

Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

In der fundamentalen Begründung der Invariantentheorie, durch welche Herr *Aronhold* dieses ganze Gebiet auf ein einziges, von jeder Willkürlichkeit befreites und der grössten Ausdehnung fähiges Princip zurückgeführt hat, wirft sich das Hauptgewicht auf die Frage, *wie gross für eine gegebene homogene Function in einem System von Grundformen die Anzahl derselben vorausgesetzt werden darf, wenn dasselbe nur voneinander unabhängige enthalten soll*, weil nur bei gesicherter Kenntniss dieser Fundamentalzahlen beurtheilt werden kann, ob gegebene Functionen F und F' durch lineare Substitutionen ineinander transformirt werden können, und durch wieviel Substitutionen dies erreicht werden kann.

Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten einer homogenen Function, mit welcher alle übrigen Fundamentalzahlen gegeben sind, ist bis jetzt auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt worden, zuerst durch Abzählung der Transformationsbedingungen und der zu eliminirenden Substitutionscoefficienten, dann mittelst der partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie. Bemerkenswerthe und den allgemeinen Fall bildende Abweichungen von den bei diesen Beweisen vorausgesetzten Verhältnissen, welche sich mir bei andern Untersuchungen darbieten, haben mir gezeigt, dass beide Beweise unzureichend sind und übereinstimmend das voraussetzen, was sich bei genauerer Betrachtung als die Hauptfrage für den zu leistenden Beweis herausstellt.

Bezeichnet (n, p) die Anzahl der Coefficienten einer homogenen Function F vom p^{ten} Grade und n Variabeln, so ist (n, p) auch die Anzahl der Bedingungen für die Transformation dieser Function in eine andere mittelst einer gegebenen linearen Substitution. Durch Elimination der $n.n$ Substitutionscoefficienten ergeben sich die Transformationsrelationen, also die absoluten Invarianten von F .

Nimmt man nun an, unter den ursprünglichen Transformationsbedingungen lasse sich eine Gruppe von $n.n$ Gleichungen auswählen, *welche in Bezug auf*

die Substitutionscoefficienten voneinander unabhängig sind, so wird die Anzahl der Transformationsrelationen, also der absoluten Invarianten

$$\omega = (n, p) - n^2.$$

Wenn aber eine solche Gruppe von $n.n$ Gleichungen nicht existiren sollte, so würde mit Rücksicht auf den Umstand, dass die ursprünglichen Transformationsbedingungen bei der von ihnen geforderten Wahl von F' nie auf einen Widerspruch führen können, folgen, dass bei der Transformation von F in eine mit möglichst viel willkürlichen Coefficienten versehene Function F'

1) nicht alle Substitutionscoefficienten bestimmte Werthe erlangen, sondern eine Anzahl μ derselben willkürlich bleibt, und in Folge dessen

2) die Anzahl der Transformationsrelationen um μ Einheiten grösser ist als die durch Abzählen gefundene normalmässige Anzahl $\omega = (n, p) - n^2$ derselben.

Es würden demnach auch die merkwürdigen Folgerungen wegfallen, oder einer durchgreifenden Modification bedürfen, welche sich in der Lehre von den zugehörigen Formen und den Covarianten an die Voraussetzung knüpfen, dass durch das Resultat der Transformation die anzuwendende Substitution völlig bestimmt sei.

Im 65^{ten} Bande dieses Journals pag. 267 ist die Frage nach der Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten von der Untersuchung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$D_{ik} II = 0$$

abhängig gemacht worden, denen alle absoluten Invarianten und nur solche genügen, und gezeigt worden, dass jede Gleichung, welche sich aus diesen $n.n$ Gleichungen durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten ergibt, aus Gleichungen des Systems auch linear zusammengesetzt werden kann. Dieser Nachweis reicht jedoch zu der daraus gezogenen Folgerung nicht aus, indem die übrigen Sätze, auf welche diese sich stützt, eine Bedingung enthalten, welche in jedem besondern Falle als erfüllt nachgewiesen werden muss.

Wenn ein System linearer und in den Derivirten homogener Differentialgleichungen erster Ordnung, wie das obige, durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten nur auf Combinationen der ursprünglichen Gleichungen führt, so nenne ich dasselbe ein *vollständiges*, und schliesse dabei absichtlich den Fall nicht aus, wo in dem System selbst auch noch Gleichungen enthalten sind, welche aus andern linear folgen; solche Gleichungen nenne ich *überzählige*.

Befreit man ein vollständiges System von seinen überzähligen Gleichungen, so hört es nicht auf, ein vollständiges zu sein.

Ein von allen überzähligen Gleichungen befreites vollständiges System hat stets soviel, und niemals mehr voneinander unabhängige Lösungen, als die Anzahl der Variabeln, vermindert um die Anzahl der Gleichungen beträgt.

Ist daher in einem vollständigen System: N die Anzahl der Variabeln, M die Anzahl der Gleichungen überhaupt und μ die Anzahl der überzähligen, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen $= N - M + \mu$.

Wenn daher in obigem System von Differentialgleichungen die Anzahl der überzähligen μ ist, so folgt:

1) Die Anzahl der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten von F , d. i. die Anzahl der Transformationsrelationen ist $(n, p) - n^2 + \mu = \omega + \mu$, also um μ Einheiten grösser als die durch Abzählen gefundene normalmässige;

2) bei der Transformation von F in F' können daher $n^2 - \mu$ Coefficienten von F' willkürlich angenommen werden, und dann schon sind die übrigen bestimmt;

3) bei dieser Transformation bleiben μ Substitutionscoefficienten willkürlich.

Aus diesen Erörterungen in Verbindung mit den Vorangehenden ergibt sich zur Genüge nicht blos die Nothwendigkeit einer genauen Bestimmung der Zahl μ , sondern auch, dass hier der Schwerpunkt aller Zahlenbestimmungen der Invariantentheorie liegt. Auf der andern Seite ist es klar, dass eine besondere Untersuchung über die Zahl μ nur in dem Falle überflüssig sein würde, wo die Grundformen entweder unmittelbar aus den ursprünglichen Transformationsbedingungen, oder durch directe Integration der partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden, weil nur in einem dieser Fälle die genaue Anzahl der Transformationsrelationen sich von selbst ergibt.

Die Zahl μ kann durch die Lösung der Aufgabe gefunden werden, $n \cdot n$ Coefficienten λ so zu bestimmen, dass für jede beliebige Function Π

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Pi$$

Null wird, indem μ die Anzahl derjenigen λ ist, welche hierbei willkürlich bleiben. Vermöge der Willkürlichkeit von Π ergeben sich hieraus (n, p) Gleichungen, welche man erhält, indem man nacheinander Π durch die verschiedenen Coefficienten von F ersetzt.

Wäre man im Stande, unter diesen (n, p) Gleichungen irgend eine

Gruppe von $n.n$ Gleichungen zu ermitteln, von denen sich beweisen lässt, dass ihre Determinante von Null verschieden ist, so würde jedes $\lambda = 0$ folgen, also auf dem directesten Wege bewiesen sein, dass $\mu = 0$ ist.

Bei einer allgemeinen Begründung der Invariantentheorie hindert aber nichts, die auf vorstehende Art definirte Zahl μ vorläufig in der Theorie mitzuführen, bis sich bequeme Hülfsmittel zu ihrer allgemeinen Bestimmung darbieten, und diese finden sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, für die homogenen Functionen in der Lehre von den zugehörigen Formen, welche den Beweis des Satzes, dass für $p > 2$ stets $\mu = 0$ ist, ohne Schwierigkeit gestattet.

1.

Wir setzen also voraus, dass die Bestimmung der Coefficienten λ auf μ voneinander unabhängige Lösungen

$$\lambda_{ik}^1, \quad \lambda_{ik}^2, \quad . . . \quad \lambda_{ik}^\mu$$

führt, aus denen sich jede andere nach der Formel

$$\lambda_{ik} = \sum_q c_q \lambda_{ik}^q$$

zusammensetzt. Diese besondern Lösungen λ_{ik}^q unterwerfen wir mit Rücksicht auf unsere spätern Untersuchungen der offenbar zulässigen Bedingung, dass sie ausser Coefficienten von F kein anderes willkürliches Element enthalten sollen.

Bei dieser Voraussetzung schliesst man aus der oben nachgewiesenen Anzahl absoluter Invarianten in bekannter Weise, dass die Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten überhaupt

$$\eta = (n, p) - n^2 + \mu + 1$$

ist. Dieser Schluss erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn gar keine absolute Invariante existirt, also für $p > 2$ nur, wenn $n = 2$, $p = 3$ ist. Für diesen Fall hat Herr *Aronhold* durch Integration der Differentialgleichungen gezeigt, dass eine einzige Invariante, also keine absolute existirt, weshalb in diesem Falle $\mu = 0$ ist.

2.

Sei, mit den zugehörigen Polynomialcoefficienten $(\alpha_1 \alpha_2 \dots)$ geschrieben,

$$F = S(\alpha_1 \alpha_2 \dots) a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$$

Um zugehörige Formen mit den Variabeln u_1, u_2, \dots zu finden, erhebt man die lineare Function $U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots$ in die p^{te} Potenz, und sucht In-

varianten der homogenen Function $F + tU^p$, wo t einen constanten Parameter bedeutet. Ist also $\Pi(a_{\alpha_1\alpha_2}\dots)$ eine Invariante von F , und von den u unabhängig, so wird bekanntermassen

$$\Pi' = \Pi(a_{\alpha_1\alpha_2}\dots + tu_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\dots)$$

im weitern Sinne eine zugehörige Form, vorausgesetzt, dass Π' nicht von den Variabeln u , oder bei willkürlichen u nicht vom Parameter t unabhängig ist.

Nun erkennt man durch Differentiiren sofort dass, welche Function der Coefficienten von F allein Π immer bedeuten mag, die aus ihr abgeleitete Π' nur dann bei beliebigen Werthen der u von t unabhängig sein kann, wenn Π selbst von allen a unabhängig ist.

Also liefert jede wirkliche Invariante Π von F auch eine wirkliche zugehörige Form Π' .

Die Anzahl der in Bezug auf die n Variabeln u voneinander unabhängigen zugehörigen Formen kann niemals grösser als n sein. Um die Frage zu entscheiden, wann diese Zahl erreicht wird, betrachten wir vorläufig den Fall, wo F mindestens n von einander unabhängige Invarianten $\Pi_s(a_{\alpha_1\alpha_2}\dots)$ hat, $s = 1, 2, \dots n$. Dann sind die Functionen $\Pi'_s = \Pi_s(a_{\alpha_1\alpha_2}\dots + tu_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\dots)$ nach dem Vorangehenden wirkliche zugehörige Formen. Wären diese in Bezug auf die Variabeln u nicht unabhängig voneinander, so könnte man eine Function f so wählen, dass $f(\Pi'_1, \Pi'_2, \dots \Pi'_n)$ von den u unabhängig, also $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_n)$ würde. Dann aber wäre dieser letztere Ausdruck nach dem Frühern von allen Coefficienten der Function F unabhängig, und $\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_n$ wären keine von einander unabhängige Invarianten.

Aus n voneinander unabhängigen Invarianten erhält man also auch n zugehörige Formen, welche in Bezug auf die Variabeln u voneinander unabhängig sind.

Dies festgestellt, lässt sich leicht zeigen, dass für $p > 2$ selbst unter der Voraussetzung, μ sei nicht Null, die zugehörigen Formen in der normalmässigen Anzahl n vorhanden sein würden, d. h. dass unter den angegebenen Bedingungen die Anzahl der Invarianten $\eta \geq n$ ist.

Wenn nämlich μ von Null verschieden ist, so tritt der ungünstigste Fall für die Erfüllung der Ungleichheit

$$(n, p) - n^2 + \mu + 1 \geq n$$

ein für $\mu = 1$, was

$$(n, p) \geq (n-1)(n+2)$$

gibt. Da ferner die linke Seite, sobald $n > 1$ ist, wegen der Gleichung

$(n, p+1) = (n, p) \left[1 + \frac{n-1}{p+1} \right]$ mit p zugleich wächst, so tritt unter der Voraussetzung, dass $p > 2$ sei, der ungünstigste Fall ein für $p = 3$, was

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \geq (n-1)(n+2)$$

gibt. Durch Beseitigung positiver Factoren kann man dieser Bedingung die Form

$$(n-2)(n-3) \geq 0$$

geben, und dies ist für jedes ganzzahlige n der Fall.

3.

Durch Division mit einer Invariante kann man stets bewirken, dass eine zugehörige Form beim Uebergange zu den transformirten Coefficienten und Variabeln ganz ungeändert bleibt. Solche zugehörige Formen sind durch das Gleichungssystem

$$D_{ik} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k = 0$$

bestimmt.

Man überzeugt sich leicht, dass auch diese Gleichungen ein vollständiges System bilden. Ist daher μ_1 die Anzahl der überzähligen Gleichungen dieses Systems, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen:

$$n + (n, p) - n^2 + \mu_1.$$

Verwendet man aber zu einem vollständigen System voneinander unabhängiger Lösungen der vorstehenden Gleichungen möglichst viel, also $(n, p) - n^2 + \mu$ absolute Invarianten, so bilden die zur Vervollständigung des Systems erforderlichen Lösungen ein System von zugehörigen Formen, welche in Bezug auf die Variabeln u voneinander unabhängig sind, und aus denen sich mit Hinzuziehung von Invarianten jede andere zugehörige Form zusammensetzen lässt.

Die Anzahl der in Bezug auf die Variabeln u voneinander unabhängigen zugehörigen Formen ist demnach:

$$n + \mu_1 - \mu.$$

Wäre nun, immer unter der Voraussetzung $p > 2$ der Fall möglich, dass μ von Null verschieden ist, so würde aus dem Schlusse des vorigen art.

$$\mu_1 = \mu$$

folgen. Lässt sich beweisen, dass hierin ein Widerspruch enthalten ist, so ist bewiesen, dass μ nicht von Null verschieden sein kann.

Der Voraussetzung gemäss ist μ_1 die Anzahl derjenigen λ , welche willkürlich bleiben, wenn man aus dem Ausdrücke

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Psi + \sum_{ik} \lambda_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k$$

alle Derivirten von Ψ eliminirt. Da das erste Glied nur Derivirten nach Coefficienten von F enthält, so muss es für sich verschwinden, also λ_{ik} die in art. 1. angegebene Form

$$\lambda_{ik} = \sum_{\varrho} c_{\varrho} \lambda_{ik}^{\varrho}$$

haben, wo die Grössen λ_{ik}^{ϱ} von allen willkürlichen Elementen, namentlich den u völlig frei sind. Die μ Coefficienten c müssen jetzt so gewählt werden, dass auch das zweite Glied identisch verschwindet. Man erhält also die n Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\varrho} c_{\varrho} \sum_k u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

zwischen den μ Grössen c , und es wird jetzt μ_1 die Anzahl derjenigen c , welche hierbei willkürlich bleiben.

Nimmt man aber an, μ sei von Null verschieden, so muss $\mu_1 = \mu$ sein, also jedes c willkürlich bleiben. Dies ist nicht anders möglich, als wenn für jedes i und ϱ

$$\sum_k u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0$$

ist, und zwar für alle Werthe der unabhängigen Variabeln u_1, u_2, \dots, u_n .

Da aber die Coefficienten λ_{ik}^{ϱ} von den u völlig unabhängig sind, so müssen sie alle Null sein, was mit der Annahme, μ sei von Null verschieden, im Widerspruche steht. Folglich ist, für $p > 2$, diese Annahme selbst unzulässig.

Wenn aber $\mu = 0$ ist, so ist umsomehr $\mu_1 = 0$, da $n - \mu_1 - \mu$ nicht grösser als n , also μ_1 nicht grösser als μ sein kann. Da dies offenbar auch für die Differentialgleichungen der Covarianten gilt, haben wir also den zu beweisenden Satz:

Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten sowie aller übrigen Grundformen ist für jede homogene Function, deren Grad grösser als 2 ist, die normalmässige.

Zürich, 19. December 1867.