IL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ.

UMBERTO CRUDELI.

Considerazioni sull' elettrodinamica dei sistemi in moto e sterili ricerche intraprese per fare qualche luce sulla questione della esistenza o della non esistenza di un movimento della terra rispetto all' etere, influirono, com' è noto, sulla congettura che una quiete assoluta, non soltanto nella meccanica ordinaria ma anche nell'ottica e nell'ettrodinamica, non trova rispondenza nella realtà, e, precisamente, influirono a prò dell'ipotesi dell'esistenza d'infiniti sistemi naturali, l'uno rispetto all' altro in quiete oppure l' uno rispetto all' altro in moto traslatorio, rettilineo, uniforme, nei quali valgono i postulati della fisica (sistemi naturali di riferimento, usando una frase del Prof. Castelnuovo [1])). Codesta ipotesi fu detta *principio di relatività*. Insieme con essa, fu fatta, dall' Einstein, l'altra ipotesi (*principio della costanza della velocità della luce*) che, cioè, la grandezza della velocità della luce sia, nel vuoto, una costante universale, indipendentemente dallo stato di quiete o di moto della sorgente luminosa.

I suddetti sistemi sono, come abbiamo detto, sistemi in quiete, l' uno rispetto all' altro, oppure sistemi, l' uno rispetto all' altro, in moto traslatorio, rettilineo, uniforme. Siano K e K' due dei suddetti sistemi, con ognuno dei quali intenderemo invariabilmente collegato un osservatore. Designeremo con x, y, z le coordinate cartesiane di spazio rispetto al sistema K e con t la coordinata di tempo rispetto all' orologio dell' osservatore di K, ottenute, coteste coordinate, dall' osservatore in discorso, ed infine, analogamente, designeremo con x', y', z', t' le corrispondenti coordinate di spazio e di tempo nel sitema K' ottenute dall' osservatore di K' medesimo. Di-

[1]) G. Castelnuovo. « Il principio di relatività e i fenomeni ottici ». *Rivista di Scienza*, 1911.

remo, parlando nel linguaggio iperspaziale, che x, y, z, t oppure x', y', z', t' rappresentano le coordinate di un generico punto di uno spazio a quattro dimensioni, del quale verrà stabilita, qui appresso, la metrica.

I sistemi K e K′ siano in moto l'uno rispetto all'altro e la velocità di K′ rispetto a K (velocità della quale indicheremo con v la grandezza) s'intenda, per semplicità, orientata come l'asse delle x. S'intenda, inoltre, per semplicità, che per $t = 0$ la terna d'assi di K′ coincida con quella di K e che, allora, sia $t' = 0$. Ciò premesso, l'Einstein, col sussidio del suddetto principio di relatività e del principio della costanza della velocità della luce, perveniva a mostrare che le x', y', z', t' resultano legate alle x, y, z, t dalle seguenti relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} t' &= \beta \left(t - \frac{v}{c^2}\, x \right) \\ x' &= \beta\, (x - v\, t) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right.$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

rappresentando c la grandezza della velocità della luce. Coteste relazioni coincidono con le trasformazioni Lorentziane, ottenute, però, dal Lorentz, come conseguenza di contrazioni assolute (contrazioni Lorentziane).

Il Minkowski, poi, faceva osservare che il gruppo delle trasformazioni Lorentziane poteva considerarsi anche come gruppo di trasformazioni che lasciano invariata l'espressione

$$d\, s^2 = c^2\, d\, t^2 - d\, x^2 - d\, y^2 - d\, z^2$$

espressione che veniva posta a fondamento della metrica dello spazio a quattro dimensioni suddette, ovvero della metrica dello spazio del Minkowski. Si può anche dire, per avere un' immagine suggestiva, che si viene, così, ad essere in uno spazio a quattro dimensioni, del quale la metrica è quella ora definita. I postulati della fisica, secondo il principio suddetto di relatività, sono gli stessi nel sistema K e nel sistema K', cioè (così anche suol dirsi) essi postulati sono covarianti rispetto alle trasformazioni che lasciano invariata la metrica del Minkowski.

Il Planck mostrava che, se poniamo

$$H = - m \frac{d s}{d t} = - m \sqrt{c^2 - q^2},$$

dove m rappresenta la massa inerte di riposo di un punto materiale e q la velocità del punto in discorso, avremo, come equazioni del moto spontaneo di un punto materiale libero,

$$(1) \qquad \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 , \quad \text{e le analoghe,}$$

avendo posto $\dot{x} = \frac{d x}{d t}$, etc. La funzione H è, nella teoria in discorso, la funzione Lagrangiana. E siccome, per l' ipotesi $c =$ costante, la funzione stessa non dipende esplicitamente dal posto, si ha $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$. Le (1) potranno scriversi, allora,

$$\frac{d}{d t}\left\{ \frac{m \dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \right\} = 0 , \quad \text{e le analoghe.}$$

Fin qui, però, si è trattato di sistemi, in quiete l' uno rispetto all' altro oppure l' uno rispetto all' altro in moto traslatorio, rettilineo, uniforme. Ora, si domanda: a quali considerazioni condurrebbe, intanto, il principio di relatività esteso a sistemi dotati, l' uno rispetto all' altro, di moto traslatorio, rettilineo, uniformemente accelerato? L' Einstein pose, dapprima, cotesta domanda in alcuni lavori comparsi negli *Annalen der Physik* [1]), nei quali, togliendo il principio della

[1]) 1911, t. 35; 1912, t. 38.

costanza della velocità della luce e ponendo il principio di equivalenza fra il campo permanente gravitazionale ed il campo d' accelerazione, perveniva a legare la velocità della luce (che seguiteremo a designare con c) al potenziale Φ di gravitazione dalla relazione

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$$

dove c_0 rappresenta il valore costante (precedentemente indicato, invece, con c) che si attribuiva alla velocita della luce nella primitiva teoria della relatività. Cotesto capitale resultato dell'Einstein indusse l'Einstein stesso, e poi l'Abraham [1]), alla creazione di nuove teorie della gravitazione. Tuttavia ancora rimaneva senza risposta la domanda dell' esistenza di una relatività più generale. L' Abraham terminava una conferenza, tenuta a Genova nel 1912, in occasione del Congresso della Società Italiana per il progresso delle Scienze, dicendo :

« Tramonta così la teoria di relatività dell' Einstein (1905). Sorgerà, come la fenice dalla cenere, un nuovo principio di relatività più generale? Oppure ritorneremo allo spazio assoluto ? E richiameremo l'etere tanto disprezzato, affinchè s' incarichi di portare, oltre il campo elettromagnetico, anche il campo gravitazionale ? ».

Nel lavoro di Einstein e Grossmann [2]) « Entwurf einer verallgemeinerten relativitätstheorie und einer theorie der gravitation » l' Einstein stabilisce, in modo rigoroso, le equazioni del campo ed inoltre le equazioni del moto di un punto materiale nel campo stesso e le equazioni di Maxwell-Hertz, ma non viene condotta a termine la ricerca inerente alla prima di quelle domande, della quale una risposta affermativa richiede l' esistenza di un gruppo continuo di trasformazioni, rispetto al quale siano covarianti i sistemi di equa-

[1]) *Rend. R. Acc. dei Lincei*, 1911, 2.° sem.; *Nuovo Cimento*, dicembre 1912.

[2]) I. Physikalischer Teil von A. Einstein. II. Mathematischer Teil von M. Grossmann.

zioni in discorso. Intanto ecco come vengono ottenute, dall' Einstein, le equazioni del moto di un punto materiale. Si osservi, anzitutto, che nei citati lavori di cotesto autore, comparsi negli *Annalen der Physik*, egli otteneva, nei riguardi del moto di un punto materiale libero nel campo gravitazionale, equazioni come le (1), dove, però,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{m\, c \frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \text{e le analoghe}$$

non più sono nulle, non essendo ora costante la velocità della luce. Ne resultavano le equazioni seguenti:

$$\frac{d}{d\,t}\left\{\frac{m\,\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right\} = - \frac{m\, c \frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \text{etc.}$$

Il vettore avente le componenti

$$K_x = - \frac{m\, c \frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \text{etc.}$$

cioè il vettore

$$- \frac{m\, c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \operatorname{grad} c$$

rappresentava *la gravità*. Si osservi, poi, che il $d\,s$, che figura in cotesta trattazione dell' Einstein, comparsa negli *Annalen der Physik*, è il $d\,s$ che si ottiene dalla metrica del Minkowski, intendendovi c non più costante.

Ora, dice l' Einstein, sia più generalmente

$$d s^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, d x_\mu\, d x_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

la forma che viene posta a fondamento della metrica del campo, cioè s' intenda il campo stesso caratterizzato dal sistema delle quantità

$$\left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{41} & g_{43} & g_{44} \end{matrix}\right. \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

e s' intenda di avere indicato x, y, z, t rispettivamente con x_1, x_2, x_3, x_4. Dicesi anche che il sistema delle quantità $g_{\mu\nu}$ individua un tensore e precisamente il tensore caratteristico del campo.

Allora, la funzione Lagrangiana H sarà

$$H = -m \frac{d\,s}{d\,t} =$$

$$= -m\sqrt{g_{11}\dot{x}_1^2 + \ldots + 2\,g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots + 2\,g_{14}\dot{x}_1 + \ldots + g_{44}}\,.$$

Ne seguono immediatamente le equazioni del Lagrange generalizzate e, quindi, l' espressione della forza applicata al punto materiale considerato.

L' Einstein viene, quindi, a parlare del tensore caratteristico del campo, nei riguardi delle misure di spazio e di tempo. Si vuole che, nell' intorno *infinitesimo* di un generico punto del campo, valga la metrica del Minkowski. E poichè l' intorno infinitesimo del punto (x_1, x_2, x_3, x_4) viene individuato dal sistema delle coordinate infinitesime dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dovrà, in corrispondenza d'ogni punto, esser possibile un cambiamento reale, di coteste coordinate infinitesime, tale che la forma della metrica assuma ivi la forma ch'essa presenta nello spazio del Minkowski. Si può dire, allora, che lo spazio del Minkowski si ritrova nell' infinitesimo.

Ciò premesso, l' Einstein viene a generalizzare le equazioni del moto della materia, incoerente, distribuita con continuità. Egli, poi, stabilisce le equazioni del campo, cioè le equazioni che esprimono la generalizzazione della nota equazione del Poisson. Infine, nei riguardi delle generalizzazioni, egli estende il sistema di equazioni di Maxwell-Lorentz, il quale resulta covariante rispetto alla trasformazione generale.

Il sistema di equazioni relativo al moto della materia resulta pure covariante rispetto alla trasformazione generale (come viene mostrato dal Grossmann, seguendo le nozioni del Calcolo assoluto di Ricci e Levi-Civita). Non altrettanto resulta del sistema di equazioni del campo, sistema del quale, almeno per ora, può dirsi soltanto che è covariante rispetto alle trasformazioni lineari.

Esisterà un gruppo di trasformazioni più generale di quello lineare, rispetto al quale sia covariante il suddetto sistema di equazioni del campo? E quale sarebbe, allora, la portata della nuova teoria della relatività. Potrà estendersi ai postulati della fisica intera la conclusione, alla quale il Giorgi pervenne [1]) nei riguardi soltanto delle equazioni fondamentali della dinamica ordinaria, che, cioè, non esistono riferimenti privilegiati?

Roma, 25 Aprile 1914.

---

[1]) « Il problema del moto assoluto nelle leggi fondamentali della dinamica ». *Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, 1912.