

# Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern.

(Dritter und letzter Teil.)

Von

PH. FURTWÄNGLER in Wien.

In zwei Aufsätzen, die unter dem gleichen Titel in diesen Annalen\*) erschienen sind, habe ich die Theorie der Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit ungeradem Primzahlexponenten  $l$  vollständig erledigt. Die quadratischen Reziprozitätsgesetze ( $l = 2$ ) erfordern dagegen noch eine ergänzende Behandlung, wenn der Grundkörper  $k$  reell ist oder unter den mit ihm konjugierten Körpern reelle vorhanden sind. Der einfachste Fall, nämlich der Körper der rationalen Zahlen, gehört also hierher.

Was die Literatur über quadratische Reziprozitätsgesetze betrifft, so sind hier zunächst die beiden fundamentalen Arbeiten von D. Hilbert\*\*) zu nennen, die den Anstoß zu diesen ganzen Untersuchungen gegeben haben. In der ersten Arbeit erledigt Herr Hilbert die Theorie der quadratischen Reziprozitätsgesetze vollständig für solche Körper, die nebst ihren konjugierten imaginär sind und eine ungerade Klassenzahl besitzen. In dem zweiten Aufsatze, in dem allgemeinere Entwicklungen im Vordergrund stehen, werden die quadratischen Reziprozitätsgesetze allgemein aufgestellt, ferner bewiesen in dem Falle, daß die Klassenzahl des Grundkörpers bei Zugrundelegung des schärferen Äquivalenzbegriffes gleich 2 ist. Bei diesem Beweise wird der Klassenkörper des Grundkörpers herangezogen, und der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, daß die Klassenzahl desselben im vorliegenden Falle ungerade ist. Da dies all-

\*) Erster Teil, 67 (1909); zweiter Teil, 72 (1912). Die beiden Aufsätze sind hier kurz mit Teil I und Teil II zitiert. Ferner ist zu vergleichen: Ph. Furtwängler, Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper, Gött. Nachr. 1911 (zitiert als „Zerlegungssatz“).

\*\*) Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, Math. Ann. 51 (1899), und Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper, Gött. Nachr. 1898.

gemein nicht zutrifft, läßt sich, wie ich bereits früher angegeben habe, dieses Beweisverfahren nicht auf beliebige Körper übertragen.

Ich habe den allgemeinen Beweis in der vorliegenden Arbeit analog wie für ungerades  $l$  geführt, indem ich das allgemeine Reziprozitätsgesetz als speziellen Fall des Satzes aufgefaßt habe, der die Invarianz des Restcharakters der singulären Primärzahlen für äquivalente Ideale behauptet. Ist nämlich  $\omega$  eine singuläre Primärzahl, d. h. der Körper  $(\sqrt{\omega}, k)$  im Klassenkörper von  $k$  enthalten, so gilt

$$\left(\frac{\omega}{a_1}\right) = \left(\frac{\omega}{a_2}\right),$$

wenn  $a_1$  und  $a_2$  zwei äquivalente Ideale bedeuten. Ich zeige dann, daß das allgemeine Reziprozitätsgesetz ein spezieller Fall dieses Satzes ist.

Von den quadratischen Reziprozitätsgesetzen handeln noch zwei Dissertationen von K. S. Hilbert\*) und G. Rückle\*\*). Die erste enthält in der Hauptsache numerische Bestätigungen dieser Gesetze in speziellen Körpern, die zweite sucht allgemeinere Betrachtungen durchzuführen. Sie kommt aber nicht wesentlich über den Stand der Arbeiten von D. Hilbert hinaus.

Durch die vorliegende Arbeit ist die Theorie der Reziprozitätsgesetze für Primzahlexponenten zu einem gewissen Abschluß gebracht. Es ist das „allgemeine Reziprozitätsgesetz“ nebst den beiden „Ergänzungssätzen“, die zusammen in dem Hilbertschen Reziprozitätsgesetz einen so eleganten Ausdruck finden, für alle Primzahlexponenten in allen algebraischen Zahlkörpern, die überhaupt in Betracht kommen, vollständig bewiesen.

## § 1.

### Reziprozitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal; Geschlechtscharaktere.

Der Grundkörper, den wir mit  $k$  bezeichnen, sei vom Grade  $m$ ; unter den konjugierten Körpern von  $k$  (mit Einschluß von  $k$  selbst) mögen  $s$  reelle sein:  $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(s)}$ .

Die Anzahl der unabhängigen Einheitenverbände in  $k$  ist  $m' = \frac{m+s}{2}$  und die Vorzeichengruppe der Einheiten von  $k$  sei von der Ordnung  $2^p$ . Die Klassenzahl von  $k$  bei gewöhnlicher, resp. schärferer Äquivalenz sei

\*) Das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz in ausgewählten Kreiskörpern der  $2^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln, Diss. Gött. 1900.

\*\*) Quadratische Reziprozitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern, Diss. Gött. 1901.

$2^{h'}$ , resp.  $2^h$ , wobei alle Klassen mit ungeraden Klassenexponenten als Einheitsselement der Klassengruppe genommen werden. Es gilt dann:

$$h = h' + (s - p) = h' + p'.$$

Die Klassenverbände von  $k$  bei gewöhnlicher Äquivalenz seien

$$(1) \quad c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} H' \quad (x = 0, 1)$$

und bei schärferer Äquivalenz:

$$(2) \quad c_1^{x_1} \cdots c_e^{x_e} d_1^{y_1} \cdots d_e^{y_e} H \quad (x, y = 0, 1)$$

wo  $H'$  und  $H$  die Klassenhauptverbände für die beiden Äquivalenzbegriffe bedeuten.

Ich betrachte jetzt den Körper  $K(\sqrt[\mu]{k})$ , wobei  $\mu$  eine primäre Zahl aus  $k$  sei, die in  $n$  der konjugierten Körper negativ werde; in der Relativediskriminante von  $K$  mögen  $t$  verschiedene Primideale  $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \dots, \mathfrak{d}_t$  aufgehen. Zur Charakterisierung der Geschlechter in  $K$  kommen dann zunächst  $t + n$  Symbole in Betracht, nämlich die  $t$  Normenrestsymbole, die den Primidealen  $\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_t$  entsprechen, und außerdem die von D. Hilbert eingeführten Symbole:

$$\left( \frac{-, \mu}{1^{(i)}} \right),$$

wobei die Indizes  $i$  so zu wählen sind, daß die zu  $\mu$  konjugierte Zahl im Körper  $k^{(i)}$  negativ wird. Von diesen  $t + n$  Symbolen scheiden in bekannter Weise  $r^*$  aus, dadurch, daß  $r^*$  unabhängige Einheiten oder Idealquadrate in  $k$  existieren, die gewisse unter den Symbolen zu  $-1$  machen; unter ihnen mögen  $r'$  Einheiten sein. Es gibt dann

$$r = t + n - r^* + e \text{ Charaktere,}$$

darunter  $t + n - r^*$  Hauptcharaktere und  $e$  Nebencharaktere, welche die verschiedenen Klassenverbände in  $k$  charakterisieren. Hat nun  $a, a^*, v, v^*$ , die Bedeutung\*), die durchgehends in diesen Untersuchungen festgehalten ist, so gilt:

$$(3) \quad \begin{aligned} v + r' &\leq m' \\ a^* &\leq t - m' + v^* + n + e_1 - 1 \\ a &\leq a^* + (v - v^*) + (e - e_1) - (r^* - r') \\ a &\leq t - r^* + n + e - 1 \end{aligned}$$

oder

$$(4) \quad t - r^* + n \geq a - (e - 1).$$

Ist nun  $\mu$  keine singuläre Primärzahl, also nicht Quadrat eines Ideals, so folgt wegen  $a > e - 1$  auch

$$(5) \quad t - r^* + n \geq 1,$$

\*) Vgl. Teil I, § 2.

in diesem Falle existiert also für die Geschlechter von  $K$  stets wenigstens ein Hauptcharakter.

Wir wollen jetzt eine Kongruenz nach dem Modul 4 aufstellen, der alle zu 2 primen Zahlen aus  $k$  genügen müssen. Unter den Verbänden:

$$(6) \quad \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varepsilon_{m'+1}^{v_1} \cdots \varepsilon_{m'+e}^{v_e} \alpha^2,$$

wo  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m'}$  unabhängige Einheiten aus  $k$  und  $\varepsilon_{m'+1}, \dots, \varepsilon_{m'+e}$  Quadrate von Idealen aus den  $e$  unabhängigen Klassenverbänden sind, die  $k$  bei gewöhnlicher Äquivalenz besitzt, sind  $e+e'$  unabhängige primäre und  $m'-e'$  unabhängige nicht primäre Verbände. Ich schreibe (mit geringer Änderung der Bezeichnung) das System (6) in der Gestalt:

$$(7) \quad \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m'-e'}^{u_{m'-e'}} \omega_1^{v_1} \cdots \omega_e^{v_e} \omega_{e+1}^{v_{e+1}} \cdots \omega_{e+e'}^{v_{e+e'}} \alpha^2,$$

indem ich  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m'-e'}$  als nicht primär und  $\omega_1, \dots, \omega_{e+e'}$  als primär annehme. Die singulären Primärzahlen  $\omega_1, \dots, \omega_e$  gehören zu den Untergruppen der Klassengruppe (2), die durch die Kongruenzen  $x_1 \equiv 0, \dots, x_e \equiv 0$  (2) definiert sind, und sind total positiv; die singulären Primärzahlen  $\omega_{e+1}, \dots, \omega_{e+e'}$  sind dagegen nicht total positiv und gehören zu denjenigen Untergruppen der Klassengruppe (2), die durch die Kongruenzen  $y_1 \equiv 0, \dots, y_{e'} \equiv 0$  (2) definiert sind\*).

Ich bestimme dann  $m'-e'$  Primideale  $q_i$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(8) \quad \left( \frac{\varepsilon_i}{q_i} \right) = -1, \quad \left( \frac{\varepsilon_j}{q_i} \right) = 1 \quad (j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m'-e')$$

$$(9) \quad \left( \frac{\omega_1}{q_i} \right) = 1, \dots, \left( \frac{\omega_{e+e'}}{q_i} \right) = 1$$

und wähle Ideale  $q_i'$  so, daß

$$(10) \quad x_i = q_i q_i'^2$$

in der Hauptklasse im engeren Sinne liegt, also  $x_i$  total positiv ist, was wegen der Bedingungen (9) stets möglich ist.

Unter den Verbänden (6) oder (7) sind  $m'+e-p-e'$  total positive unabhängige Verbände, und da unter diesen  $e$  primäre sind, bleiben  $m'' = m' - p - e''$  total positive nichtprimäre unabhängige Verbände, die durch  $\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_{m''}$  charakterisiert seien. Mit Benutzung dieser Bezeichnungen können wir dann den Satz aussprechen:

Satz 1: Jede zu 2 prime Zahl  $\mu$  aus  $k$  befriedigt eine Kongruenz

$$(11) \quad \mu \equiv \bar{\varepsilon}_1^{u_1} \cdots \bar{\varepsilon}_{m''}^{u_{m''}} x_1^{v_1} \cdots x_{m'-e'}^{v_{m'-e'}} \alpha^2 \pmod{4}, \quad (u, v = 0, 1)$$

wo die einzelnen Größen die im Vorstehenden angegebene Bedeutung haben.

\*) Vgl. Ph. Furtwängler, Existenzbeweis für den Klassenkörper, § 10, Math. Ann. 63 (1906).

Zum Beweise zeigt man, daß eine Zahl

$$\nu = \bar{\epsilon}_1^{u_1} \cdots \bar{\epsilon}_{m''}^{u_{m''}} \kappa_1^{v_1} \cdots \kappa_{m'-e'}^{v_{m'-e'}} \quad (u, v = 0, 1)$$

außer in dem trivialen Falle  $\nu = 1$  niemals primär sein kann. Denn anderenfalls würde, da  $\nu$  total positiv ist, ein Körper  $K(\sqrt{\nu}, k)$  ohne Hauptcharakter existieren, was oben als unmöglich erkannt ist. Läßt man andererseits auf der rechten Seite von (11)  $\alpha$  ein volles System von  $\varphi(2)$  zu 2 primen nach 2 inkongruenten Zahlen durchlaufen, so erhält man

$$2^{m''} \cdot 2^{m' - e'} \varphi(2) = 2^m \varphi(2) = \varphi(4)$$

mod. 4 inkongruente Zahlen. Daraus folgt die Richtigkeit unseres Satzes.

Auf Grund des Satzes 1 beweist man nun in bekannter Weise die Sätze\*):

Satz 2: Ist  $\mathfrak{p}$  ein primäres Primideal aus  $k$ , d. h. ist jede Zahl aus  $k$ , die Quadrat eines Ideals ist, quadratischer Rest von  $\mathfrak{p}$ , so kann man stets ein Ideal  $\mathfrak{p}'$  so wählen, daß

$$(\pi) = \mathfrak{p} \mathfrak{p}'^2$$

ist und  $\pi$  eine total positive primäre Zahl ist.

Satz 3: Sind  $\mathfrak{p}_1$  und  $\mathfrak{p}_2$  zwei primäre Primideale aus  $k$  und sind  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zugehörige total positive primäre Zahlen, so gilt:

$$\left( \frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_2} \right) = \left( \frac{\pi_2}{\mathfrak{p}_1} \right).$$

Satz 4: Ist  $\mu$  eine total positive primäre Zahl aus  $k$  von der Gestalt

$$\mu = \mathfrak{d}_1 \cdots \mathfrak{d}_t \mathfrak{q}^2,$$

wo  $\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_t$  verschiedene primäre Primideale aus  $k$  bedeuten, so existieren für die Geschlechter in  $K(\sqrt{\mu}, k)$   $t$  Hauptcharaktere  $\chi_1, \dots, \chi_t$  und  $e$  Nebencharaktere  $\psi_1, \dots, \psi_e$ , zwischen denen eine Relation

$$(12) \quad \chi_1 \cdot \chi_2 \cdots \chi_t \psi_1^{m_1} \cdots \psi_e^{m_e} = 1$$

besteht.

Die Beweise für diese Sätze sind ganz analog den Beweisen der entsprechenden Sätze für ungerade Primzahlexponenten  $l$ . Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei der Definition der primären Zahlen abweichend von Herrn Hilbert nicht gefordert wird, daß sie total positiv seien, sondern nur, daß sie dem Quadrat einer ganzen Zahl mod. 4 kongruent und zu 2 prim seien. Es schien zweckmäßig, diese Festsetzung zu treffen, da in der Theorie des Klassenkörpers primäre Zahlen zu betrachten sind, die nicht total positiv sind.

\*) Vgl. Teil I, § 6—8.

## § 2.

**Die Invarianz des Restcharakters der singulären Primärzahlen.**

Um das allgemeine Reziprozitätsgesetz zu beweisen, ist es am einfachsten, von der Invarianz des Restcharakters der total positiven singulären Primärzahlen für alle Ideale einer Klasse auszugehen. Es sei also  $\omega_1$  eine solche total positive singuläre Primärzahl, zu der die Untergruppe  $U$  der Klassengruppe von  $k$  gehört. Das Klassensystem von  $k$  ist dann bei gewöhnlicher Äquivalenz:

$$c_1^{\omega_1} U \quad (x_1 = 0, 1)$$

und alle Primideale, von denen  $\omega_1$  quadratischer Rest ist, liegen in  $U$ , wie in der Theorie des Klassenkörpers gezeigt wird. Es soll jetzt umgekehrt nachgewiesen werden, daß, wenn  $r$  ein beliebiges Primideal aus  $U$  ist, stets  $\left(\frac{\omega_1}{r}\right) = 1$  ist. Zu diesem Zweck wählen wir ein Primideal  $r'$  so, daß  $\left(\frac{\omega_1}{r'}\right) = 1$  und  $q = rr'q^2$  in der Hauptklasse liegt. Daß dies möglich ist, erkennt man auf folgendem Wege. Liegt  $r$  im Hauptverbande, so kann man einfach  $r' = 1$  wählen, was auch geschehen soll. Liegt dagegen  $r$  in einer Klasse  $c_2$ , die nicht dem Hauptverbande angehört, so wird:

$$U = c_2^{\omega_2} \cdots c_e^{\omega_e} H, \quad (x_i = 0, 1)$$

wo  $H$  den Hauptverband bedeutet. Gehört dann zur Untergruppe  $x_i \equiv 0(2)$  die singuläre Primärzahl  $\omega_i$ , so wähle man  $r'$  so, daß:

$$\left(\frac{\omega_1}{r'}\right) = 1, \quad \left(\frac{\omega_2}{r'}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\omega_3}{r'}\right) = \cdots = \left(\frac{\omega_e}{r'}\right) = 1,$$

was auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Das Primideal  $r'$  liegt dann in  $c_2 H$  und ist daher von der gewünschten Art.

Es sei nun  $p$  ein beliebiges primäres Primideal aus  $k$  und  $\pi$  eine zugehörige total positive Primärzahl. Für diese gelten dann die beiden folgenden Behauptungen:

a) Ist  $\left(\frac{\pi}{r}\right) = 1$ ,  $\left(\frac{\pi}{r'}\right) = 1$ , so ist auch  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ ;

b) ist  $\left(\frac{\pi}{r}\right) = -1$ ,  $\left(\frac{\pi}{r'}\right) = 1$ , so ist  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ .

Um die erste Behauptung zu beweisen, betrachte man den Körper  $(\sqrt{\pi}, k)$ . In diesem wird  $q$  die Relativnorm eines Ideals  $\mathfrak{R}$ .<sup>1)</sup> Bestimmt man das Geschlecht von  $\mathfrak{R}$ , so folgt, weil alle Nebencharaktere den Wert 1 haben, aus der Charakterenrelation (12), daß  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$  ist.

Zum Beweise der zweiten Behauptung wähle man ein primäres Primideal  $\mathfrak{p}'$  so, daß  $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) = -1$ , was stets möglich ist, weil  $\varrho$  nicht Quadrat eines Ideals ist. Eine zu  $\mathfrak{p}'$  gehörige total positive Primärzahl  $\pi'$  bestimme man so, daß  $\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = 1$  wird. Das ist ebenfalls möglich, weil man  $\pi'$  mit  $\omega_2$  multiplizieren darf. Es folgt dann

$$\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = -1,$$

weil man bei anderer Annahme mit a) in Widerspruch geraten würde; denn aus  $\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ ,  $\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}'}\right) = 1$  würde  $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) = 1$  folgen. Es ist also

$$\left(\frac{\pi\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\pi\pi'}{\mathfrak{r}'}\right) = 1.$$

Im Körper  $(\sqrt[\pi]{\pi'}, k)$  wird dann  $\varrho$  die Relativnorm eines Ideals  $\mathfrak{N}$ . Bestimmt man wieder das Geschlecht dieses Ideals, so folgt, weil alle Nebencharaktere den Wert 1 haben, aus der Charakterenrelation (12):

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) = 1,$$

also demnach, wie behauptet,  $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ .

Man kann jetzt leicht nachweisen, daß  $\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{r}}\right) = 1$  sein muß. Man wähle zu dem Zweck ein primäres Primideal  $\mathfrak{p}$  so, daß  $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1$  und bestimme eine zugehörige total positive Primärzahl  $\pi$  so, daß  $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1$  wird, was stets möglich ist. Wäre nun  $\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{r}}\right) = -1$ , so könnte man offenbar einen Exponenten  $g = 0, 1$  so bestimmen, daß

$$\left(\frac{\pi\omega_1^g}{\mathfrak{r}}\right) = -1, \quad \left(\frac{\pi\omega_1^g}{\mathfrak{r}'}\right) = 1.$$

Es würde dann nach b) folgen  $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ , was der Wahl von  $\mathfrak{p}$  widerspricht. Der Widerspruch fällt nur fort, wenn wir annehmen, daß

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{r}}\right) = 1$$

ist. Wir zeigen jetzt, daß, wenn  $\omega$  eine totale positive singuläre Primärzahl und  $\alpha$  eine beliebige zu 2 prime Zahl ist, stets  $\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = 1$  ist. Gehört  $\omega$

zur Untergruppe  $U$  der Klassengruppe, so haben wir (bei gewöhnlicher Äquivalenz) für das Klassensystem von  $k$  die Darstellung

$$c^x U \quad (x = 0, 1).$$

Für alle Primideale aus  $U$  ist dann  $\omega$  quadratischer Rest, für alle Primideale aus einer Klasse  $cU$  quadratischer Nichtrest. Da nun  $\alpha$  nur eine gerade Anzahl von Primfaktoren der letzten Kategorie enthalten kann, folgt  $\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = 1$ . Daraus ergibt sich ohne weiteres als Korollar, daß

$$\left(\frac{\omega}{r}\right) = \left(\frac{\omega}{r'}\right),$$

wenn  $r$  und  $r'$  derselben Klasse angehören.

### § 3.

#### Beziehungen zwischen den quadratischen Restsymbolen in relativ-quadratischen Körpern.

Es wird sich im folgenden als notwendig erweisen, quadratische Restsymbole, die verschiedenen Körpern angehören, miteinander zu vergleichen. Es sollen deshalb hier zwei allgemeine Sätze darüber abgeleitet werden.

**Satz 5.** *Ist der Körper  $K$  relativ quadratisch in bezug auf  $k$  und ist  $\mathfrak{A}$  ein zu 2 primes Ideal aus  $K$ , dessen Relativnorm in  $k$  gleich  $\alpha$  ist, so gilt:*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{A}}\right)_K = \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)_k$$

für jede zu  $\alpha$  prime Zahl  $\mu$  aus  $k$ .

Ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}$  ein Primideal aus  $K$ , das nicht in  $k$  liegt, so ist die behauptete Beziehung selbstverständlich, weil beide Restsymbole identisch sind. Ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{q}$  ein Ideal, das gleichzeitig als Primideal in  $K$  und  $k$  liegt, so ist  $\alpha = \mathfrak{q}^2$ . Bezeichnet man die Norm von  $\mathfrak{q}$  als Ideal von  $k$  betrachtet mit  $q$ , so ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{A}}\right)_K &\equiv \mu^{\frac{q^2-1}{2}} \equiv \mu^{\frac{q-1}{2}(q+1)} \equiv \left(\frac{\mu}{q}\right)_k^{q+1} \equiv +1(q) \\ \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)_k &= \left(\frac{\mu}{q^2}\right)_k = +1. \end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Falle die behauptete Beziehung und daher auch allgemein.

Nicht so einfach ist der folgende Satz zu beweisen:

**Satz 6.** *Ist der Körper  $K$  relativquadratisch in bezug auf  $k$  und ist  $A$  eine Zahl aus  $K$  mit der Relativnorm  $\alpha$  in  $k$ , so gilt:*

$$(14) \quad \left(\frac{A}{\mathfrak{m}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right)_k,$$

wenn  $\mathfrak{m}$  ein beliebiges zu 2 und  $\alpha$  primes Ideal aus  $k$  bedeutet.



Bei dem Beweise kann man wieder  $m = q$  als Primideal aus  $k$  annehmen. Es sei  $1, s$  die Relativgruppe von  $K$  bez.  $k$ . Wird dann  $q$  in  $K$  zerlegt,

$$q = \mathfrak{D} s \mathfrak{D},$$

so folgt

$$\left(\frac{A}{q}\right)_K = \left(\frac{A}{\mathfrak{D}}\right)_K \cdot \left(\frac{A}{s\mathfrak{D}}\right)_K = \left(\frac{A}{\mathfrak{D}}\right)_K \cdot \left(\frac{sA}{\mathfrak{D}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{D}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{q}\right)_k.$$

Bleibt  $q$  auch in  $K$  Primideal, das dort eine Primitivwurzel  $P$  haben möge, so bilde man die Kongruenz

$$g(x) = (x - P)(x - sP) = x^2 + \bar{\rho}x + \rho \equiv 0(q),$$

in der  $\rho$  und  $\bar{\rho}$  ganze Zahlen aus  $k$  bedeuten. Bezeichnet man die Norm von  $q$  als Ideal aus  $k$  betrachtet mit  $q$ , so gilt nach dem Fermatschen Satz:

$$[g(x)]^q \equiv g(x^q)(q),$$

und zwar identisch in  $x$ , weil jede Zahl  $\mu$  aus  $k$  die Kongruenz  $\mu^q \equiv \mu(q)$  befriedigt. Die Kongruenz  $g(x) \equiv 0(q)$  hat daher mit  $P$  zugleich auch die Wurzel  $P^q$ ; da sie nur zwei inkongruente Wurzeln besitzt, muß

$$sP \equiv P^q, \text{ also auch } sA \equiv A^q(q)$$

gelten. Auf Grund der letzten Kongruenz kann man nun in folgender Weise schließen:

$$\left(\frac{A}{q}\right)_K \equiv A^{\frac{q^2-1}{2}} \equiv (A \cdot sA)^{\frac{q-1}{2}} \equiv \alpha^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{\alpha}{q}\right)_k(q).$$

Es ist also, wie zu beweisen war,  $\left(\frac{A}{q}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{q}\right)_k$ .

#### § 4.

### Das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz und das Produkt $\prod \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right)$ für total positive $\mu$ .

Man kann jetzt auf Grund der Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen eine Reihe von Sätzen ohne weiteres von dem Fall eines ungeraden Potenzexponenten  $l$  auf den Fall  $l = 2$  übertragen, zunächst den

Satz 7. (*Allgemeines quadratisches Reziprozitätsgesetz.*) Sind  $\alpha, \beta$  zwei zu einander und zu 2 prime Zahlen eines Körpers  $k$ , von denen die eine primär und total positiv ist, so gilt in  $k$ :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Ferner ist ohne weiteres zu übertragen:

Satz 8. (*Erster Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz.*) Ist  $a$  ein primäres Ideal, so kann man eine primäre total positive Zahl  $\alpha$  so wählen, daß  $\alpha = aq^2$ , wo  $q$  ein geeignetes Ideal bedeutet.

Ist  $\alpha$  eine total positive primäre Zahl und  $\alpha = a q^2$ , so ist  $a$  ein primäres Ideal.

Satz 9. Sind  $\mu, \nu$  zu 2 prime Zahlen aus  $k$ , von denen die erste primär und total positiv ist, so gilt:

$$\prod_{(w)}' \left( \frac{\nu, \mu}{w} \right) = 1,$$

wo das Produkt über alle zu 2 primen Primideale  $w$  zu erstrecken ist.

Wegen der Beweise für diese Sätze vergleiche man Teil I, § 11 und Teil II, § 5.

Um auch die in 2 aufgehenden Primfaktoren zu betrachten, setzen wir:

$$2 = \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \cdots \mathfrak{f}_{s'}.$$

Die Primideale  $\mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_{s'}$  mögen nun genau  $z'' = z - z'$  unabhängige Klassenverbände definieren, und zwar mag dies durch die Primideale  $\mathfrak{f}_{s'+1} \cdots \mathfrak{f}_s$  geschehen. Wir setzen dann:

$$(15) \quad \mathfrak{f}_i \mathfrak{f}_{s'+1}^{a_i^{(i)}} \cdots \mathfrak{f}_s^{a_i^{(i)}} q_i'^2 = \lambda_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s'),$$

wo die  $q_i'$  geeignete Ideale und  $\lambda_i$  Zahlen aus  $k$  bedeuten. Wir nennen nun ein Ideal  $\alpha$  hyperprimär, wenn es primär ist und die Beziehungen:

$$\left( \frac{\lambda_i}{\alpha} \right) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, s')$$

erfüllt. Um den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz zu beweisen, wählen wir zunächst  $z'$  primäre Primideale  $\mathfrak{p}_i$  so, daß

$$(16) \quad \left( \frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i} \right) = -1, \quad \left( \frac{\lambda_j}{\mathfrak{p}_i} \right) = 1 \quad \left( \begin{matrix} i \neq j \\ i, j = 1, 2, \dots, s' \end{matrix} \right),$$

und bestimmen dann zugehörige total positive Primärzahlen  $\pi_1 \cdots \pi_{s'}$ . Mit Hilfe dieser können wir dann für jede Zahl  $\mu$  in  $k$  eine Kongruenz aufstellen:

$$(17) \quad \mu \equiv (\varepsilon)(\kappa) \omega_1^{w_1} \cdots \omega_{s''}^{w_{s''}} \pi_1^{y_1} \cdots \pi_{s'}^{y_{s'}} \alpha^2 (\mathfrak{f}_1^{2l_1+1} \cdots \mathfrak{f}_{s'}^{2l_{s'}+1}),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(\varepsilon) = \varepsilon_1^{u_1} \cdots \varepsilon_{m''}^{u_{m''}}, \quad (\kappa) = \kappa_1^{v_1} \cdots \kappa_{m'-e'}^{v_{m'-e'}} \quad (u, v = 0, 1).$$

In dieser Kongruenz bedeuten  $\omega_1 \cdots \omega_{s''}$  total positive singuläre Primärzahlen, die nicht hyperprimär sind. Wegen Aufstellung dieser Kongruenz vergleiche man: Zerlegungssatz § 4 und § 1 dieser Arbeit.

Auf Grund der letzten Kongruenz beweist man nun analog wie für ungerades  $l$  (vgl. Teil II, § 6) den

Satz 10. (Zweiter Ergänzungssatz zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz).  
Ist  $\alpha$  ein hyperprimäres Ideal, so kann man

$$\alpha = \alpha \alpha'^2$$

als hyperprimäre total positive Zahl wählen.

Ist  $\alpha$  eine total positive hyperprimäre Zahl, so ist  $(\alpha)$  ein hyperprimäres Ideal.

Auch der Satz 9 läßt sich jetzt ergänzen:

Satz 11. Ist  $\mu$  eine hyperprimäre, total positive Zahl und  $\nu$  eine beliebige Zahl aus  $k$ , so gilt:

$$\prod_{(w)}' \left( \frac{\nu, \mu}{w} \right) = 1,$$

wo das Produkt über alle zu 2 primen Primideale  $w$  zu erstrecken ist.

Zum Beweise betrachten wir zunächst den Fall  $\nu = I_i n$ , wo  $I_i$  eins der Primideale  $I_{i+1} \cdots I_s$  ist und  $n$  ein zu 2 und  $\mu$  primes Ideal bedeutet.\*)  
Es ist dann nachzuweisen, daß

$$\left( \frac{\nu}{\mu} \right) \cdot \left( \frac{\mu}{n} \right) = 1.$$

Ich betrachte den Körper  $K = (k, \sqrt{\mu\nu})$ ; in ihm wird  $\mu = \mathfrak{M}^2$ ,  $n = \mathfrak{N}^2$ ,  $I_i = \mathfrak{Q}_i^2$ . Man bestimme nun ein Primideal  $\mathfrak{Q}$  in  $K$  so, daß  $\mathfrak{Q}_i \mathfrak{Q} \mathfrak{Q}'^2 = A$  eine Körperzahl wird. Die Zahl  $\mu$  ist in  $K$  als Quadrat eines Ideals eine total positive singuläre Primärzahl und  $\nu$  mit ihr gleichberechtigt, da  $\mu \cdot \nu = (\sqrt{\mu\nu})^2$ . Es sei nun  $\mathfrak{M}'$  ein mit  $\mathfrak{M}$  äquivalentes zu  $\mu\nu$  primes Ideal und  $\mathfrak{M}' = \mu \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{M}'^2$  eine mit  $\mu$  gleichberechtigte zu  $\mu\nu$  prime total positive singuläre Primärzahl in  $K$ . Da  $\mathfrak{M}'$  mit  $\mu$  gleichzeitig hyperprimär ist, wird  $\mathfrak{Q}_i$  in  $(K, \sqrt{\mathfrak{M}'})$  zerlegt und daher nach dem Zerlegungssatz auch  $\mathfrak{Q}$ , es ist also  $\left( \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{Q}} \right)_K = 1$ . Ferner ist:

$$\left( \frac{\mathfrak{M}'}{\sqrt{\mu\nu} \cdot A^{-1}} \right) = 1,$$

daher

$$\left( \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} \right) = 1.$$

Nun gilt nach § 3:

$$\left( \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} \right)_K = \left( \frac{\nu}{\mathfrak{M}} \right)_K = \left( \frac{\nu}{\mu} \right)_k, \quad \left( \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}} \right)_K = \left( \frac{\mu}{\mathfrak{N}} \right)_K = \left( \frac{\mu}{n} \right)_k.$$

Es ist also, wie zu beweisen war,  $\left( \frac{\nu}{\mu} \right) \left( \frac{\mu}{n} \right) = 1$ .

\*) Eine analoge Betrachtung ist auch bei dem Beweise des Satzes 11 in Teil II durchzuführen, die dort aus Versehen ausgelassen ist.

Mit Rücksicht auf die untenstehende Verallgemeinerung von Satz 11 sei hier bemerkt, daß man bei dem vorhergehenden Beweise nur voraussetzen braucht, daß  $\mu$  total positiv, primär und hyperprimär nach  $\mathfrak{l}_i$  ist.

Um den Satz 11 allgemein zu beweisen, setze man

$$v\sigma = \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_{s'}^{a_{s'}} v_{s'+1} \cdots v_s \tau v',$$

wo  $\sigma, \tau$  Quadrate von Idealen und  $v'$  eine zu 2 prime Zahl bedeutet. Ferner sind  $v_{s'+1} \cdots v_s$  Zahlen von der im vorstehenden betrachteten Gestalt  $\mathfrak{l}_i n$ . Die Richtigkeit der zu beweisenden Gleichung folgt dann aus Satz 9 und 10.

Auf Grund der bei dem vorstehenden Beweise gemachten Bemerkung kann man den Satz 11 in folgender Weise verallgemeinern:

Satz 12. Ist  $\mu$  eine total positive primäre Zahl und  $v$  eine Zahl aus  $k$ , in der nur solche von den Primidealen  $\mathfrak{l}_i$  aufgehen, nach denen  $\mu$  hyperprimär ist, so gilt:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left( \frac{v, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1,$$

wo das Produkt über alle zu 2 primen Primideale  $\mathfrak{w}$  zu erstrecken ist.

## § 5.

### Die Normenrestsymbole $\left( \frac{v, \mu}{\mathfrak{l}_i} \right)$ .

Um die in der Überschrift genannten Normenrestsymbole allgemein zu definieren, setzen wir zur Abkürzung:

$$\bar{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l}_1^{2i_1+1} \cdots \mathfrak{l}_s^{2i_s+1}, \quad \bar{\mathfrak{l}}_i \mathfrak{l}_i^{2i_i+1} = \bar{\mathfrak{l}} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Ist dann  $\mu$  genau durch  $\mathfrak{l}_i^2$  teilbar, so bestimme man eine ganze total positive Zahl  $\mu^*$  entsprechend den Kongruenzen:

$$\mu^* \equiv \mu (\mathfrak{l}_i^{2i_i+1+s})$$

$$\mu^* \equiv 1 (\bar{\mathfrak{l}}_i)$$

und setze:

$$\left( \frac{v, \mu}{\mathfrak{l}_i} \right) = \prod_{(\mathfrak{w})}' \left( \frac{v, \mu^*}{\mathfrak{w}} \right).$$

Die Eindeutigkeit der Definition folgt aus Satz 9 und 11. Man kann nun eine Reihe von Sätzen ohne weiteres wieder von früher her übertragen:

Satz 13. Sind  $\mu, v$  zwei Zahlen aus  $k$  und ist  $v$  Normenrest des Körpers  $K(\sqrt{\mu}, k)$  nach  $\mathfrak{l}_i$ , so ist

$$\left( \frac{v, \mu}{\mathfrak{l}_i} \right) = 1.$$

Satz 14. *Es gilt*

$$\left(\frac{-\mu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_i}\right).$$

Satz 15. *Es ist*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\nu, \mu'}{\mathfrak{l}_i}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\nu', \mu}{\mathfrak{l}_i}\right),$$

wenn

$$\mu \equiv \mu' \alpha^2 (\mathfrak{l}_i^{2l_i+1+g}), \quad \nu \equiv \nu' \beta^2 (\mathfrak{l}_i^{2l_i+1+h})$$

und  $\mu$  und  $\nu$  genau durch  $\mathfrak{l}_i^g$ , resp.  $\mathfrak{l}_i^h$  teilbar sind.

Etwas eingehender ist die Umkehrung von Satz 13 zu betrachten:

Satz 16. *Sind  $\mu$  und  $\nu$  zwei Zahlen aus  $k$ , von denen die erste kein Quadrat einer Zahl ist, und ist*

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1,$$

so ist  $\nu$  Normenrest von  $K(\sqrt{\mu}, k)$  nach  $\mathfrak{l}_i$ .

Es sei  $\mu$  genau durch  $\mathfrak{l}_i^g$  und  $\nu$  genau durch  $\mathfrak{l}_i^h$  teilbar. Man bestimme dann total positive Zahlen  $\mu^*$ ,  $\nu^*$  entsprechend den Kongruenzen:

$$\mu^* \equiv \mu (\mathfrak{l}_i^{2l_i+1+g}), \quad \nu^* \equiv \nu (\mathfrak{l}_i^{2l_i+1+g}),$$

$$\mu^* \equiv 1 (\bar{\mathfrak{l}}_i), \quad \nu^* \equiv 1 (\bar{\mathfrak{l}}_i)$$

und setze

$$\mu^* = \mathfrak{l}_i^g m, \quad \nu^* = \mathfrak{l}_i^h n,$$

wo  $m$  und  $n$  zu 2 prime Ideale sind. Man bestimme ferner ein Primideal  $\mathfrak{p}$  so, daß  $\mathfrak{m}\mathfrak{p}$  hyperprimär wird und wähle dann eine total positive Zahl

$$\pi = \mathfrak{p} \mathfrak{l}_i^g q^2$$

so, daß  $\mu^* \pi$  eine hyperprimäre Zahl wird. Es genügt zum Beweise unseres Satzes zu zeigen, daß  $\nu^*$  Normenrest von  $K'(\sqrt{\pi}, k)$  nach  $\mathfrak{l}_i$  ist. Wir zeigen zu diesem Zweck zunächst, daß man stets eine ganze Zahl  $A$  in  $K'$  so bestimmen kann, daß sich der Bruch

$$\frac{\nu^*}{N_k(A)}$$

in der Gestalt  $\frac{\varrho}{\sigma}$  schreiben läßt, wo  $\varrho$  und  $\sigma$  zu 2 prime Zahlen aus  $k$  bedeuten. Wird  $\mathfrak{l}_i$  in  $K'$  zerlegt, so ist dies evident, da  $\nu^*$  zu  $\bar{\mathfrak{l}}_i$  prim ist. Bleibt  $\mathfrak{l}_i$  in  $K$  Primideal, so muß  $g = 0$  sein; wir wollen zeigen, daß dann auch  $h = 0$  ist, also auch  $\nu^*$  zu  $\mathfrak{l}_i$  prim ist.

Soll  $\mathfrak{l}_i$  in  $K'$  Primideal bleiben, muß neben  $g = 0$  noch die andere

Bedingung zutreffen, daß  $\pi$  und  $\mu$  zwar primäre, aber keine hyperprimären Zahlen sind. Es ist dann:

$$(18) \quad 1 = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{f}_i}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{f}_i}\right) = \left(\frac{\nu^*, \pi}{\mathfrak{f}_i}\right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \pi}{w}\right).$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle\*), je nachdem eine Äquivalenz

$$(19) \quad \mathfrak{f}_1^{e_1} \dots \mathfrak{f}_i^{e_i} \dots \mathfrak{f}_z^{e_z} \sim H \quad (e_i \not\equiv 0 \pmod{2})$$

besteht oder nicht.

Besteht eine Äquivalenz (19), so kann man  $\mathfrak{f}_i \mathfrak{f}_i' = \bar{\lambda}_i$  setzen, wo  $\bar{\lambda}_i$  eine Zahl aus  $k$  und  $\mathfrak{f}_i'$ , abgesehen von Idealquadraten, auf die es nicht ankommt, zu  $\mathfrak{f}_i$  prim ist. Es wird dann  $\nu^* = \bar{\lambda}_i^h \varrho$ , wo  $\varrho$  zu 2 prim ist. Setzt man diesen Ausdruck für  $\nu^*$  oben in (18) ein, so folgt:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\bar{\lambda}_i^h \varrho, \pi}{w}\right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\bar{\lambda}_i^h, \pi}{w}\right) = \left(\frac{\bar{\lambda}_i}{p}\right)^h = 1,$$

da nach Satz 12  $\prod_{(w)}' \left(\frac{\varrho, \pi}{w}\right) = 1$ . Ist also  $h \not\equiv 0 \pmod{2}$ , so muß  $p$ , da es sicher nach  $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_{i-1}, \mathfrak{f}_{i+1}, \dots, \mathfrak{f}_z$  hyperprimär ist, schlechtweg hyperprimär sein, da dann  $\left(\frac{\bar{\lambda}_i}{p}\right) = 1$  ist. Dasselbe gilt auch, wenn keine Äquivalenz (19) besteht. Denn in diesem Falle kommt das Ideal  $\mathfrak{f}_i$  in keiner der Äquivalenzen (15) mit einem ungeraden Exponenten vor und es gilt daher

$$\left(\frac{\lambda_1}{p}\right) = 1, \dots, \left(\frac{\lambda_z}{p}\right) = 1.$$

Ist aber  $p$  hyperprimär, so kann man ein Quadrat eines Ideals  $\omega$  so bestimmen, daß  $\omega\pi$  eine total positive hyperprimäre Zahl wird. Die Zahl  $\omega$  ist dann eine singuläre Primärzahl, die nicht hyperprimär nach  $\mathfrak{f}_i$  ist. Das Primideal  $\mathfrak{f}_i$  bleibt daher in  $K''(\sqrt{\omega}, k)$  Primideal. Andererseits gilt nach Satz 11:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \omega\pi}{w}\right) = 1,$$

woraus mit Rücksicht auf (18):

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \omega}{w}\right) = 1, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\omega}{n}\right) = 1$$

folgt. Es liegt daher  $n$  in einer Untergruppe der Klassengruppe vom Index 2, die nach dem Zerlegungssatz für den Klassenkörper dadurch charakterisiert ist, daß alle Primideale aus ihr in  $K''$  zerfallen. Da  $\mathfrak{f}_i$

\*) Diese beiden Fälle sind auch bei den analogen Betrachtungen in Teil II, S. 381 zu unterscheiden.

dieser Untergruppe angehört, müßte auch  $\mathfrak{l}_i$  in  $K''$  zerfallen. Wir kommen somit zu einem Widerspruch, der nur fortfällt, wenn wir  $h \equiv 0 \pmod{2}$  annehmen. Es läßt sich also in jedem Falle eine ganze Zahl  $A$  aus  $K'$  so bestimmen, daß

$$\frac{v^*}{N_k(A)} = \frac{\varrho}{\sigma}$$

wird, wo  $\varrho$  und  $\sigma$  zu 2 prime Zahlen aus  $k$  sind.

Man bestimme nun ein Primideal  $\mathfrak{q}$  so, daß  $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1$ , und daß  $\varrho\sigma\mathfrak{q}$  ein hyperprimäres Ideal wird, und nenne eine zugehörige hyperprimäre Zahl  $\varrho\sigma\kappa$ . Es läßt sich dann nachweisen, daß  $\kappa$  stets Relativnorm von einer Zahl aus  $K'$  ist, was zum Beweise unseres Satzes genügt. Diesen Nachweis kann man ganz analog wie für ungerades  $l$  führen, da  $\pi$  total positiv und daher die früher mit  $n$  bezeichnete Zahl für den Körper  $K'(\sqrt{\pi}, k)$  Null ist. Es genügt deshalb der einfache Hinweis auf Teil II, § 7 u. 8, wo die analogen Untersuchungen durchgeführt sind\*).

## § 6.

### Das Hilbertsche quadratische Reziprozitätsgesetz.

Wir sind jetzt imstande, den folgenden abschließenden Satz allgemein zu beweisen:

Satz 17. (*Hilbertsches quadratisches Reziprozitätsgesetz.*) Sind  $\mu, \nu$  zwei beliebige ganze Zahlen eines Körpers  $k$ , so ist

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

wo das Produkt über alle Primideale  $\mathfrak{w}$  aus  $k$  und die Symbole  $1^{(i)}$  zu erstrecken ist.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, wenn  $\mu$  total positiv ist, genau so wie für ungerades  $l$  (vgl. Teil II, § 9). Wir haben daher hier nur den Fall zu betrachten, daß  $\mu$  nicht total positiv ist.

Wir bezeichnen das System der reellen konjugierten Körper von  $k$  (mit eventuellem Einschluß von  $k$ ) mit  $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(i)}$  und führen nun den Nachweis schrittweise.

a) Es sei  $\mu$  primär,  $\nu$  sei zu 2 und  $\mu$  prim; von den konjugierten von  $\mu$  und  $\nu$  seien nur die in  $k^{(i)}$  negativ, alle übrigen konjugierten in den Körpern  $k^{(1)}, \dots, k^{(i-1)}, k^{(i+1)}, \dots, k^{(s)}$  positiv. Wir betrachten dann den Körper  $K = (\sqrt{-\mu\nu}, k)$ , der nebst allen konjugierten imaginär ist.

\*) An der bezeichneten Stelle ist auf S. 375, Z. 8 v. u. anstatt  $\mu = \kappa = q^n q'^l$  zu lesen  $\mu = \kappa = \mathfrak{l}_i^n q^n q'^l$ .

In  $K$  wird  $(\mu) = \mathfrak{M}^2$ ,  $(\nu) = \mathfrak{N}^2$ , und es ist deshalb  $\mu$  eine singuläre Primärzahl in  $K$  und  $-\nu$  eine mit  $\mu$  gleichberechtigte, weil

$$-\nu \cdot \mu = (\sqrt{-\mu\nu})^2.$$

Wegen  $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} \sim 1$  folgt dann nach § 2

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{N}}\right)_K = \left(\frac{-\nu}{\mathfrak{M}}\right)_K$$

und somit nach § 3

$$(20) \quad \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_k = \left(\frac{-\nu}{\mu}\right)_k.$$

Es ist nun

$$\left(\frac{-1}{\mu}\right)_k = -1.$$

Denn bezeichnet man die Norm des Ideals  $(\mu)$  mit  $m$ , so ist die Norm der Zahl  $\mu$  gleich  $-m$ , weil unter den Zahlen  $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(s)}$  genau eine negative vorhanden ist. Mit  $\mu$  muß auch die Norm  $-m$  primär sein; es gilt also  $-m \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $m \equiv 3 \pmod{4}$ . Daraus folgt aber  $\left(\frac{-1}{\mu}\right) = -1$  und deshalb nach (20)  $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_k \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_k = -1$ . Das Produkt  $\prod_{(iv)} \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right)$  erhält deshalb den Wert  $+1$ , da unter den Symbolen  $\left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$  genau eins den Wert  $-1$  hat.

b) Es sei wieder  $\mu$  primär,  $\nu$  zu 2 und  $\mu$  prim. Von den konjugierten zu  $\mu$  und  $\nu$  in den Körpern  $k^{(1)}, \dots, k^{(s)}$  seien nur  $\mu^{(i)}$  und  $\nu^{(j)}$  negativ ( $i \neq j$ ). Wir betrachten dann den Körper  $K = (k, \sqrt{-\nu})$ . In  $K$  ist  $\mu$  eine total positive primäre Zahl und demnach nach Satz 7:

$$\left(\frac{\sqrt{-\nu}}{\mu}\right)_K = \left(\frac{\mu}{\sqrt{-\nu}}\right)_K,$$

daher auch nach § 3

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_k = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_k.$$

Es ist somit auch in diesem Falle  $\prod_{(iv)} \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) = 1$ , weil alle Symbole

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right) = +1 \text{ sind.}$$

c) Es seien  $\mu$  und  $\nu$  zwei beliebige ganze Zahlen. Es seien dann  $\mu_i, \nu_i$  primäre Zahlen mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mu_i^{(i)} < 0 & \quad \mu_i^{(j)} > 0 \\ \nu_i^{(i)} < 0 & \quad \nu_i^{(j)} > 0; \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s; i \neq j)$$

ferner seien alle Zahlen  $\nu_1, \dots, \nu_s$  zu  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  prim. Man kann dann zwei Exponentensysteme  $e_i, f_i$  so bestimmen, daß



$$\mu \mu_1^{e_1} \cdots \mu_s^{e_s} = \mu' \quad \text{und} \quad \nu \nu_1^{f_1} \cdots \nu_s^{f_s} = \nu'$$

total positive Zahlen werden. Es gilt dann:

$$1 = \prod \left( \frac{\nu, \mu'}{\mathfrak{w}} \right) = \prod \left( \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) \cdot \prod \left( \frac{\nu, \mu_1^{e_1} \cdots \mu_s^{e_s}}{\mathfrak{w}} \right).$$

Um also nachzuweisen, daß  $\prod_{(\mathfrak{w})} \left( \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1$ , genügt der Nachweis, daß

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left( \frac{\nu, \mu_i^{e_i}}{\mathfrak{w}} \right) = 1. \quad \text{Da weiter}$$

$$1 = \prod_{(\mathfrak{w})} \left( \frac{\mu_i^{e_i}, \nu'}{\mathfrak{w}} \right) = \prod_{(\mathfrak{w})} \left( \frac{\nu', \mu_i^{e_i}}{\mathfrak{w}} \right) = \prod \left( \frac{\nu, \mu_i^{e_i}}{\mathfrak{w}} \right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})} \left( \frac{\nu_1^{f_1} \cdots \nu_s^{f_s}, \mu_i^{e_i}}{\mathfrak{w}} \right)$$

genügt es zu zeigen, daß

$$\prod \left( \frac{\nu_j^{f_j}, \mu_i^{e_i}}{\mathfrak{w}} \right) = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, s).$$

Das ist aber unter a) und b) geschehen. Es ist daher der Beweis des Satzes 17 vollständig erbracht.

Es hat schließlich keine Schwierigkeit, auch die weiteren Entwicklungen der Theorie, auf die im einzelnen nicht mehr eingegangen werden soll, allgemein zu beweisen. Es sei nur erwähnt, daß man zunächst den Satz über die Existenz der Geschlechter allgemein als gültig nachweist. Sodann zeigt man, daß jeder Komplex des Hauptgeschlechts Quadrat eines Komplexes ist, und hieraus folgt dann

Satz 18. Sind  $\mu, \nu$  zwei ganze Zahlen eines Körpers  $k$ , und ist

$$\left( \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1,$$

wo  $\mathfrak{w}$  alle Primideale in  $k$  und die Symbole  $1^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) durchläuft, so ist  $\nu$  Relativnorm einer Zahl des Körpers  $(\sqrt{\mu}, k)$ .