

14.

Sulle equazioni lineari alle differenze finite.

(Nota di *P. Tardy*, membro corrispondente dell'Accademia Pontifica de'Nuovi Lincei.)

(Estratta dagli Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche pubblicati in Roma. Agosto 1850.)

Sia data un'equazione lineare alle differenze finite dell'ordine n ,

$$(1.) \quad y_{x+n} + P_1 y_{x+n-1} + P_2 y_{x+n-2} + \dots + P_n y_x = 0,$$

ed un'altra pur lineare dell'ordine $m > n$ che debba coesistere con la prima, che abbia cioè comuni con essa tutti gl'integrali particolari

$$(2.) \quad z_{x+m} + A^{(1)} z_{x+m-1} + A^{(2)} z_{x+m-2} + \dots + A^{(m)} z_x = 0.$$

Il valore generale di z conterrà m costanti, quello di y ne conterrà n e però sarà della forma

$$y = z = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + \dots + C_{n-m} y^{(n-m)},$$

ove $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-m)}$ rappresentano gli $n-m$ integrali particolari esclusivi della (1.).

Facciamo

$$(3.) \quad u_x = y_{x+m} + A^{(1)} y_{x+m-1} + A^{(2)} y_{x+m-2} + \dots + A^{(m)} y_x,$$

e sostituendo per y il suo valore z sparirà da sè in virtù delle (2.), ed u_x risulterà una funzione della x contenente $n-m$ costanti arbitrarie in modo lineare. Però eliminando queste si avrà un'equazione lineare alle differenze finite dell'ordine $n-m$ che dinoteremo con

$$(4.) \quad u_{x+n-m} + a_1 u_{x+n-m-1} + a_2 u_{x+n-m-2} + \dots + a_{n-m} u_x = 0.$$

Rimettendo in questa per u_x il suo valore (3.) e paragonando la risultante con la proposta (1.), otterremo n equazioni

$$\begin{aligned} A_{x+n-m}^{(1)} + a_1 &= P_1, & A_{x+n-m}^{(2)} + a_1 A_{x+n-m-1}^{(1)} + a_2 &= P_2, \\ A_{x+n-m}^{(3)} + a_2 A_{x+n-m-1}^{(2)} + a_3 &= P_3, \text{ ec.} \end{aligned}$$

che procedono con legge manifesta e delle quali le prime $n-m$ serviranno a determinare i valori di a_1, a_2, \dots, a_{n-m} , e le altre ne forniranno le condizioni cui debbono verificare i coefficienti della (1.) e della (2.) perchè esse coesistano. Così la soluzione della (1.) è ricondotta a quella di due equa-

zioni: una, la (3.) dell'ordine m , e la seconda, la (4.), dell'ordine $n - m$, ed i coefficienti di quest'ultima si ottengono senza alcuna integrazione. Questo è il teorema fondamentale del sig. Libri trasportato alle equazioni alle differenze finite, e la dimostrazione qui esposta è perfettamente analoga a quella data dal sig. Liouville per le equazioni differenziali.

Sieno ora dati $n - 1$ integrali particolari della (1.); egli è noto che l'integrazione di essa si riduce a quella di un'equazione lineare del 1° ordine, e che quindi si può trovare l'altro integrale particolare per formare il completo; ma se co'metodi ordinari si volesse questo assegnare, sarebbe pressoché impossibile scriverne la espressione finale. Però se introduciamo l'uso delle *funzioni alternate* o *determinanti* riescirà agevole condurre il calcolo sino in fondo.

Indichino $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}$ gli $n - 1$ integrali particolari dati, e rappresenti

$$(5.) \quad z_{x+n-1} + A^{(1)} z_{x+n-2} + A^{(2)} z_{x+n-3} + \dots + A^{(n-1)} z_x = 0$$

l'equazione dell'ordine $n - 1$ cui essi appartengono. Avremo per determinare i coefficienti $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}$ le $n - 1$ seguenti equazioni

$$y_{x+n-1}^{(1)} + A^{(1)} y_{x+n-2}^{(1)} + \dots + A^{(n-1)} y_x^{(1)} = 0,$$

$$y_{x+n-1}^{(2)} + A^{(1)} y_{x+n-2}^{(2)} + \dots + A^{(n-1)} y_x^{(2)} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{x+n-1}^{(n-1)} + A^{(1)} y_{x+n-2}^{(n-1)} + \dots + A^{(n-1)} y_x^{(n-1)} = 0.$$

Il solo che importa conoscere $A^{(1)}$ è somministrato dalla formula

$$A^{(1)} = \frac{-S\{\pm y_x^{(1)} \cdot y_{x+1}^{(2)} \cdot \dots \cdot y_{x+n-3}^{(n-2)} \cdot y_{x+n-1}^{(n-1)}\}}{S\{\pm y_x^{(1)} \cdot y_{x+1}^{(2)} \cdot \dots \cdot y_{x+n-3}^{(n-2)} \cdot y_{x+n-2}^{(n-1)}\}}.$$

(Indico con S il determinante anziché con Σ perchè quest'ultimo simbolo è qui impiegato nel senso ordinario d'integrazione finita.)

Ciò posto la (1.) e la (5.) avendo a comune $n - 1$ integrali particolari, siamo nel caso del teorema precedente con $m = n - 1$, e però la soluzione cercata dipenderà da quello delle due equazioni

$$u_{x+1} + \{P_1 - A_{x+1}^{(1)}\} u_x = 0,$$

$$y_{x+n-1} + A^{(1)} y_{x+n-2} + \dots + A^{(n-1)} y_x = u_x.$$

Dalla prima si ricava

$$u_x = C_n e^{\Sigma \log \{A_{x+1}^{(1)} - P_1\}}$$

e dinotando il numeratore di $A^{(1)}$ con N ed il denominatore con D , allorché la x diviene $x+1$, sarà

$$u_x = C_n e^{\sum \log \left\{ \frac{N}{D} - P_1 \right\}}.$$

L'integrale della seconda si otterrà per mezzo della variazione delle costanti arbitrarie conoscendo già tutti gl'integrali particolari di essa quando il secondo membro è nullo: poniamo quindi

$$y_x = y^{(1)} z_1 + y^{(2)} z_2 + \dots + y^{(n-1)} z_{n-1}$$

e mettiamo

$$\Delta z_1 = v_1 u, \dots \Delta z_r = v_r u, \dots \Delta z_{n-1} = v_{n-1} u,$$

le funzioni $v_1, \dots, v_1, \dots, v_{n-1}$ saranno determinate dalle equazioni

$$y_{x-1}^{(1)} v_1 + y_{x+1}^{(2)} v_2 + \dots + y_{x+1}^{(r)} v_r + \dots + y_{x+1}^{(n-1)} v_{n-1} = 0,$$

$$y_{x+2}^{(1)} v_1 + \dots + y_{x+2}^{(r)} v_r + \dots + y_{x+2}^{(n-1)} v_{n-1} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{x+n-1}^{(1)} v_1 + \dots + y_{x+n-1}^{(r)} v_r + \dots + y_{x+n-1}^{(n-1)} v_{n-1} = 1.$$

Il valore generico di v_r sarà

$$v_r = \frac{S \left\{ \pm y_{x+1}^{(1)} \dots y_{x+r-1}^{(r-1)} \cdot y_{x+r}^{(n-1)} \cdot y_{x+r-1}^{(r+1)} \cdot y_{x+n-2}^{(n-2)} \right\}}{S \left\{ \pm y_{x+1}^{(1)} \dots y_{x+r-1}^{(r-1)} \cdot y_{x+r}^{(n-1)} \cdot y_{x+r+1}^{(r+1)} \cdot y_{x+n-2}^{(n-2)} \cdot y_{x+n-1}^{(r)} \right\}} = \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_{x+n-1}^{(r)}}$$

e verrà

$$z_r = C_n \sum \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy_{x+n-1}^{(r)}} e^{\sum \left\{ \frac{N}{D} - P_1 \right\}} + C_r.$$

Questo teorema corrisponde a quello enunciato dal professore *Malmstén* per le equazioni differenziali nel No. 21 del *Dublin and Cambridge Mathematical Journal*, e la dimostrazione è perfettamente analoga a quella da me data di quest' ultimo nel fascicolo di Aprile di questi Annali.

Esempio I. $n=2$, la equazione data sarà

$$y_{x+2} + P_1 y_{x+1} + P_2 y_x = 0$$

e l'integrale particolare noto $y^{(1)}$. Dalla nostra formola risulta per l'integrale completo

$$y_x = y^{(1)} z_1 = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(1)} \sum \frac{1}{y_{x+1}^{(1)}} e^{\sum \log \left\{ -\frac{y_{x+2}^{(1)}}{y_{x+1}^{(1)}} - P_1 \right\}}.$$

È facile ricavare il secondo integrale particolare facendo al solito $y_x = y^{(1)} \sum t_x$.

Esempio II. Per $n=3$, cioè per la equazione

$$y_{x+3} + P_1 y_{x+2} + P_2 y_{x+1} + P_3 y_x = 0.$$

Supposti noti $y^{(1)}$ ed $y^{(2)}$ risulta

$$y_2 = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + C_3 \left\{ y^{(1)} \sum \frac{y_{x+1}^{(2)}}{y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+2}^{(1)} y_{x+1}^{(2)}} e^{\sum \log \left\{ \frac{y_{x+3}^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_{x+1}^{(1)} y_{x+3}^{(2)}}{y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+2}^{(1)} y_{x+1}^{(2)}} - P_1 \right\}} - y^{(2)} \sum \frac{y_{x+1}^{(1)}}{y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+2}^{(1)} y_{x+1}^{(2)}} e^{\sum \log \left\{ \frac{y_{x+3}^{(1)} y_{x+1}^{(2)} - y_{x+1}^{(1)} y_{x+3}^{(2)}}{y_{x+1}^{(1)} y_{x+2}^{(2)} - y_{x+2}^{(1)} y_{x+1}^{(2)}} - P_1 \right\}} \right\}.$$

Riesce assai spedito vedere come questa espressione, alla quale non è così semplice ridurre quella che si otterrebbe al modo ordinario, verifica la proposta.

Firenze 3 luglio 1850.