

## VI. *Zur Theorie der Meereswellen:* *von G. Hagen.*

---

Im Anfange dieses Jahrhunderts machte Franz Gerstner eine Theorie der Wellen bekannt, welche mehrfache Anerkennung im Inlande und Auslande gefunden hat. In Weber's Wellenlehre wird sie nicht nur als eine der einfachsten und erfolgreichsten bezeichnet, sondern sie wird daselbst auch vollständig wiedergegeben und ihre Uebereinstimmung mit einigen Beobachtungen nachgewiesen. Dabei führt Weber zugleich die Bedenken an, die von verschiedenen Seiten dagegen angeregt sind.

Diese Bedenken beziehen sich zunächst darauf, daß Gerstner von den *stehenden Wellen* ausgeht, und die Resultate, die er für diese findet, auf die *fortschreitenden* oder die gewöhnlichen Meeres-Wellen überträgt. In den ersten bleibt aber die Welle unverändert an ihrer Stelle, während das Wasser mit großer Geschwindigkeit hindurchströmt <sup>1)</sup>, bei diesen bewegt sich die Wellenform und das Wasser schwankt nur in geringem Maasse hin und her. Es ist sonach allerdings zweifelhaft, ob die im ersten Fall eintretenden relativen Bewegungen auch im zweiten stattfinden, wo namentlich die Geschwindigkeit der Wassertheilchen keineswegs der Aenderung der Höhe entspricht, worauf Gerstner's Untersuchung sich gründet.

Demnächst stellt Gerstner den Grundsatz auf, daß die Bahn, auf welcher ein Wassertheilchen durch die stehende Welle läuft, überall einem gleichen Drucke ausge-

1) Solche stehende Wellen sieht man häufig unterhalb der Stau-Anlagen in Flüssen, wenn große Wassermassen darüber stürzen. Besonders unter den sogenannten Schiffsdurchlässen pflegen sie sich sehr vollständig auszubilden. Bei Balduinstein an der Lahn, neben dem Schlosse Schaumburg sah man, sobald der frühere Schiffsdurchlaß geöffnet wurde, eine Reihe von stehenden Wellen hinter einander, von denen die erste 6 Fuß hoch war.

setzt ist. Der dafür angegebene Grund, dafs nämlich durch den constanten Druck der Weg bedingt sey, ist nicht überzeugend. Der ganzen Theorie unbeschadet hätte indessen diese Bedingung nicht als Gesetz, sondern als Voraussetzung eingeführt werden können. Jedenfalls mufs von derselben ausgegangen werden, wenn die Bewegung der obern Schicht und aller darunter liegenden durch dasselbe einfache Gesetz umfaßt werden soll. Die Resultate verlieren bei dieser Auffassung freilich an allgemeiner Gültigkeit, denn sie beweisen nur, dafs in diesem Falle die Wellenbewegung möglich ist, aber nicht, dafs sie immer in dieser Weise eintreten mufs.

Endlich ist die ganze Untersuchung zwar elementär gehalten, aber keineswegs einfach und übersichtlich, und die vielfachen Wechsel in den Bezeichnungen erschweren das Verständniß, während manche Theile, wie etwa die Bestimmung der variablen Dicke einer Schicht, der nöthigen Schärfe entbehren.

Die nachstehende Herleitung, welche genau zu denselben Resultaten führt, bezieht sich unmittelbar auf die fortschreitende Welle und faßt die Bewegung des Wassers so auf, wie sie sich nach den Erfahrungen und Beobachtungen wirklich darstellt. Diese Erfahrungen sind:

1. Die Welle bewegt sich nicht stofsweise, sondern mit constanter Geschwindigkeit und zwar in einer Richtung, die mit der Richtung ihres Rückens oder ihrer Breite einen rechten Winkel macht.

2. Die Abstände der aufeinander folgenden Wellen, oder die Längen derselben, sind gleich grofs, wenn auch die verschiedenen Wellen-Systeme, die sich immer neben einander bilden, viele zufällige Störungen veranlassen.

3. Im offenen Meere nimmt das Wasser an der Bewegung der Welle nur in geringem Maafse Theil. Wenn man sich auf einem vor Anker liegenden Schiffe befindet, sieht man schwimmende Körper, die nicht etwa vom Winde gefaßt werden, dauernd an derselben Stelle bleiben. Sie heben und senken sich mit der Welle, werden vom Scheitel

der Welle fortgestoßen und treiben alsdann wieder zurück. Sie bewegen sich also in geschlossenen Curven, die in Vertical-Ebenen liegen.

4. Ein heftiger Wellenschlag veranlaßt nach vielen Erfahrungen bis zu großer Tiefe noch eine merkliche Bewegung des Wassers, doch ist dieselbe schon in mäßiger Tiefe viel geringer, als an der Oberfläche.

5. Wenn in offenen Meere ein heftiger Wellenschlag eingetreten ist, so dauert derselbe halbe und ganze Tage hindurch fort, wenn auch der Wind, der ihn veranlaßte, vollständig aufhört. Man muß hiernach annehmen, daß die Reibung der Wassertheilchen gegeneinander sehr geringe, und ihre Bewegung nicht von der Art, wie in Flußbetten ist, wo die lebendige Kraft durch die inneren Bewegungen in kürzester Frist zerstört wird, vielmehr ist hier ein regelmäßiges Verschieben dünner Schichten <sup>1)</sup> vorauszusetzen, wie in sehr engen Röhren. Aus der nachstehenden Untersuchung ergibt sich auch, daß die einander berührenden Wassertheilchen sich bei der Wellenbewegung gar nicht trennen, sondern nur unendlich wenig sich an einander hin- und herschieben, wodurch die Reibung wahrscheinlich hier noch geringer bleibt, als sie in engen Röhren ist. Die Voraussetzung einer solchen regelmäßigen Bewegung, die alle Wirbel und dergleichen ausschließt, ist um so wahrscheinlicher, als die Erfahrung es bestätigt, daß im wärmeren Wasser unter übrigens gleichen Umständen die Wellen sich viel vollständiger ausbilden, als im kälteren.

Wenn man von diesen Erfahrungen ausgeht, und namentlich die freie, ungehinderte Bewegung jedes einzelnen Wassertheilchens berücksichtigt, so rechtfertigt sich die Voraussetzung, daß alle unter einander liegenden Theilchen

1) Beobachtungen über diese Art der Bewegung des Wassers und zwar mit Rücksicht auf verschiedene Temperaturen habe ich in diesen Ann. Bd. 44, und vollständiger in den Abhandlungen der Academie der Wissenschaften 1854 mitgetheilt. Die daselbst gefundenen Resultate schließen sich ziemlich übereinstimmend an diejenigen an, die Poiseuille (Bd. 58 dieser Ann.) dargestellt hat.

übereinstimmende Bahnen durchlaufen, ihre Bewegungen also durch dieselben Gesetze bedingt werden, Es wird aus diesem Grunde auch wahrscheinlich, daß die unendlich dünnen Schichten in der Welle, welche diese Bahnen bezeichnen, gleichmäfsig auf einander wirken; daß also, wie in der Oberfläche der Welle der Druck gleich Null, also constant ist, so auch in der ganzen Ausdehnung einer jeden Gränze zwischen je zwei Schichten ein constanter Druck stattfinde. Die unteren Schichten werden freilich stärker gedrückt; da jedoch das Wasser, soweit die Erfahrungen reichen, unter jedem Drucke seine volle Beweglichkeit behält, so befindet sich unter Voraussetzung dieses constanten Druckes die Schicht in der Oberfläche in demselben mechanischem Verhältnisse, wie jede darunter liegende.

Es ist zu untersuchen, ob durch diese Voraussetzung die Wellenbewegung sich erklären läfst, und ob die daraus sich ergebenden Resultate mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Legt man eine Vertical-Ebene durch die Richtung der Bewegung der Welle, so wird das Profil der letzteren sich in dieser Ebene darstellen, und die Wege, welche die einzelnen darin befindlichen Wassertheilchen zurücklegen, werden gleichfalls in sie fallen. Die Curve, in welcher ein beliebiges Wassertheilchen beim Vorübergange einer Welle sich bewegt, sey durch die Coordinaten  $x$  und  $y$  bezeichnet. Der Anfangspunkt beider befinde sich im oberen Scheitel der Curve, also in der fortschreitenden Vertical-Linie, die durch den Scheitel der Welle gezogen ist. Die horizontale Abscisse  $x$  werde der Richtung der Bewegung der Welle entgegen gemessen, und die verticale Ordinate  $y$  zähle abwärts.  $c$  sey die Geschwindigkeit der Welle, und das Bogen-Element  $\partial s$  sey unter dem Winkel  $\varphi$  gegen den Horizont geneigt. Die wirkliche Geschwindigkeit des auf  $\partial s$  treffenden Wassertheilchens  $\partial M$  sey dagegen  $v$  und die Tangente seiner Bahn mache mit dem Horizonte den Winkel  $\alpha$ . Der zu diesem Bahn-Elemente gehörige Krümmungshalbmesser sey  $\rho$ . Als constant werden nur  $c$  und

$\partial M$  angenommen, letzteres ist dem gleichfalls constanten Zeit-Element  $\partial t$  proportional.

In der Zeit  $\partial t$  verändert sich der Abstand des Wassertheilchens  $\partial M$  vom Anfangspunkte der Coordinaten in verticaler und horizontaler Richtung um:

$$\partial y = v \sin \alpha \cdot \partial t$$

und

$$\partial x = c \partial t - v \cos \alpha \cdot \partial t$$

daher

$$\partial s = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv \cos \alpha} \cdot \partial t$$

Ferner ist

$$\sin \varphi = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{v^2} - 2\frac{c}{v} \cos \alpha\right)}}$$

Auf das Wassertheilchen  $\partial M$  wirken:

- 1) sein eigenes Gewicht  $= \gamma \partial M$
- 2) Die Centrifugal-Kraft  $= \frac{v^2}{2g\varrho} \gamma \partial M$ . Die Richtung derselben macht mit dem Lothe den Winkel  $\alpha$ .
- 3) Der Gegendruck der darunter befindlichen Schicht. Wenn derselbe auf die Längen-Einheit gleich  $k$  ist, so wird er gegen das Theilchen  $\partial M$ , das sich über das Bogen-Element  $\partial s$  ausbreitet, einen Druck

$$k \partial s = k \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv \cos \alpha} \partial t$$

ausüben. Derselbe ist unter dem Winkel  $\varphi$  gegen das Loth geneigt.

Die Componente aus 1) und 2) ist gleich

$$\sqrt{\left(1 + \frac{v^4}{4g^2\varrho^2} - \frac{v^2}{g\varrho} \cos \alpha\right)} \gamma \partial M$$

und wenn ihre Richtung gegen das Loth durch  $\psi$  bezeichnet wird, so ist

$$\sin \psi = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\left(1 + \frac{4g^2\varrho^2}{v^4} - \frac{4g\varrho}{v^2} \cos \alpha\right)}}$$

Man bemerkt sogleich, daß  $\sin \varphi$  und  $\sin \psi$  einander gleich sind, wenn

$$c = \frac{2g\varrho}{v}$$

Eben so ist die Componente auch dem unter (3) angegebenen Gegendrucke gleich, sobald außerdem noch

$$k = \frac{\gamma \partial M}{c \partial t}.$$

Die drei erwähnten Pressungen, die das Theilchen  $\partial M$  aus seiner Bahn zu entfernen oder seine Geschwindigkeit zu verändern streben, heben sich daher vollständig auf, wenn  $c$  und  $k$  die angegebenen Werthe haben.  $k$  ist augenscheinlich nichts Anderes, als der Druck den die aus den Wassertheilchen  $\partial M$  zusammengesetzte dünne Schicht auf die Längeneinheit, (bei der willkürlich anzunehmenden Breite) ausüben würde, wenn die Wellenlinie in eine gerade und horizontale Linie überginge, also wenn  $\partial s = c \partial t$  würde. In diesem Falle ist  $\frac{k}{\gamma} = \frac{\partial M}{\partial s}$  der Ausdruck für die Höhe der Schicht.

Der obige Werth für  $c$  ist besonders wichtig. Indem  $c$  constant ist, so muß auch  $\frac{\rho}{v}$  constant seyn. Wenn aber die äußeren Kräfte sich gegenseitig aufheben, so bleibt  $v$  unverändert und  $\rho$  ist gleichfalls constant. Das Wassertheilchen  $\partial M$  bewegt sich also *in einem Kreise*.

$\alpha$  ist hiernach der Centriwinkel zwischen dem Lothe und dem nach  $\partial M$  gezogenen Radius  $\rho$ , den ich nunmehr gleich  $b$  setze. Hieraus ergibt sich

$$v = b \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

und wenn ich analog auch

$$c = a \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

setze, so verwandelt sich der Ausdruck

$$c = \frac{2g\rho}{v}$$

in

$$\partial t = \sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \partial \alpha$$

Für die ganze Länge der Welle von einem oberen Scheitel bis zum nächsten, oder von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = 2\pi$  ist

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}} \cdot \pi$$

die Geschwindigkeit der Welle ist hiernach

$$c = \sqrt{2ag}$$

oder so groß, wie die Endgeschwindigkeit eines von der Höhe  $\frac{1}{2}a$  frei herabfallenden Körpers. Ein Pendel von der Länge  $a$  macht eine doppelte Schwingung oder kehrt zu dem Anfangspunkt seiner Bewegung in derselben Zeit zurück, in der die Welle vorbeiläuft.

Führt man statt  $c$  und  $v$  deren Werthe  $a \frac{\partial \alpha}{\partial t}$  und  $b \frac{\partial \alpha}{\partial t}$  in die obigen Ausdrücke für  $\partial y$  und  $\partial x$  ein, so erhält man

$$\partial y = b \sin \alpha \cdot \partial \alpha$$

$$\partial x = (a - b \cos \alpha) \partial \alpha$$

folglich

$$y = b - b \cos \alpha$$

$$x = a\alpha - b \sin \alpha$$

Die Curve ist sonach eine Cykloide, welche beschrieben wird, indem ein Kreis vom Halbmesser  $a$  längs einer geraden Linie rollt, während der zeichnende Stift im Abstände  $b$  vom Mittelpunkte angebracht ist. Die Ordinaten  $y$  sind, wie vorausgesetzt wurde, in diesem Ausdrücke vom obern Scheitel der Curve an gemessen; wenn man sie bis zur Leitlinie verlängert, so wird

$$y = a - b \cos \alpha$$

Bisher ist nur eine einzelne Wellen-Linie in beliebiger Tiefe unabhängig von den übrigen betrachtet worden. Es entsteht nunmehr die Frage, welche Aenderungen der Constanten eintreten müssen, um die darüber und darunter befindlichen Wellen-Linien darzustellen. Jedenfalls ist anzunehmen, daß die in den verschiedenen Schichten übereinander liegenden Wassertheilchen sich möglichst übereinstimmend heben und senken und hin- und herbewegen, weil sie sonst eine starke Reibung gegen einander ausüben würden. Der Radius  $a$  muß daher in allen diesen Curven derselbe bleiben und die Anfangspunkte der Abscissen oder die oberen Scheitel müssen sämmtlich in dieselben Verticallinien fallen. In jenen Gleichungen kann sich sonach nur  $b$  und die Constante in dem Ausdrücke von  $y$  ändern.

Betrachtet man zwei Cycloïden, die so nahe übereinanderliegen, dafs die in jedem Querschnitte befindlichen Wassertheilchen sich mit gleicher Geschwindigkeit und in gleicher Richtung bewegen, so mufs die relative Geschwindigkeit, mit der sie die Welle durchlaufen, an jeder Stelle dem Querschnitte der Schicht umgekehrt proportional seyn, weil sonst entweder die Querschnitte nicht gefüllt würden, oder sie für die hindurchgehende Wassermenge nicht den nöthigen Raum bieten könnten.

Die Differenziale, welche den Uebergang aus einer Curve in die andere angeben, mögen durch  $\delta$  bezeichnet werden.  $\delta r$  sey der Höhenunterschied der beiden zugehörigen Leitlinien und  $\delta b$  die Aenderung des Radius  $b$ . Liegt die zweite Curve unter der ersten, so ist  $\delta r$  positiv und  $\delta b$  negativ.

Der Abstand beider Curven von einander im oberen Scheitel ist gleich der Summe, im unteren Scheitel dagegen gleich der Differenz dieser beiden Differentiale, wenn beide in ihrer absoluten Gröfse betrachtet werden. Mit Rücksicht auf die algebraischen Zeichen ist jener dagegen  $\delta r - \delta b$  und dieser  $\delta r + \delta b$ . Indem ferner das Zeitelement  $\delta t$  als constant angenommen wird, so ist  $\partial s$  oder der Weg, den das Wassertheilchen in der vorbeilaufenden Welle beschreibt, der relativen Geschwindigkeit desselben proportional. Die Werthe von  $\partial s$  im oberen und unteren Scheitel sind aber  $(a - b) \partial \alpha$  und  $(a + b) \partial \alpha$ . Man hat daher

folglich 
$$(\delta r - \delta b)(a - b) = (\delta r + \delta b)(a + b)$$

$$\delta r = - \frac{a}{b} \delta b$$

Man wähle demnächst in denselben beiden Curven beliebig zwei andere Punkte, die zu demselben  $x$  gehören, so ist

$$\delta x = \delta(a \alpha - b \sin \alpha) = 0$$

und hieraus folgt, indem der Winkel für beide Punkte nicht derselbe ist

$$\delta \alpha = \frac{\sin \alpha}{a - b \cos \alpha} \delta b$$



Der Höhenunterschied zwischen diesen Punkten ist

$$\begin{aligned}\delta y &= \delta r + \delta(a - b \cos \alpha) \\ &= \delta r + b \sin \alpha \cdot \delta \alpha + \cos \alpha \cdot \delta b\end{aligned}$$

Setzt man für  $\delta r$  und  $\delta \alpha$  die vorstehenden Werthe, so erhält man

$$\delta y = - \frac{a^2 - b^2}{b(a - b \cos \alpha)} \delta b$$

Die Dicke der Schicht an dieser Stelle ist daher

$$\cos \varphi \cdot \delta y = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \delta y$$

und das Product aus derselben in die relative Geschwindigkeit oder in  $\partial s$

$$\begin{aligned}\partial x \cdot \delta y &= - \frac{a^2 - b^2}{b} \partial \alpha \cdot \delta b \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a} \partial \alpha \cdot \delta r\end{aligned}$$

Indem nun  $\partial \alpha$  eben so, wie  $\partial t$  constant ist, so enthält dieser Ausdruck nur constante Gröſsen und ist von dem Winkel  $\alpha$  ganz unabhängig. Das Product aus der relativen Geschwindigkeit in den Querschnitt ist sonach in der ganzen Ausdehnung der Schicht constant, und die angegebene Bewegung des Wassers entspricht daher auch den räumlichen Verhältnissen eben so vollständig, wie sie sich den mechanischen Gesetzen anschloß.

Es bleibt endlich noch zu untersuchen, in welchem Maafse der Radius  $b$  in den tiefer liegenden Schichten kleiner wird. Aus der Gleichung

$$\delta r = - \frac{a}{b} \delta b$$

folgt

$$r = - a \log \text{nat } b + C$$

Zählt man die Tiefen  $r$  von derjenigen Leitlinie ab, die zur gewöhnlichen Cycloïde gehört, so wird

$$C = a \log \text{nat } a$$

also

$$r = a \log \text{nat } \frac{a}{b}$$

und

$$b = a e^{-\frac{r}{a}}$$

$b$  nimmt anfangs ziemlich schnell ab, doch wird es erst in unendlicher Tiefe gleich Null, die Wellenbewegung setzt sich also, wenn auch nur sehr schwach, doch jedesmal bis zur größten Tiefe fort.

Man findet

für $r =$	$a$	$b = 0,367880 . a$
$= 2 . a$		$= 0,135332 . a$
$= 3 . a$		$= 0,049787 . a$
$= 4 . a$		$= 0,018316 . a$
$= 5 . a$		$= 0,006738 . a$
$= 6 . a$		$= 0,002479 . a$
$= 7 . a$		$= 0,000912 . a$
$= 8 . a$		$= 0,000335 . a$
$= 9 . a$		$= 0,000123 . a$
$= 10 . a$		$= 0,000045 . a$

Die *stehende Welle* bleibt unverändert an ihrer Stelle, und das hindurchfließende Wasser bildet sie, indem durch Verminderung und Vergrößerung der Geschwindigkeit die Querschnitte anschwellen oder sich zusammenziehen. In diesem Falle müssen aber die Geschwindigkeiten nach dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft dem Steigen oder Fallen der Wassertheilchen entsprechen. Dieses findet in den vorstehend betrachteten Cykloiden wirklich statt. Die Geschwindigkeit ist nämlich, wenn  $\partial t$  und  $\partial \alpha$  wieder als constant betrachtet werden,

$$u = \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

aber 
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

daher die zu  $u$  gehörige Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{u^2}{4g}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}{2a}$$

$$= y - \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

Wenn man also die Horizontale, von welcher ab die  $y$  gemessen werden, um  $\frac{a^2 - b^2}{2a}$  tiefer, als die Leitlinie legt, so stellen die senkrechten Ordinaten unmittelbar die Höhen dar, welche den frei herabfallenden Körpern eben so große Geschwindigkeiten geben, als das Wasser an allen Stellen der Curve wirklich hat.

Die Untersuchung über die Dicke der verschiedenen Stellen jeder Schicht und über die Abnahme des Werthes von  $b$  in größeren Tiefen, finden auch auf die stehenden Wellen volle Anwendung, da dieselben Linien die Grenzen der Schichten bezeichnen.

Die fortschreitenden und die stehenden Wellen sind demnach analoge Erscheinungen, welche durch dieselben Gesetze bedingt werden. Die stehenden Wellen bilden sich, wenn das Wasser in Bewegung, oder in dauernder Strömung begriffen ist, die fortschreitenden dagegen, wenn dem stehenden Wasser vorübergehende Impulse ertheilt werden, also wenn seine Bewegung beginnt, oder aufhört. Läßt man einen Wasserstrahl in ein Gefäß mit Wasser fallen und zwar unter so großem Drucke, oder aus so mässiger Höhe, daß er bei Berührung der Oberfläche noch vollständig zusammenhängt, so bleibt die Wasserfläche in Ruhe, und nur neben dem Strahle bildet sich eine schwache stehende Welle, die man an der Spiegelung erkennt. Sobald dagegen im Speisebassin der Druck sich so vermindert hat, daß in dem Strahle, wenn er die Oberfläche berührt, schon die Tropfenbildung beginnt, so verschwindet augenblicklich die bisherige Ruhe der Oberfläche und die kreisförmigen Wellen durchlaufen sie.

Auch flexible Körper stellen bekanntlich Wellen dar, und überraschend ist die Aehnlichkeit zwischen der Bewegung eines von starkem Winde getroffenen, in Aehren stehenden Getreidefeldes und dem Wellenschlage des Meeres. Beide Erscheinungen sind aber in der That nicht nur im Aeußern übereinstimmend, sondern wesentlich nahe dieselben. In den fortschreitenden Wellen bewegen sich nämlich

die einzelnen Wassertheilchen in Kreisen und zwar schwingt jedes um seine besondere Drehungs-Axe. Das nächst darunter befindliche Theilchen schwingt um eine Axe, die nächst unter der ersten liegt, und es bewegt sich jenem genau entsprechend. Da jedoch auch der Abstand von seiner Axe etwas geringer ist, so schwingt es seitwärts, so wie auch nach oben und unten weniger aus. Betrachtet man nun alle unter einander befindlichen Theilchen, so bilden sie einen aufrecht stehenden Wasserfaden der in unendlicher Tiefe wurzelt und hin- und herpendelt, indem zugleich seine Dicke bei dieser Bewegung zu- oder abnimmt, je nachdem er sich verkürzt oder verlängert. Sobald er den oberen oder unteren Scheitel seiner Bahn erreicht, so steht er senkrecht und ist gerade, während er beim Schwingen nach rechts und links sich krümmt. Der Halm mit der Aehre macht dieselbe Bewegung, und seine Hebung und Senkung erfolgt, indem die schwere Aehre sich aufrichtet und niedersinkt.

Die Bahnen, welche kleine, im Wasser schwebende Körper beim Vorübergehen der Wellen beschreiben, hat Weber beobachtet und gemessen (Wellenlehre, S. 123 und 124). Zwischen den horizontalen und verticalen Durchmesser zeigen sich indessen sehr bedeutende Unterschiede: die verticalen waren jedesmal viel kleiner und etwa in der halben Tiefe wurden sie unmeßbar klein, während die horizontale Bewegung noch sehr merklich blieb. Weber erklärt dieses durch die Nähe des Bodens. Es ist auch klar, daß die Verlängerung und Verkürzung der aufrecht stehenden Wasserfäden die verticale Bewegung allein veranlassen kann, und daß diese um so geringer werden muß, je kürzer der Faden, oder je näher die untersuchte Stelle dem Boden ist.

Weber findet (Seite 370), daß die verticalen Durchmesser der Bahnen ziemlich übereinstimmend mit dem von Gerstner aufgestellten Gesetze abnehmen, da jedoch diesem Vergleiche nur vier Beobachtungen zum Grunde gelegt werden konnten, und noch zwei Constanten, nämlich

$a$  oder der Radius des rollenden Kreises, und der Abstand der ersten Leitlinie von der Oberfläche des Wassers daraus hergeleitet wurden, so ließen sich bedeutende Abweichungen kaum erwarten. Zur Vergleichung der horizontalen Durchmesser können dagegen sechs dieser Beobachtungen benutzt werden, nämlich in den Tiefen von 1, 36, 72, 108, 144 und 180 Linien. Die beiden letzten Beobachtungen derselben Reihe, nämlich in der Tiefe von 216 und 252 Linien, oder 4 und 1 Zoll über dem Boden, zeigen nicht mehr eine Abnahme, sondern eine Vergrößerung der horizontalen Schwankungen, woher sie in der folgenden Rechnung nicht benutzt sind. Aus diesen Beobachtungen findet man nach der Methode der kleinsten Quadrate den Radius  $a$  gleich 133,53 Linien und den Abstand der freien Oberfläche von der ersten Leitlinie, die zur gewöhnlichen Cycloïde gehört, gleich 738,35 Linien. Die Werthe von  $b$  sind:

$r$	$b$ berechnet	$b$ beobachtet	Differenz
739	0,526	0,57	—0,044
774	0,405	0,375	+0,030
810	0,309	0,30	+0,009
846	0,236	0,20	+0,036
882	0,180	0,20	—0,020
918	0,138	0,15	—0,012

Die größte Differenz ist also der 24ste Theil einer Linie, oder bleibt innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler.

Sehr wichtig sind die mehrfach angestellten Messungen der Längen und Geschwindigkeiten der Meereswellen. Sie geben Gelegenheit, die oben gefundene Relation zwischen  $a$  und  $c$  direct zu prüfen. Ich theile sie, soweit sie mir bekannt geworden sind, ohne Ausnahme mit <sup>1)</sup>. Es bedarf aber kaum der Erwähnung, daß eine große Genauigkeit dabei unerreichbar ist, und daß namentlich die Bestimmung der Geschwindigkeit sehr unsicher bleibt, weil

1) *The Civil Engineer and Architect's Journal*. Vol. IX, p. 109. Vol. XI, p. 310 und Vol. XIII, p. 300.

man die einzelnen Wellen niemals weit verfolgen kann, jede derselben vielmehr wegen der verschiedenen gleichzeitigen Wellensysteme sehr bald unkenntlich wird. Die sämtlichen Zahlen bezeichnen Rheinländische Fufse.

I. William Walker stellte in der Bai von Plymouth folgende Beobachtungen an.

Wasser- tiefe	Halbe Höhe = $b$	Geschwin- digkeit = $c$	Länge der Welle = $2a\pi$ .		Relative Differenz
			beob.	ber.	
45	3	36,0	311	260	— 0,16
46	$2\frac{1}{2}$	33,3	170	223	+ 0,31
45	$2\frac{3}{4}$	19,7	107	78	— 0,27
47	4	41,9	335	352	+ 0,05
47	$4\frac{1}{2}$	35,3	335	250	— 0,26
41	—	43,5	437	380	— 0,13
48	—	44,7	447	402	— 0,10
44	13	40,6	430	331	— 0,23
39	—	40,0	396	322	— 0,19
46	—	44,7	335	402	+ 0,20
44	—	35,3	297	250	— 0,16
39	—	37,2	383	278	— 0,27
47	—	35,3	297	250	— 0,16
46	—	41,3	447	343	— 0,23

Nach der Rechnung ergibt sich also die Länge der Welle durchschnittlich um 11 Procent kleiner als nach der Messung.

II. Stanley machte während der Fahrt über das Atlantische Meer auf dem zur Kriegsflotte gehörigen Segelschiffe Rattlesnake mehrere ähnliche Beobachtungen:

Anzahl d. Beobach- tungen	Halbe Höhe = $b$	Geschwin- digkeit = $c$	Länge der Welle		Relative Differenz
			beob.	ber.	
1	11	45,0	321	407	+ 0,27
8	10	40,8	251	335	+ 0,34
6	10	40,0	291	322	+ 0,11
9	—	36,8	219	272	+ 0,24
1	—	36,8	192	272	+ 0,42
6	11	43,7	332	384	+ 0,16
7	$8\frac{1}{2}$	36,7	204	271	+ 0,33

Die Länge der Welle ist also hier nach der Rechnung durchschnittlich um 27 Proc. gröfser als nach der Messung.

III. Endlich hat noch Scoresby auf dem Dampfboote *Hibernia* kurz nach einem sehr heftigen Sturme und zwar mitten im Atlantischen Ocean, während die Wellen durchschnittlich 26 Fufs hoch waren und oft die Höhe von 30 Fufs erreichten, deren Geschwindigkeit = 46,5 und ihre Länge gleich 534 Fufs gefunden. Berechnet man die Länge aus der Geschwindigkeit, so findet man sie nur 435 Fufs. Das Resultat der Rechnung ist sonach in diesem Falle wieder um 19 Proc. zu klein.

Indem diese Beobachtungen bald in dem einen und bald in dem andern Sinne von dem aufgestellten Gesetze bedeutend abweichen, so folgt daraus, wie schon oben bemerkt, dafs sie wenig genau, oder dafs sie mit grofsen Beobachtungsfehlern behaftet sind. Nichtsdestoweniger schlofsen sie sich im Allgemeinen so vollständig an dieses Gesetz an, wie nur irgend erwartet werden konnte.

Ich erwähne schliesslich noch, dafs ich versucht habe, die Geschwindigkeit und Länge der Wellen in dem Schifffahrts-Canale bei Berlin und zwar sowol bei stärkerem, als bei schwächerem Winde zu bestimmen. Die Geschwindigkeit war immer sehr geringe und erreichte niemals 3 Fufs in der Sekunde. Die hieraus hergeleitete Länge der Wellen war aber jedesmal um 20 bis 30 Proc. kleiner, als ich sie gemessen hatte. Die Differenz erklärt sich vielleicht dadurch, dafs die Geschwindigkeit der Welle durch die Widerstände an der Sohle und an den Ufern des Canales merklich vermindert wird.

---