

Ueber das Verhältniss des Dreiecks zum Sector der Kegelschnitte.

Von Dr. W. Fabritius.

Gauss hat bekanntlich die Ermittlung des Verhältnisses:

$$\eta = \frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}}$$

abhängig gemacht von einer transcendentalen Function

$$X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g},$$

welche, nach Potenzen von $\sin^2 \frac{1}{2}g = x$ entwickelt, die Reihe ergibt:

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5}x + \frac{4.6.8}{3.5.7}x^2 + \dots \quad (1)$$

Zur numerischen Berechnung dieser Function giebt *Gauss* einen Kettenbruch, in welchem jedoch das Gesetz der Fortschreitung der einzelnen Coefficienten:

$$\frac{6}{5}, -\frac{2}{5.7}, \frac{5.8}{7.9}, \frac{1.4}{9.11}, \frac{7.10}{11.13}, \dots$$

$$(1-x)\varphi(x) = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)x + (\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + (\alpha_3 - \alpha_2)x^3 + \dots \quad (3)$$

welche convergenter als die ursprüngliche ist, wenn die Coefficienten α derart sind, dass die Differenzen $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ kleiner sind, als die Coefficienten der ursprünglichen Reihe. Dies wird aber der Fall sein, wenn wie in der Reihe (1) das Verhältniss zweier auf einander folgender Coefficienten $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ sich je länger desto mehr der Grenze ± 1 nähert.

$$(1-x)\varphi(x) = \alpha_0 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)x + (\alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_0)x^2 + (\alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1)x^3 + \dots}{1-x} \quad (4)$$

Betrachtet man $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ als Functionswerte einer Variablen für die Argumente $0, 1, 2, \dots$, und bezeichnet die ersten und zweiten Differenzen dieser Werte in der *Encke'schen* Weise mit $f_{1/2}', f_{3/2}', \dots; f_1'', f_2'', \dots$, so wird diese Reihe:

$$(1-x)\varphi(x) = \alpha_0 + f_{1/2}' \frac{x}{1-x} + f_1'' \frac{x^2}{1-x} + f_{3/2}'' \frac{x^3}{1-x} + \dots$$

Besitzen die Coefficienten, vom dritten anfangend, wieder die oben erwähnte Eigenschaft, so kann man durch Anwendung desselben Verfahrens eine neue Reihe bilden, die wieder convergenter als die vorhergehende ist. Indem man so fortfährt, kann man die Reihe (2) ersetzen durch die Reihe

$$(1-x)\varphi(x) = \alpha_0 + f_{1/2}' \frac{x}{1-x} + f_1'' \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + f_{3/2}'' \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 + f_2^{IV} \left(\frac{x}{1-x} \right)^4 + \dots \quad (5)$$

die unter der oben gemachten Voraussetzung bedeutend convergenter ist, als die ursprüngliche Reihe (2).

Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Reihe (1) ergibt

$$X = \frac{4}{1-x} \left[\frac{1}{1.1.3} + \frac{1}{1.3.5} \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1.3.7} \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \frac{1}{3.7.9} \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 - \dots \right]$$

nicht ganz einfach ist, da gerade und ungerade Coefficienten nach einem verschiedenen Gesetz fortschreiten. Im Anhang zur deutschen Ausgabe der *Theoria motus* befindet sich eine andere Form der Reihenentwicklung, deren Coefficienten aber nach einer verwickelten Progression fortschreiten und die ausserdem ohne Ableitung gegeben ist. Es dürfte daher vielleicht einiges Interesse haben zu zeigen, wie die Reihe (1) durch eine einfache Aenderung der Variablen x in eine bedeutend convergentere Reihe verwandelt werden kann, und zwar durch ein Verfahren, das schon von *Euler* angegeben wurde, aber meines Wissens bisher selten practisch verworther worden ist.

Es sei gegeben eine Function, die nach steigenden Potenzen der Variablen x geordnet ist:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots \quad (2)$$

Wird beiderseits mit $(1-x)$ multiplicirt, so folgt:

Wenn die Differenzen $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ dieselbe Eigenschaft

besitzen, also $\frac{\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$ sich mit wachsendem n der

Grenze ± 1 nähert, so kann man durch Anwendung desselben Verfahrens die Reihe (3), vom zweiten Gliede anfangend, durch eine convergentere Reihe ausdrücken:

Da hier $x = \sin^2 \frac{1}{2}g$ ist, so wird $1 - x = \cos^2 \frac{1}{2}g$, $\frac{x}{1-x} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}g$, wofür wir ζ^2 schreiben wollen.

Es ist also jetzt:

$$X = 4(1 + \zeta^2) \left[\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} \zeta^2 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \zeta^4 + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} \zeta^6 - \dots \right]$$

oder

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \zeta^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \zeta^4 - \frac{4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \zeta^6 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \zeta^8 - \dots; \quad (6)$$

vom dritten Gliede anfangend sind die Coefficienten dieser Reihe 8, 80, 320, 896, 2048, 4096... mal kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe (1). Die Entwicklung der Function X nach Potenzen von $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}g$, statt nach Potenzen von $\sin^2 \frac{1}{2}g$ ist also als eine der Natur der Aufgabe durchaus entsprechende zu bezeichnen.

Wird das oben beschriebene Verfahren auf den Zähler der bekannten Gauss'schen Hilfsgrösse ξ ausgedehnt, für welche bekanntlich (Th. mot. pag. 97)

$$\xi = \frac{1 - \frac{9}{10} X^{5/6} - x}{\frac{9}{10} X}$$

angewendet wird, so gelangt man zum Ausdruck:

$$\xi = \frac{8 \zeta^2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \zeta^2 + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \zeta^4 - \frac{4}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} \zeta^6 + \dots \right]}{X} \quad (7)$$

dem eine gewisse Eleganz gegenüber dem von Gauss gegebenen Ausdrucke

$$\xi = \frac{\frac{2/35}{1 - \frac{18/35}{1 - \frac{4/63}{1 - \frac{40/99}{1 - \frac{18/143}{1 - \frac{70/195}{\dots}}}}} x^2}}{x}$$

nicht abzuleugnen ist. Die rasche Convergenz des Gliedes des Klammerausdruckes ist leicht zu übersehen.

Die in den Formeln (6) und (7) auftretenden Reihenentwicklungen nach Potenzen von ζ^2 gehören zu einer Classe von transcendenten Functionen, die in geschlossener Form durch Ausdrücke von der Form

$$(1 + \zeta^2)^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \zeta + \alpha_1 \zeta + \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_5 \zeta^5 + \dots + \alpha_{2n+1} \zeta^{2n+1}$$

wiedergegeben werden können, und die einer speciellen Untersuchung vielleicht nicht ganz unwerth sind.

Kijef, December 1891.

W. Fabritius.

Ueber das Kreuzstabmikrometer.

Von Dr. W. Fabritius.

Die Cometenbeobachtungen an der Sternwarte in Kijef sind in den letzten Jahren vorzugsweise mit einem Mikrometer ausgeführt, das ich schon vor 12 Jahren habe anfertigen lassen und das ich als ein Kreuzstabmikrometer bezeichnen möchte; es wird wie das Ringmikrometer ohne künstliche Beleuchtung benutzt, zeichnet sich aber vor letzterem durch grössere Leichtigkeit der Beobachtungen und ihrer Berechnung aus.

Es besteht aus zwei möglichst glatt abgeschliffenen Metallstäben, die sich in der Focalebene des Oculars (mit geringer Vergrößerung) unter rechtem Winkel schneiden. Behufs grösserer Schärfe der Bilder der Kanten haben die beiden Stäbe im Querschnitt die Form eines regelmässigen Trapezes. Das Ocular mit dem Kreuzstabmikrometer wird

an den Positionskreis des Fadenmikrometers angeschraubt und zunächst mit diesem so lange gedreht, bis eine der Kanten der Metallstäbe der täglichen Bewegung parallel wird, darauf aber mit Hülfe des Positionskreises um 45° gedreht und für die anzustellenden Beobachtungen festgeklemmt.

Der Apparat erscheint alsdann als ein deutlich sich von dem dunklen Himmelsgrunde abhebendes Kreuz, dessen beide Stäbe gegen die Richtung der täglichen Bewegung einen Winkel von 45° bilden und deren scheinbare Dicke etwa eine Bogenminute beträgt.

Die Vorzüge, welche dieser Apparat vor dem Ringmikrometer besitzt, sind folgende:

1) Der Beobachter ist bei der Auswahl der Vergleichsterne viel weniger an bestimmte Declinationsdifferenzen ge-