Zur Theorie der außerwesentlichen Diskriminantenteiler algebraischer Körper.

Von

E. von Żyliński in Göttingen.

Herr K. Hensel hat in seinen zahlentheoretischen Arbeiten*) folgenden bekannten Satz über die außerwesentlichen Diskriminantenteiler eines algebraischen Körpers aufgestellt:

Es sei:

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1}\,\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_h^{e_h}$$

die Zerlegung einer natürlichen Primzahl p innerhalb des algebraischen Körpers $K(\alpha)$ in Primidealfaktoren, und es mögen die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f, \cdots$ angeben, wie viele unter diesen h verschiedenen Primteilern vom Grade $1, 2, \cdots, f, \cdots$ sind. Es sei weiter:

$$g(f) = \sum_{d\,|\,f} \varepsilon_d\, p^{\frac{f}{d}},$$

wo ε_d die Möbiusschen Koeffizienten in der Kroneckerschen Bezeichnung sind, so ist p dann und nur dann ein außerwesentlicher Teiler aller Gleichungsdiskriminanten von $K(\alpha)$, wenn von den Ungleichungen:

$$\lambda_1 > g(1),\; 2\lambda_2 > g(2),\; \cdots,\; f\lambda_f > g(f),\; \cdots$$

wenigstens eine erfüllt ist.**)

In seiner im Jahre 1908 erschienenen „Theorie der algebraischen Zahlen" S. 291 beweist Herr Hensel auch den Satz:

Eine Primzahl kann nur dann außerwesentlicher Diskriminantenteiler für den Körper n^{ter} Ordnung $K(\alpha)$ sein, wenn sie nicht größer als $\frac{n(n-1)}{2}$ ist;

auf Seite 279—280 desselben Werkes zeigt er aber, daß im Falle, wenn

*) Arithmetische Untersuchungen über Diskriminanten und ihre außerwesentlichen Teiler, Inaug. Diss., Berlin 1884, S. 10; Arithmetische Untersuchungen über außerwesentliche Diskriminantenteiler, J. f. Math. **113**, S. 138; Theorie der algebraischen Zahlen, I, S. 278 und 288.

**) Dieser Satz kann übrigens auch leicht als eine unmittelbare Folgerung aus den Dedekindschen Ergebnissen (Gött. Abh. 23, S. 29 und J. f. Math. 54, S. 21 und 23) betrachtet werden; siehe P. Bachmann, Zahlentheorie, V, S. 276.

die Primzahl p innerhalb des Körpers n^{ter} Ordnung $K(\alpha)$ genau in n Primfaktoren ersten Grades zerlegbar ist, p nur dann außerwesentlicher Diskriminantenteiler von $K(\alpha)$ ist, wenn es kleiner als n ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß überhaupt der Satz gilt:

Eine natürliche Primzahl p kann nur dann ein gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler eines algebraischen Körpers n^{ter} Ordnung $K(\alpha)$ sein, wenn sie kleiner als n ist, d. h. wenn die Ungleichung $p < n$ besteht.

In der Tat, einerseits ist fast evident, daß $g(f)$ ein von Null verschiedenes Multiplum von p ist, also

$$g(f) \geqq p; \tag{1}$$

denn $g(f)$ kann offenbar immer als eine Differenz zweier im p-adischen Zahlensystem geschriebenen ganzen rationalen positiven Zahlen dargestellt werden, wobei der Minuend mehr Ziffern als der Subtrahend hat, also im gewöhnlichen Sinne der größte von den beiden ist.

Andererseits, besteht zwischen der Ordnung n des Körpers, den Graden f der Primzahlteiler $\mathfrak{p}$ und den Exponenten e folgende bekannte Beziehung:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \cdots + e_h f_h = n.$$

Da aber $e_i \geqq 1$, so ist:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_h \leqq n,$$

oder, wenn man die gleichen Grade zusammenfaßt:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + f\lambda_f + \cdots \leqq n;$$

daraus folgt unmittelbar die für jedes f geltende Ungleichung:

$$f\lambda_f \leqq n. \tag{2}$$

Wenn aber p ein außerwesentlicher Diskriminantenteiler des Körpers ist, so besteht nach dem zuerst ausgesprochenen Henselschen Satze sicher eine Ungleichung von der Form:

$$f\lambda_f > g(f),$$

woraus aber mit Rücksicht auf (1) und (2) folgt:

$$n > p,$$

was zu beweisen war.

Aus unserem Satze folgt auch als spezieller Fall die durch die Herren B. Ermakoff*) und F. Levi**) auf zwei verschiedene Weisen bewiesene Tatsache, daß ein kubischer Zahlenkörper nur die Primzahl 2 als außerwesentlichen Diskriminantenteiler besitzen kann.

Göttingen, Juli 1912.

---

*) Mitgeteilt im Math. Seminar an der Universität Kiew im März 1911.

**) Integritätsbereiche und Körper dritten Grades, Inaug. Diss., Straßburg 1911, S. 70.