Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche.

Von

B. von Kerékjártó in Ujpest (Ungarn).

§ 1. Die Kreisscheibe.

t bedeute eine n-periodische eindeutige stetige Transformation der Kreisscheibe in sich. Da t im Kreisinnern wenigstens einen Fixpunkt haben muß, so kann man voraussetzen, daß der Mittelpunkt O ein Fixpunkt ist. Ein um O als Mittelpunkt gezogener Kreis $\varkappa_0$ trennt zusammen mit seinen bei den Potenzen von t entstehenden Bildern $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{n-1}$ um O ein Gebiet ab, dessen Grenze von einer invarianten Jordanschen Kurve γ gebildet wird. Dem Büschel der konzentrischen Kreise $\varkappa_0$ entspricht der die Kreisfläche bedeckende Büschel der einander nicht treffenden invarianten Jordanschen Kurven γ, die einerseits gegen O, andererseits gegen den Grenzkreis konvergieren.

Wenn t die Indikatrix invariant läßt, so ist jede Kurve γ frei von Fixpunkten und unterliegt einer n-periodischen Drehung. Ein den Punkt O mit dem Grenzkreise verbindender Jordanscher Kurvenbogen, der jedes γ nur in einem Punkte trifft, ist also von seinen Bildern separiert, womit t als einer Drehung homöomorph charakterisiert ist.

Wenn aber t die Indikatrix umkehrt, so liegen auf jeder der Kurven γ zwei invariante Punkte M und N. Der geometrische Ort der Punkte M, N ist, weil er mit der Fixpunktmenge identisch ist, abgeschlossen; mithin ist die Menge der Punktepaare (M, N) eineindeutiges stetiges Bild der Menge der Kurven γ, d. h. der geometrische Ort g der Punkte M und N ist ein die beiden Fixpunkte der Peripherie verbindender Jordanscher Kurvenbogen, womit t als einer Spiegelung homöomorph erkannt ist.

§ 2. Die Kugelfläche.

a) Transformationen mit Fixpunkten.

Eine n-periodische eindeutige stetige Transformation der Kugelfläche in sich, die einen Fixpunkt hat, hat wenigstens zwei Fixpunkte A und B. Wir überdecken die Kugel mit einem Büschel einander nicht treffender Kreise $\varkappa_0$, welche sich auf A und B zusammenziehen. Die Bilder von $\varkappa_0$ bei den Potenzen von t seien $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{n-1}$; die Grenze des von diesen Kurven um A abgetrennten Gebietes ist eine invariante, Jordansche Kurve γ. Die einander nicht treffenden invarianten Kurven γ bilden einen die Kugelfläche bedeckenden Büschel, der sich auf A und B zusammenzieht.

Wenn t die Indikatrix invariant läßt, so ist jede Kurve γ frei von Fixpunkten und unterliegt einer n-periodischen Drehung. Wenn wir also A und B durch einen jedes γ nur in einem Punkte treffenden Jordanschen Kurvenbogen b verbinden, so kann b seine Bilder nicht treffen, womit die Charakterisierung von t als Drehung fertig ist.

Wenn aber t die Indikatrix umkehrt, so liegen auf jeder Kurve γ zwei invariante Punkte M und N. Der geometrische Ort von M und N ist, weil er mit der Fixpunktmenge identisch ist, abgeschlossen, mithin ist die Menge der Punkte (M, N) eineindeutiges stetiges Bild der Menge der Kurven γ, d. h. der geometrische Ort g der Punkte M und N ist eine Jordansche Kurve, womit t als Spiegelung charakterisiert ist.

b) Transformationen ohne Fixpunkte.

t bedeute eine n-periodische eindeutige stetige Transformation der Kugelfläche in sich ohne Fixpunkt. t^2 ist eine die Indikatrix erhaltende Transformation, die wenigstens einen Fixpunkt hat, mithin ist t^2 nach a) einer Drehung homöomorph. A und B seien zwei Fixpunkte von t^2, die bei t ineinander übergehen. Wir betrachten einen die Kugel bedeckenden Büschel von bei t^2 invarianten, sich auf A und B zusammenziehenden, einander nicht treffenden Jordansche Kurven γ; die von t erzeugten Bilder γ' von γ bilden einen Büschel der gleichen Art. Sei von A aus γ_1 die erste Kurve γ, die ihr Bild γ_1' trifft. P_0 sei ein gemeinsamer Punkt von γ_1 und γ_1', das Bild von P_0 bei t^i sei P_i.

Wenn einer der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, z. B. P_i, mit P_0 zusammenfällt, so sind die Punkte P_0, A und B bei der die Indikatrix erhaltenden Transformation t^{2i} invariant, mithin ist t^{2i} die Identität, also $i = \frac{n}{2}$ und $n \equiv 2 \pmod 4$; nach a) ist $t^{\frac{n}{2}}$ einer Spiegelung homöomorph. Ein die Punkte A und P_0 verbindender Jordanscher Kurvenbogen b_0, der jede Kurve γ zwischen A und γ_1 nur in einem Punkte trifft, bildet mit seinem bei $t^{\frac{n}{2}}$ entstehenden Bilde $b_{\frac{n}{2}}$ zusammen einen Bogen b, dessen Bilder die Kugelfläche in $\frac{n}{2}$ Sektoren einteilen. Mithin ist t einer Drehspiegelung homöomorph.

Wenn aber die Punkte P_i alle voneinander verschieden sind, so bildet der Jordansche Kurvenbogen b_0, der P_0 mit A verbindet und jede Kurve γ zwischen A und γ_1 nur in einem Punkte trifft, mit dem Jordanschen Kurvenbogen b_0', der P_0 mit B verbindet, jede Kurve γ' zwischen B und γ_1' nur in einem Punkte und die Bilder von b_0 nicht trifft, einen Bogen b, der seine Bilder nicht trifft, so daß t auch in diesem Falle als einer Drehspiegelung homöomorph erkannt ist.

Ich spreche Herrn Brouwer für seine gütigen Anweisungen, denen ich die hier gegebene einfache Darstellung meiner Beweismethode verdanke, meinen ergebensten Dank aus.

Ujpest, 7. Februar 1919.