesetzt, so ist der Factor von $R_0^2K^2, = r_1^2$. Der letzte Theil verschwindet; denn $(x_1y_1z_1)$ liegt in der Ebene $\mathfrak{M}_0$. Ich erhalte hiedurch den merkwürdigen Satz:

$$54.\qquad R_0\,.\,R_1 = r_1\,.\,K,$$

d. h.: *Das Product der beiden vollständigen Drehmomente zweier zu einander senkrechter Momenten-Ebenen, deren Drehpuncte in ihrem gemeinsamen Durchschnitte liegen, gleicht dem Producte aus dem Abstande der beiden Drehpuncte und aus der beständigen Grösse* K *oder* A.L+B.M+C.N.

23.

Jede Linie hat eine Gegenlinie (§§. 17. 18.), aber nicht jede Linie hat einen Drehpunct. Ist es aber möglich, dass eine der beiden Gegenlinien einen Drehpunct hat, ohne dass die andere Gegenlinie einen Drehpunct besässe? Ich werde diese Frage untersuchen, und beweisen, dass nie eine allein diese Eigenschaft hat. Sind

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen der ersten Gegenlinie, so muss, im Fall sie einen Drehpunct hat,

$$q.h - p.K = 0$$

sein. Die Gleichungen der zweiten Gegenlinie giebt (45.). Die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muss, wenn auch diese Linie einen Drehpunct haben soll, erhält man, wenn man in den Gleichungen (26., 29. und 30.)

$$a = \frac{Bh-aK}{Ah-K}, \qquad b = \frac{-Nh-bK}{Ah-K}, \qquad a_1 = \frac{Ch-a_1K}{Ah-K}, \qquad b_1 = \frac{Mh-b_1K}{Ah-K}$$

setzt. Hierdurch gehen p, q, l, m, n in $p_1, q_1, l_1, m_1, n_1, h_1$ über und die Bedingungsgleichung (29.) in

$$q_1 h_1 - p_1 K = 0.$$

Es findet sich

$$p_1 = \frac{h^2.E^2+p.K^2-2q.h.K}{(Ah-K)^2}, \qquad q_1 = \frac{h.E^2-q.K}{Ah-K},$$

$$l_1 = \frac{(h-l)K}{Ah-K}, \qquad m_1 = \frac{-mK}{Ah-K}, \qquad n_1 = \frac{-nK}{Ah-K}, \qquad h_1 = \frac{h.K}{Ah-K},$$

und zuletzt

$$q_1 h_1 - p_1 K = \frac{K^2(q.h-p.K)}{(Ah-K)^2}.$$

Ist also $qh - pK = 0$, so ist auch $q_1 h - p_1 K = 0$. Daher:

55. *Hat eine der beiden Gegenlinien einen Drehpunct, so hat auch die andere Gegenlinie einen Drehpunct.*

Die Gegenlinien zerfallen also in zwei Arten: in solche, welche keinen Drehpunct haben, und in solche, deren jede einen Drehpunct hat.

Bei den letztern, deren jede Gegenlinie einen Drehpunct hat, kann, wenn

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen der ersten Gegenlinie sind, da

$$h = \frac{pK}{q}$$

ist, den Gleichungen der zweiten Gegenlinie folgende Gestalt gegeben werden:

56. $$\begin{cases} x(Bp-aq) - y(Ap-q) - Np - bq = 0, \\ x(Cp-a_1q) - z(Ap-q) + Mp - b_1q = 0, \\ y(Cp-a_1q) - z(Bp-aq) - Lq - (ab_1 - a_1b)p = 0, \end{cases}$$

wo, wie früher festgesetzt,

$$1 + a^2 + a_1^2 = p, \qquad A + aB + a_1C = q \qquad \text{ist.}$$

24.

Aus den Gleichungen für die beiden Gegenlinien in (§. 18.) ergiebt sich der Winkel, den sie bilden. Wird dieser durch (Gg) bezeichnet, so ist

$$57. \qquad \cos(Gg) = \frac{h.q - p.K}{p^{\frac{1}{2}}.(h^2E^2 + pK^2 - 2qhK)^{\frac{1}{2}}},$$

wo p, q, h die frühere Bedeutung haben.

Ist nun $hq - pK = 0$, so ist dieser Winkel $= 90^0$. In diesem Falle haben aber die Gegenlinien die Eigenschaft der Dreh-Axen; daher:

58. *Haben die Gegenlinien die Eigenschaft der Dreh-Axen, so sind sie zu einander senkrecht; und umgekehrt: sind die Gegenlinien zu einander senkrecht, so haben sie die Eigenschaft der Dreh-Axen.*

Der Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ bestimmt die Dreh-Axe (3.), und zugleich die Gegenlinie (58.), welche zu jener senkrecht ist. Daher:

59. *Ein Punct, als Drehpunct angenommen, bestimmt zwei zugehörige zu einander senkrechte Gegenlinien.*

Da die Gegenlinien, welche zu einander senkrecht sind, die Eigenschaft der Dreh-Axen haben, so ist, wenn $(x_0\, y_0\, z_0)$ der Drehpunct der ersten und $(x_1\, y_1\, z_1)$ der Drehpunct der zweiten Gegenlinie ist, nach (5.):

$$K = R_0 . E . \cos(gE) = R_1 . E . \cos(GE),$$

mithin

$$\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} = \frac{E^2}{K^2}(\cos(gE)^2 + \cos(GE)^2).$$

Da nun die Gegenlinien sich in einer zur Hauptdrehlinie senkrechten Linie durchschneiden, so ergänzen sich die Winkel (gE) und (GE) zu 90^0, daher der letzte Factor $= 1$ ist. Es ist folglich

$$60. \qquad \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} = \left(\frac{E}{K}\right)^2.$$

Wird diese Gleichung mit dem früher gefundenen Satze in Betreff des kleinsten Drehmoments R_k (9.) in Verbindung gebracht, so erhält man die Gleichung

$$61. \qquad \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{R_k^2} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{R_k}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{R_k}{R_1}\right)^2 = 1,$$

und in Verbindung mit dem Satze (56.) folgende:

$$62. \qquad R_0^2 + R_1^2 = r^2 . E^2;$$

wo r der kleinste Abstand der Gegenlinien ist.

B. *Unvollständiges Drehmoment.*

25.

Nur die Puncte einer zur Hauptdrehlinie parallelen Linie haben gleiche vollständige Drehmomente; die vollständigen Drehmomente der Puncte jeder andern Linie sind ungleich. Unter diesen ist bei einer Linie A, welche die Eigenschaft einer Dreh-Axe hat, dasjenige vollständige Drehmoment das kleinste, welches dem Drehpuncte der Linie A angehört, und dessen Momenten-Ebene zu der Linie A senkrecht ist. Wenn die vollständigen Drehmomente der übrigen Puncte dieser Linie A auf die Ebene dieses kleinsten vollständigen Drehmoments oder auf eine Ebene, die zu der Linie A senkrecht ist, projicirt werden, so sind alle diese Projectionen gleich; und zwar gleich dem genannten kleinsten vollständigen Drehmomente (36.).

Bei einer andern Linie z', welche die Eigenschaft einer Dreh-Axe nicht hat, haben die Puncte derselben, als Drehpuncte, auch verschiedene vollständige Drehmomente; diese sind bei den Puncten, welche der Hauptdrehlinie des Kräftensystems näher liegen, kleiner als bei den entfernteren Puncten. Aber keine Momenten-Ebene, welche einem Puncte dieser Linie angehört, kann senkrecht zu dieser Linie z' sein. Auch bei dieser Linie z' werde ich die vollständigen Drehmomente ihrer Puncte auf eine Ebene projiciren, die senkrecht zu dieser Linie ist, und zeigen, dass alle diese Projectionen gleich sind.

In dieser Linie z' werde ein Punct $(x_0\, y_0\, z_0)$ angenommen, und durch diesen Punct eine Ebene gesetzt, senkrecht zu der genannten Linie; $\mathfrak{A}_0$ sei seine Dreh-Axe, R_0 sein vollständiges Drehmoment und V die Projection dieses Drehmoments auf die erwähnte Ebene. Diese Projection kann angegeben werden durch

$$63. \qquad V = R_0 \,.\, \cos(\mathfrak{A}_0 z'),$$

oder wenn

$$\cos(\mathfrak{A}_0 z') = \cos(\mathfrak{A}_0 x)\cos(z'x) + \cos(\mathfrak{A}_0 y)\cos(z'y) + \cos(\mathfrak{A}_0 z)\cos(z'z)$$
$$= \frac{L_0}{R_0}\,.\,\cos(z'x) + \frac{M_0}{R_0}\,.\,\cos(z'y) + \frac{N_0}{R_0}\,.\,\cos(z'z)$$

gesetzt wird, durch

$$64. \qquad V = L_0 \,.\, \cos(z'x) + M_0 \,.\, \cos(z'y) + N_0 \,.\, \cos(z'z).$$

Ich werde nun nachweisen, dass V sich nicht ändert, wenn ein anderer Punct $(x_1\, y_1\, z_1)$ in derselben Linie z' angenommen wird. Zu diesem Zwecke ist es nöthig, zu zeigen, dass

$$(L_0 - L_1)\cos(z'x) + (M_0 - M_1)\cos(z'y) + (N_0 - N_1)\cos(z'z) = 0 \quad \text{ist.}$$

Ich nehme an, dass

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen der Linie z' seien, dass also auch

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0), \qquad z_1 - z_0 = a_1(x_1 - x_0),$$

$$\cos(z'x) = \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cos(z'y) = \frac{a}{p^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cos(z'z) = \frac{a_1}{p^{\frac{1}{2}}},$$

mithin

$$L_0 - L_1 = (y_1 - y_0)C - (z_1 - z_0)B = (x_1 - x_0)(aC - a_1 B),$$
$$M_0 - M_1 = (z_1 - z_0)A - (x_1 - x_0)C = (x_1 - x_0)(a_1 A - C),$$
$$N_0 - N_1 = (x_1 - x_0)B - (y_1 - y_0)A = (x_1 - x_0)(B - aA) \quad \text{sei.}$$

Diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, geben

$$0 = 0.$$

Daher:

65. *Wenn die vollständigen Drehmomente der Puncte einer Linie auf eine Ebene, welche senkrecht zu dieser Linie ist, projicirt werden, so sind alle diese Projectionen gleich.*

Diese Projection V ist das unvollständige Drehmoment, oder kurz, das Drehmoment einer Linie, welches entweder durch das Product (63.), oder durch die drei Producte (64.) angegeben werden kann.

26.

Ich werde jetzt zeigen, wie das unvollständige Drehmoment einer Linie, welche in einer Ebene liegt, aus dem Drehmomente dieser Ebene hergeleitet werden kann.

Es sei C der Drehpunct der Ebene $\mathfrak{M}_0$, AB die Linie in dieser Ebene, welche die Drehpuncte enthält, deren Dreh-Axen in dieser Ebene liegen (53.); EG sei eine dieser Dreh-Axen. Der Abstand EC sei $= r$. Ich suche das Drehmoment der Linie EF, welche in dieser Ebene liegt, mit der Dreh-Axe EG den Winkel μ bildet, und deren Abstand von C, $= u$ ist.

Ist V das unvollständige Drehmoment der Linie EF, und R_1 das Drehmoment des Puncts E, so ist

$$V = R_1 . \cos\mu = \frac{u . R_1}{r}.$$

Diese und die Gleichung (54.) vereint, geben

$$66. \qquad V = u . \frac{K}{R_0}.$$

Nach dieser Gleichung kann das unvollständige Drehmoment einer Linie aus dem Drehmomente R_0 einer Ebene, in welcher die Linie liegend angenommen wird, und aus u, dem Abstande der Linie von dem Drehpuncte C der Ebene, gefunden werden.

27.

Von der Gleichung (66.) lassen sich schöne Anwendungen auf die Gegenlinien machen. Zuerst nehme ich zwei Puncte $(x_0\, y_0\, z_0)$ und $(x_1\, y_1\, z_1)$ in einer und derselben Linie an, und fälle von ihnen Senkrechte u_0, u_1 auf ihre Gegenlinie. Ist nun V_1 das unvollständige Drehmoment dieser Gegenlinie, so ist nach (66.)

$$V_1 = u_0 \,.\, \frac{K}{R_0} \text{ und auch } = u_1 \,.\, \frac{K}{R_1},$$

mithin

$$67. \quad \frac{u_0}{R_0} = \frac{u_1}{R_1} \quad \text{oder} \quad \frac{R_0}{R_1} = \frac{u_0}{u_1};$$

d. h.: *Die vollständigen Drehmomente zweier Drehpuncte einer Linie messen sich so oft [sind dieselben Vielfachen von einander] wie die senkrechten Linien, welche von diesen Drehpuncten auf ihre Gegenlinie gefället werden.*

28.

Es sei V_0 das unvollständige Drehmoment der ersten und V_1 das der zweiten Gegenlinie;
$(x_1\, y_3\, z_1)$ sei ein Punct in der ersten und $(x_0\, y_0\, z_0)$ ein Punct in der zweiten;
u_1 die Senkrechte, von $(x_1\, y_1\, z_1)$ auf die zweite, und
u_0 die Senkrechte, von $(x_0\, y_0\, z_0)$ auf die erste Gegenlinie gefället.

Es ist nach (70.)

$$68. \quad \frac{V_0 . R_0}{u_0} = \frac{V_1 . R_1}{u_1} = K;$$

d. h.: *Das Product aus dem vollständigen Drehmomente eines Puncts einer Linie und aus dem unvollständigen Drehmomente der Gegenlinie, gemessen [dividirt] durch den Abstand des Puncts von dieser Gegenlinie, ist eine beständige Grösse, und zwar* = K.

Sind nun $(x_0\, y_0\, z_0)$ und $(x_1\, y_1\, z_1)$ die beiden Puncte, in welchen die Linie, die zu beiden Gegenlinien senkrecht ist, diese Gegenlinien durchschneidet, so ist $u_0 = u_1$, mithin

$$69. \quad \frac{V_0}{V_1} = \frac{R_1}{R_0},$$

d. h.: *Die unvollständigen Drehmomente zweier Gegenlinien messen sich* *so oft [sind dieselben Vielfachen von einander] wie die Drehmomente der beiden Endpuncte des kürzesten Abstandes der beiden Gegenlinien.*

Zuletzt bezeichne ich die erste Linie mit G_0, die zweite mit G_1, und verbinde mit der so eben gefundenen Gleichung den frühern Satz (63.), nemlich:

$$V_0 = R_1 . \cos(\mathfrak{A}_1 G_0), \qquad V_1 = R_0 . \cos(\mathfrak{A}_0 G_1).$$

Dies giebt folgende Gleichung:

$$70. \qquad (\mathfrak{A}_1 G_0) = (\mathfrak{A}_0 G_1),$$

d. h.: *Die Dreh-Axen der Endpuncte des kürzesten Abstandes der beiden Gegenlinien bilden mit den Gegenlinien gleiche Winkel.*

29.

Ausser dem Kräftensysteme $P_0, P_1, \ldots.$ werde noch eine Kraft Q_0, in einer Linie q am Angriffspuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$ wirkend, angenommen. Die Projectionen dieser Kraft auf die Coordinaten-Axen x, y, z seien durch

$$Q_x, \quad Q_y, \quad Q_z$$

und die unvollständigen Drehmomente dieser Kraft Q_0 um die Axen x, y, z durch

$$Q_{yz}, \quad Q_{xz}, \quad Q_{xy}$$

bezeichnet. Das unvollständige Drehmoment des ganzen Kräftensystems $P_0, P_1, \ldots.$ um die Axe q ist

$$V_0 = L_0 . \cos(qx) + M_0 . \cos(qy) + N_0 . \cos(qz).$$

Wird diese Gleichung mit Q_0 vervielfacht [multiplicirt] und berücksichtigt, dass

$$Q_0 . \cos(qx) = Q_x, \qquad Q_0 . \cos(qy) = Q_y, \qquad Q . \cos(qz) = Q_z$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$V_0 . Q_0 = Q_x(L - y_0 C + z_0 B) + Q_y(M - z_0 A + x_0 C) + Q_z(N - x_0 B + y_0 A)$$
$$= Q_x L + Q_y M + Q_z N + A(y_0 Q_z - z_0 Q_y) + B(z_0 Q_x - x_0 Q_z) + C(x_0 Q_y - y_0 Q_x).$$

Die Unterschiede der vorstehenden Producte sind die mit Q_{yz}, Q_{xz}, Q_{xy} bezeichneten unvollständigen Drehmomente der Kraft Q_0. Es ist folglich

$$71. \qquad V_0 . Q_0 = A . Q_{yz} + B . Q_{xz} + C . Q_{xy} + Q_x . L + Q_y . M + Q_z . N.$$

Hier bedeuten

A, B, C die Projectionen aller Kräfte $P \ldots.$ auf x, y, z;
Q_x, Q_y, Q_z - - der Kraft $Q_0 \ldots.$ - - - -;
L, M, N - - aller Drehmomente von $P_0, P_1, \ldots.$ um die Axe x, y, z;
Q_{yz}, Q_{xz}, Q_{xy} - - des Drehmoments der Kraft Q_0 - - - - - - -;

Die erstern mit den letztern und die zweiten mit den dritten vervielfacht [multiplicirt], geben Producte, deren Summe gleich ist dem Producte aus der

Kraft Q_0 und aus dem unvollständigen Drehmomente des ganzen Kräftensystems $P, P_1, \dots.$ um die Axe q, in welcher die Kraft Q_0 wirkt.

Dieser Satz ist die Grundlage eines viel allgemeineren, welcher entsteht, wenn mehrere Kräfte $Q_0, Q_1, \dots.$ in verschiedenen Richtungen $q_0, q_1, \dots.$ an verschiedenen Angriffspuncten wirkend angenommen werden, und wenn jede Kraft $Q_0, Q_1, \dots.$ mit dem unvollständigen Drehmomente der Kräfte $P_0, P_1, \dots.$ um die Axen $q_0, q_1, \dots.$, in welchen die Kräfte $Q_0, Q_1, \dots.$ wirken, vervielfacht [multiplicirt] wird. Es entstehen eben so viele Gleichungen, als oben gefunden; ihre Summe ist

$$\Sigma(V.Q) = A.\Sigma Q_{yz} + B.\Sigma Q_{xz} + C.\Sigma Q_{xy} + L.\Sigma Q_x + M.\Sigma Q_y + N.\Sigma Q_z,$$

oder, wenn

$$\Sigma Q_x, \quad \Sigma Q_y, \quad \Sigma Q_z \quad \text{durch} \quad A', \; B', \; C'$$

und

$$\Sigma Q_{yz}. \quad \Sigma Q_{xz}, \quad \Sigma Q_{xy} \quad \text{durch} \quad L', \; M', \; N'$$

bezeichnet werden:

$$72. \qquad V_0.Q_0 + V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \dots.$$
$$= A.L' + B.M' + C.N' + A'.L + B'.M + C'N.$$

Diese Gleichung ist merkwürdig; es sind nämlich zwei Kräftensysteme $P, \dots.$, und $Q, \dots.$ vorhanden; die ersteren werden auf Ebenen, welche senkrecht zu den letzteren oder senkrecht zu $q_0, q_1, \dots.$ sind, projicirt, und dann werden die so entstandenen unvollständigen Drehmomente derselben mit der Kraft, worauf die Ebene senkrecht ist, vervielfacht [multiplicirt]. Die Summe dieser Producte gleicht den Producten, die entstehen, wenn

$$A, \; B, \; C \quad \text{mit} \quad L', \; M', \; N'$$

und

$$A', \; B', \; C' \quad \text{mit} \quad L, \; M, \; N$$

multiplicirt werden.

Wenn die Kräfte $Q_0, Q_1, \dots.$ im Gleichgewicht sind, so ist

$$A' = B' = C' = L' = M' = N' = 0,$$

und also

$$73. \qquad V_0.Q + V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \dots. = 0;$$

d. h.: *Wenn Kräfte* $Q_0, Q_1, \dots.$ *im Gleichgewicht sind, und jede Kraft als Axe eines andern Kräftensystems* $P, P_1, \dots.$ *betrachtet wird, wodurch eben so viele unvollständige Drehmomente als Axen oder als Kräfte* $Q_0, Q_1, \dots.$ *entstehen, und wenn jedes dieser unvollständigen Drehmomente mit der Kraft, welche längst der zugehörigen Axe wirkt, multiplicirt wird, so ist die Summe dieser Producte* $= 0$.

Herr Prof. *Möbius* findet Seite **164**, **1.** Thl. seiner Statik diesen speciellen Fall.

Wenn $Q_0, Q_1, \ldots$ und $P_0, P_1, \ldots$ ihre Rollen wechseln, so entstehen dieselben Producte, wie in (72.); daher ist

74. $$V_0.Q_0 + V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \ldots = U_0.P_0 + U_1.P_1 + U_2.P_2 + \ldots$$
$$= A.L' + B.M' + C.N' + A'.L + B'.M + C'.N;$$

wo

$V_0, V_1, \ldots$ die unvollständigen Drehmomente der Kräfte $P_0, P_1, \ldots$ bedeuten, um die Axen $q_0, q_1, \ldots$, in welchen die Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots$ wirken, und

$U_0, U_1, \ldots$ die unvollständigen Drehmomente der Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots$ um die Axen $p_1, p_1, \ldots$, in welchen die Kräfte $P_0, P_1, \ldots$ wirken.

Zu diesem allgemeinsten Satze bin ich gekommen, indem ich nicht vom Gleichgewichte ausging.

C. *Ein Kräftensystem durch zwei andere Kräfte ersetzt.*

30.

Von diesem Gegenstande habe ich in Heft **3.**, Band **32.** dieser Zeitschrift den Hauptsatz veröffentlicht, nämlich: *Die beiden Kräfte, wodurch ein Kräftensystem ersetzt werden kann, oder welche diesem das Gleichgewicht halten, gehen senkrecht durch einen Hebelsarm, der an der Hauptdrehlinie senkrecht befestigt ist.* Ich will diesen Satz auf den, welchen ich oben bei den Gegenlinien gefunden, zurückführen, und zugleich mehrere andere beifügen.

$Q_{,}, Q_{,,}$ sind auch hier die beiden in Rede stehenden Kräfte; $X_{,}, X_{,,}, Y_{,}, Y_{,,}, Z_{,}, Z_{,,}$ sind ihre Seitenkräfte, und

$$A = X_{,} + X_{,,}, \qquad B = Y_{,} + Y_{,,}, \qquad C = Z_{,} + Z_{,,},$$
$$L = y_{,}Z_{,} - z_{,}Y_{,} + y_{,,}Z_{,,} - z_{,,}Y_{,,},$$
$$M = z_{,}X_{,} - x_{,}Z_{,} + z_{,,}X_{,,} - x_{,,}Z_{,,},$$
$$N = x_{,}Y_{,} - y' X_{,} + x_{,,}Y_{,,} - y_{,,}X_{,,}$$

ihre Bedingungsgleichungen. Aus diesen erhält man durch Elimination die Gleichung

75. $$L(x_{,} - x_{,,}) + M(y_{,} - y_{,,}) + N(z_{,} - z_{,,})$$
$$= A(y_{,}z_{,,} - y_{,,}z_{,}) + B(z_{,}x_{,,} - z_{,,}x_{,}) + C(x_{,}y_{,,} - x_{,,}y_{,}),$$

welche auch folgende Gestalt annehmen kann:

76. $$(x_{,} - x_{,,})L_{,,} + (y_{,} - y_{,,})M_{,} + (z_{,} - z_{,}')N_{,,} = 0,$$

oder

$$77. \qquad (x_{,,}-x_{,})L' + (y_{,,}-y_{,})M' + (z_{,,}-z_{,})N' = 0.$$

Zwei Kräfte $Q'_{,}$, $Q'_{,,}$, die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, den Kräften $Q_{,}$, $Q_{,,}$ gleich und parallel sind, und der Mittelkraft E das Gleichgewicht halten, werden, wie auch am angeführten Orte geschehen, zu Hülfe genommen.

Ist der Punct $(x_{,,}\, y_{,,}\, z_{,,})$ fest, und sind $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ veränderlich, so giebt die Gleichung (76.) eine Ebene $\mathfrak{M}_{,,}$ an, deren Drehpunct dieser feste Punct ist, und in welcher zugleich der Punct $(x, y, z_{,})$ liegt.

Ist der Punct $(x, y, z_{,})$ fest, und sind $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ veränderlich, so giebt die Gleichung (77.) eine Ebene $\mathfrak{M}_1$ an, deren Drehpunct $(x, y, z_{,})$ ist, und welche durch den Punct $(x_{,,} y_{,,} z_{,,})$ geht.

Die Angriffspuncte der beiden Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$ liegen also in dem Durchschnitte der beiden Momenten-Ebenen $\mathfrak{M}_{,}$ und $\mathfrak{M}_{,,}$ oder der Ebenen (76., 77.).

Dass $Q_{,}$ in der Ebene (76.) und $Q_{,,}$ in der Ebene $Q_{,,}$ liegt, ergiebt sich auf folgende Weise: Ich lege die Gleichung

$$x \,.\, L_{,,} + y \,.\, M_{,,} + z \,.\, N_{,,} = 0$$

zum Grunde. Sie giebt eine Ebene an, welche zu der Ebene (76.) parallel ist und durch den Anfangspunct der Coordinaten geht. Ihr geschieht Genüge, wenn $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ statt x, y, z gesetzt werden; in ihr liegt also die Kraft $Q'_{,}$. Da nun $Q_{,}$ zu $Q'_{,}$ parallel und auch die Ebene (76.) zu dieser Ebene parallel ist, und da in der Ebene (76.) der Angriffspunct $(x, y, z_{,})$ von $Q_{,}$ liegt, so liegt auch die Kraft $Q_{,}$ in der Ebene (76.).

Eben so wird bewiesen, dass die Kraft $Q_{,,}$ in der Ebene (77.) liegt. Daher:

78. *Die Kräfte* $Q_{,}$, $Q_{,,}$ *liegen in dem Durchschnitte zweier Momenten-Ebenen* $\mathfrak{M}_{,}$, $\mathfrak{M}_{,,}$, *welche durch die Gleichungen* (76. *und* 77.) *angegeben werden*; *und zwar liegt* $Q_{,}$ *in der Ebene* $\mathfrak{M}_{,,}$ *und* $Q_{,,}$ *in der Ebene* $\mathfrak{M}_{,}$.

31.

Es ist noch übrig, zu beweisen, dass die beiden Linien, in welchen die Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$ wirken, Gegenlinien sind *). Von diesem Satze lässt sich, da jetzt die Gleichungen für Gegenlinien entwickelt sind, folgender Beweis geben:

Die Gleichungen der ersten Gegenlinie sind

*) *Möbius*, Journal der Math., Bd. X., Seite 338.

$$y = \frac{Y_{\prime\prime}}{X_{\prime\prime}} \cdot x - \frac{N - x_{\prime} Y_{\prime} + y_{\prime} X_{\prime}}{X_{\prime\prime}}, \qquad z = \frac{Z_{\prime\prime}}{X_{\prime\prime}} \cdot x + \frac{M - z_{\prime} X_{\prime} + x_{\prime} Z_{\prime}}{X_{\prime\prime}},$$

mithin ist nach (§. 18.):

$$a = \frac{Y_{\prime\prime}}{X_{\prime\prime}}, \quad a_{\prime} = \frac{Z_{\prime\prime}}{X_{\prime\prime}}, \quad b = \frac{-N + x_{\prime} Y_{\prime} - y_{\prime} X_{\prime}}{X_{\prime\prime}}, \quad b_{\prime} = \frac{M - z_{\prime} X_{\prime} + x_{\prime} Z_{\prime}}{X_{\prime\prime}};$$

Werden nun diese Werthe von $a, a_{\prime}, b, b'$ in die Gleichungen (43. oder 45.) eingeführt, so entstehen, nach gehörigen Reductionen, für die zweite Gegenlinie die Gleichungen

$$\frac{x - x_{\prime}}{X_{\prime}} = \frac{y - y_{\prime}}{Y_{\prime}} = \frac{z - z_{\prime}}{Z_{\prime}}.$$

Diese sind aber die Gleichungen der Linie, in welcher die Kraft $Q_{\prime}$ liegt. Daher:

79. *Die beiden Kräfte* $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, *durch welche das Kräftensystem ersetzt werden kann, wirken in zwei Gegenlinien.*

Mit dieser Eigenschaft ist nach (49.) nothwendig folgende verbunden:

80. *Die beiden Linien, in welchen die das Kräftensystem ersetzenden Kräfte* $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ *wirken, sind senkrecht zu einer Linie, welche rechtwinklicht die Hauptdrehlinie durchdringt.*

32.

Zu den Momenten der Kräfte $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ übergehend, bezeichne ich die Linien, in welchen sie wirken, mit $q_{\prime}$, $q_{\prime\prime}$, das unvollständige Drehmoment der Kraft $Q_{\prime\prime}$ um die Axe $q_{\prime}$ mit V', und das Drehmoment der Kraft $Q_{\prime}$ um die Axe $q_{\prime\prime}$ mit V''. Es ist

$$V' = L' . \cos(Q_{\prime} x) + M' . \cos(Q_{\prime} y) + N' . \cos(Q_{\prime} z),$$

wo

$$L_{\prime} = (y_{\prime\prime} - y_{\prime}) Z_{\prime\prime} - (z_{\prime\prime} - z_{\prime}) Y_{\prime\prime},$$
$$M_{\prime} = (z_{\prime\prime} - z_{\prime}) X_{\prime\prime} - (x_{\prime\prime} - x_{\prime}) Z_{\prime\prime},$$
$$N' = (x_{\prime\prime} - x_{\prime}) Y_{\prime\prime} - (y_{\prime\prime} - y_{\prime}) X_{\prime\prime}$$

und

$$\cos(Q_{\prime} x) = \frac{X_{\prime}}{Q_{\prime}}, \qquad \cos(Q_{\prime} y) = \frac{Y_{\prime}}{Q_{\prime}}, \qquad \cos(Q_{\prime} z) = \frac{Z_{\prime}}{Q_{\prime}}.$$

Wird die Multiplication wirklich vorgenommen, so entstehen dieselben Producte, als wenn die Gleichungen im Anfange des (§. 30.) mit $X_{\prime} + X_{\prime\prime}$, $Y_{\prime} + Y_{\prime\prime}$, $Z_{\prime} + Z_{\prime\prime}$ vervielfacht werden. Das Gleiche entsteht bei V'', daher:

81. $$Q_{\prime} . V' = Q_{\prime\prime} . V'' = A.L + B.M + C.N = K,$$

d. h.: *Sind* $q_{\prime}$, $q_{\prime\prime}$ *die Linien, in welchen die Kräfte* $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ *wirken, so ist das Product aus dem unvollständigen Drehmomente von* $Q_{\prime\prime}$ *um die Axe* $q_{\prime}$ *und aus der Kraft* $Q_{\prime}$ *gleich dem unvollständigen Drehmomente von* $Q_{\prime}$

um die Axe $q_{,,}$ *und aus der Kraft* $Q_{,,}$, *und gleich der Summe der Producte* A.L + B.M + C.N*).

Der Satz lässt sich noch auf eine andere Weise begründen. Vom Anfangspuncte der Coordinaten fälle man senkrechte Linien $S_{,}$, $S_{,,}$ auf die beiden parallelen Ebenen (in dem 3. Hefte des 32. Bandes dieser Zeitschrift, Seite 227. mit (3. und 9.) bezeichnet), in welchen die Kräfte $Q_{,,}$ und $Q_{,}$ liegen; dann ist

$$S_{,,}^2 = \frac{(L.X_{,}+M.Y_{,}+N.Z_{,})^2}{(Y_{,}Z_{,,}-Y_{,,}Z_{,})^2+(Z_{,}X_{,,}-Z_{,,}X_{,})^2+(X_{,}Y_{,,}-X_{,,}Y_{,})^2}.$$

Dem Nenner kann folgende Gestalt gegeben werden:

$$(X_{,}^2+Y_{,}^2+Z_{,}^2)\,(X_{,,}^2+Y_{,,}^2+Z_{,,}^2)-(X_{,}X_{,,}+Y_{,}Y_{,,}+Z_{,}Z_{,,})^2.$$

Das erste Product ist $= Q_{,}^2 . Q_{,,}^2$; das zweite ist

$$= Q_{,}^2 Q_{,,}^2 (\cos(Q_{,}x)\cos(Q_{,,}x) + \cos(Q_{,}y)\cos(Q_{,,}y) + \cos(Q_{,}z)\cos(Q_{,,}z))$$
$$= Q_{,}^2 . Q_{,,}^2 . \cos(Q_{,}Q_{,,})^2.$$

Der Nenner ist also $= Q_{,}^2 Q_{,,}^2 (1-\cos(Q_{,}Q_{,,})^2) = Q_{,}^2 Q_{,,}^2 \sin(Q_{,}Q_{,,})$, Es ist daher der Zähler

$$L.X_{,} + M.Y_{,} + N.Z_{,} = S_{,,}.Q_{,}.Q_{,,}.\sin(Q_{,}Q_{,,}).$$

Eben so ist

$$L.X_{,,} + M.Y_{,,} + N.Z_{,,} = S_{,}.Q_{,}.Q_{,,}.\sin(Q_{,}Q_{,,}).$$

Beide Gleichungen, durch Zusammenzählen vereint, geben folgende:

82. $$A.L + B.M + C.N = (S_{,}+S_{,,}).Q_{,}.Q_{,,}.\sin(Q_{,}Q_{,,}).$$

$S_{,} + S_{,,}$ ist der Abstand der beiden parallelen Ebenen, in welchen die Kräfte liegen, und gleich dem senkrechten Abstande der beiden Linien $q_{,}$, $q_{,,}$. Es ist daher

$$(S_{,} + S_{,,}) . Q_{,} . \sin(Q_{,}Q_{,,})$$

das Drehmoment der Kraft $Q_{,}$ um die Axe $q_{,,}$ und

$$(S_{,} + S_{,,}) . Q_{,,} . \sin(Q_{,}Q_{,,})$$

das Drehmoment der Kraft $Q_{,,}$ um die Axe $q_{,}$. Wird nun jenes mit $Q_{,,}$ und dieses mit $Q_{,}$ multiplicirt, so entsteht aus (82.) die Gleichung (81.); jene hat also mit dieser dieselbe Bedeutung.

33.

Vor allem ist der Fall zu würdigen, wenn die beiden Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$, durch welche das Kräftensystem ersetzt werden soll, zu einander senkrecht sind; denn in diesem Falle finden merkwürdige Relationen Statt. Zuerst

*) Diesen Satz gab zuerst *H. Chasles* im XVIII. Bd. No. 12. der Annalen von *Gergonne*.

bemerke ich, dass nach dem Früheren die Linien $q_{,}, q_{,,}$, in welchen die Kräfte $Q_{,}, Q_{,,}$ wirken, die Eigenschaft der Dreh-Axen haben und dass die vollständigen Drehmomente dieser beiden Dreh-Axen die Drehmomente der Endpuncte des kürzesten Abstandes dieser beiden Linien $q_{,}, q_{,,}$ oder die Drehmomente jener Endpuncte sind, in welchen $q_{,}, q_{,,}$ den zur Hauptdrehlinie senkrechten Hebelsarm durchdringen. Ist r dieser kürzeste Abstand, und sind $R_{,}, R_{,,}$ die vollständigen Drehmomente des Kräftensystems $P, P, \ldots$ um diese Dreh-Axen $q_{,}, q_{,,}$, so ist nach (54., 61. und 62.)

$$R_{,}.R_{,,} = r.K, \qquad R_{,}^2 + R_{,,}^2 = r^2 E^2, \qquad \frac{1}{R_{,}^2} + \frac{1}{R_{,,}^2} = \frac{E^2}{K^2} = \frac{1}{R_{*}^2}.$$

Das Drehmoment der Kraft $Q_{,,}$ um die Axe $q_{,}$ ist $= rQ_{,,}$, und das der Kraft $Q_{,}$ um die Axe $q_{,,} = r.Q_{,}$; daher ist nach (81.)

$$r.Q_{,}.Q_{,,} = K.$$

Ferner: werden $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ auf die Hauptdrehlinie projicirt, so müssen diese beide Projectionen vereint der gerade fortgehenden Kraft E gleich sein; und da $Q_{,}, Q_{,,}$ zu einander senkrecht sind, so bilden $Q_{,}, Q_{,,}$ ein rechtwinklichtes Viereck, von welchem E die Diagonale ist; daher ist

$$Q_{,}^2 + Q_{,,}^2 = E^2.$$

Zuletzt, da $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ das ganze Kräftensystem $P, P_{,}, \ldots$ ersetzen, so ist ihr vollständiges Drehmoment um irgend eine Dreh-Axe auch gleich dem vollständigen Drehmomente des ganzen Kräftensystems um dieselbe Dreh-Axe. Daher ist bei der Dreh-Axe $q_{,}$, $R_{,} = r.Q_{,,}$ und bei der Dreh-Axe $q_{,,}$ ist $R_{,,} = r.Q_{,}$. Folglich:

83. *Sind die Kräfte* $Q_{,}, Q_{,,}$, *durch welche ein Kräftensystem ersetzt wird, zu einander senkrecht, sind* $R_{,}, R_{,,}$ *die vollständigen Drehmomente des Kräftensystems um die Dreh-Axen* $q_{,}, q_{,,}$, *und ist* r *der kürzeste Abstand dieser Dreh-Axen, worin* $Q_{,}, Q_{,,}$ *wirken, so finden folgende merkwürdige Relationen Statt:*

$$\alpha)\quad R_{,} = r.Q_{,,}, \qquad R_{,,} = r.Q_{,},$$

$$\beta)\quad R_{,}.R_{,,} = r^2.Q_{,}.Q_{,,} = r.K,$$

$$\gamma)\quad R_{,}^2 + R_{,,}^2 = r^2(Q_{,}^2 + Q_{,,}^2) = r^2.E^2,$$

$$\delta)\quad \frac{1}{R_{,}^2} + \frac{1}{R_{,,}^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{Q_{,}^2} + \frac{1}{Q_{,,}^2}\right) = \frac{E^2}{K}.$$

Heidelberg den 28. November 1846.