# SUI MULTIPLI DI UNA SERIE LINEARE DI GRUPPI DI PUNTI APPARTENENTE AD UNA CURVA ALGEBRICA;

Nota di **G. Castelnuovo**, in Roma.

Adunanze dell'11, 25 giugno 1893.

Sopra una curva algebrica $C$ di dato ordine $n$ dello spazio $S_r$ (a $r$ dimensioni), le varietà $V$ (a $r - 1$ dimensioni) di ordine $k$ segano infiniti gruppi di $kn$ punti, costituenti una serie lineare. *Quale è la dimensione $r_k$ della serie?* Ogni varietà $V$ (se esiste) che passi per $r_k + 1$ punti generici di $C$ è costretta a contener tutta la curva, mentre ciò non accade se $V$ è condotta soltanto per $r_k$ punti di $C$. La questione precedente non differisce dunque dall'altra: *quante condizioni una curva $C$ impone ad una varietà $V$ che debba contenerla?* (o, secondo il termine introdotto dal sig. Cayley (*), quale è la *postulazione* della curva $C$ rispetto alle $V$?). Di questi vari enunciati io mi atterrò al primo.

Per i valori più bassi di $k$ il numero richiesto $r_k$ non dipende soltanto dai numeri $n$, $r$, $k$ e dal genere $p$ di $C$; ma dipende pure

(*) *On the rational Transformation betwen two spaces* (Proceedings of the London Math. Society, vol. 3, 1870).

da certi caratteri della serie $g_n^r$ segata su $C$ dagli iperpiani $S_{r-1}$ di $S_r$, caratteri che non sembra facile di introdurre in una formola. Ma per $k$ abbastanza alto, nello spazio ordinario ($r = 3$), il sig. Cayley per primo, ed in seguito, ma in modo più perfetto, il sig. Nöther (*) hanno dimostrato che (per curve prive di punti multipli) vale la formola

$$(\alpha) \qquad r_k = kn - p;$$

o in parole *la serie $g_{kn}^{r_k}$ segata su $C$ dalle superficie di ordine $k$ abbastanza alto è completa, non speciale.*

Ora si poteva preveder facilmente che un analogo teorema, e quindi la stessa formola ($\alpha$), valessero anche negli iperspazi. Ma varie questioni fondamentali rimanevano da risolvere, sia per lo spazio ordinario, sia per gli iperspazi. Importava di *conoscere un limite inferiore $\omega$ a partire dal quale* (cioè per $k \geqq \omega$) *la formola* ($\alpha$) *si potesse con certezza applicare;* e in secondo luogo importava di *assegnare un limite superiore dell'errore che si commetteva applicando la* ($\alpha$) *per valori di $k$ inferiori ad $\omega$.* Alle due questioni qui enunciate è dedicato il presente lavoro.

La prima è trattata in due diversi modi (ni 7, 9) che conducono (come la natura del problema lascia prevedere) a due risultati diversi; dei quali il secondo (più semplice se non sempre più basso del primo) ci dice che si può in ogni caso assumere $\omega = n - 2$ [mentre esistono curve, almeno nello spazio ordinario, alle quali non è applicabile la ($\alpha$) per $k = n - 3$] (**).

La seconda questione è risolta (n° 5) per tutti quei valori di $k$

---

(*) Cayley, l. c.—Nöther, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* (Annali di Matem., serie II, vol. V); *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Abhandl. d. k. Akad. d. Wissensch. Berlin 1882, oppure Journal f. d. Mathem., Bd. 93).

(**) Il sig. Nöther nei lavori citati dà $\omega = \mu + \nu - 3$ dove $\mu$ e $\nu$ sono ordini di due superficie passanti per la curva (supposta nello spazio ordinario), e secantisi inoltre in una seconda curva *irriduttibile* (la quale potrebbe anche mancare). Ma quel risultato, sebbene pregevole sotto molti aspetti, non può estendersi agevolmente agli iperspazi, nè riesce di facile applicazione quando della curva siano dati soltanto l'ordine e il genere.

che (sebbene inferiore ad $\omega$) conducono a serie non speciali, per i quali valori risulta dunque

$$r_k \leqq kn - p.$$

Si vedrà, da un lato, che la differenza tra il secondo ed il primo membro [cioè l'errore della ($\alpha$)] non può superare l'eccesso $\pi - p$ del massimo genere $\pi$, che può avere una curva d'ordine $n$ di $S_r$, sopra il genere $p$ della data $C$; d'altra parte, che al nominato gruppo di valori di $k$ appartengono tutti i numeri $k \geqq \frac{n-r}{r-1} - 1$ (*).

Come le proprietà enunciate si modifichino nel caso di curve con punti multipli, risulterà dal contesto del lavoro, nel quale d'ordinario le ultime curve non vengono escluse.

Dei due metodi impiegati in questa Nota (diversi da quelli che il Nöther ha seguito) sembra più importante il primo (n$^i$ 1-7) che il secondo (n$^i$ 8-11), sebbene questo conduca con grande semplicità a qualche risultato che il primo metodo darebbe con maggior fatica. Ma d'altra parte il primo metodo, fondato interamente sulle considerazioni elementari del n° 2, è di una grande fecondità nello studio delle relazioni tra serie lineari giacenti sopra una stessa curva. Esso ad esempio conduce a determinare il massimo genere $\pi$ di una curva d'ordine $n$ di $S_r$, e al massimo numero $\pi - p$ di punti doppi che può avere una curva di ordine $n$ e genere $p$ in $S_r$. Altre notevoli applicazioni si possono fare, ma le riserbo per un prossimo lavoro.

1. Il primo concetto che dobbiamo introdurre, e che per noi è fondamentale, riguarda la *somma* di due o più serie (lineari di gruppi di punti), sovrapposte (cioè giacenti sopra una stessa curva che supponiamo algebrica irreduttibile).

Siano anzitutto $g'$, $g''$ due serie di ordini $n'$, $n''$ (formate da gruppi di $n'$, $n''$ punti), giacenti sopra una curva $C$; alle serie stesse per ora non imporremo nessuna restrizione (le serie possono essere

(*) Per i valori inferiori di $k$ può anche risultare $r_k > kn - p$, ma è certamente $r_k \leqq p - 1$ ed un limite inferiore di $r_k$ è fissato dalla (3) del n° 3.

scomplete, aver punti fissi comuni a ciascun gruppo, coincidere..., e le dimensioni rispettive possono anche esser nulle). Riunendo in tutti i modi possibili un gruppo $G'$ della prima serie con un gruppo $G''$ della seconda serie otterremo tanti gruppi $G = G' + G''$ composti di $n' + n''$ punti. Orbene, per una nota proprietà, tutti questi gruppi $G$ stanno nella serie completa d'ordine $n' + n''$ che uno di essi individua (*). Ma può accadere che tutti i gruppi $G$ *appartengano* ad una serie lineare (d'ordine $n' + n''$) *contenuta* nella precedente (quindi di dimensione inferiore, scompleta): in ogni caso *la serie* (di ordine $n' + n''$) *di minima dimensione che contiene tutti i gruppi formati da un gruppo qualunque di* $g'$ *con un gruppo qualunque di* $g''$, *dicesi somma delle due serie* $g'$, $g''$ e si indica scrivendo $g'+g''$ ($=g''+g'$). Similmente per *somma di più serie* $g'+g''+\ldots+g^{(k)}$ si deve intendere la serie di minima dimensione tra i cui gruppi si trovano quelli formati riunendo in tutti i modi possibili un gruppo di $g'$, uno di $g''$,..., uno di $g^{(k)}$. E se le $k$ serie coincidono la loro somma si dirà *serie k-upla* della serie primitiva.

Per esempio sopra una curva $C$ dello spazio a $r$ dimensioni $S_r$ le varietà $V$ d'ordine $k$ a $(r-1)$ dimensioni segano una serie, che è $k$-upla della serie segata sulla curva dagli iperpiani $S_{r-1}$ (**).

(*) Lo si dimostra così. Nella serie completa $\gamma$ individuata da un gruppo $G = G' + G''$, tutti quei gruppi di $n''$ punti che con $G'$ dànno gruppi di $\gamma$ formano a loro volta una serie completa che contiene $g''$ (o coincide con essa) avendo con $g''$ un gruppo $G''$ in comune; dunque intanto $\gamma$ contiene tutti i gruppi formati da $G'$ con un gruppo *qualsiasi* di $g''$. Ma similmente si dimostra che $\gamma$ deve contenere ogni gruppo formato da questo gruppo (qualsiasi) di $g''$ con ogni gruppo di $g'$; quindi segue il teorema.

(**) Che in fatto la serie $g$ segata dalle $V$ sia la *minima* serie contenente tutti i gruppi costituiti da $k$ sezioni iperpianali di $C$, risulta subito quando per $C$ non passa nessuna delle varietà $V$, perchè allora ogni gruppo di $g$ appartiene ad una sola $V$, e quindi la *minima* serie richiesta è segata dal *minimo* sistema lineare di varietà (d'ordine $k$) contenente tutti i gruppi di $k$ iperpiani, il quale sistema è appunto composto di *tutte* le $V$. Ma se il sistema (supposto $\infty^l$) di tutte le $V$ contiene un sistema minore $\infty^i$ di $V$ passanti per $C$, sicchè la dimensione di $g$ è $l-i-1$, per applicare il ragionamento precedente bisogna dimostrare che esiste un sistema $\infty^{l-i-1}$ di $V$ nessuna delle quali passi per $C$, e tale che esso venga determinato da $l-i$ $V$ spezzate in $k$ iperpiani. Ora se ciò non fosse, se ogni sistema $\infty^{l-i-1}$ determinato da $l-i$ $V$ spezzate contenesse almeno

Dàte due serie $g'$, $g''$ (cose analoghe potrebbero ripetersi per più serie) e costruita la loro somma $g$, tutti quei gruppi di $n''$ punti che con un gruppo $G'$ (di $g'$) danno gruppi di $g$, formano una serie di ordine $n''$, la *serie residua di $G'$ rispetto a $g$*; essa contiene certo tutti i gruppi di $g''$, ma può anche contenerne *altri* ed aver quindi una dimensione superiore a quella di $g''$ (che in questo caso non potrà esser completa). Così può accadere che $g'$ insieme ad una serie d'ordine $n''$, ma più vasta di $g''$, dia la stessa somma che $g'$ con $g''$ (*).

2. Per mettere in relazione i caratteri di due o più serie coi caratteri della serie somma giovano le osservazioni seguenti.

Si dice che $\nu$ punti sono *indipendenti* (o presentano condizioni indipendenti) ad una serie $g_n^r$ (d'ordine $n \geqq \nu$ e di dimensione $r \geqq \nu - 1$) quando scelti comunque $\nu - 1$ tra i $\nu$ punti, esistono gruppi di $g$ passanti per i $\nu - 1$ punti ma non per il rimanente; la serie residua del gruppo dei $\nu$ punti è una $g_{n-\nu}^{r-\nu}$. Si dice pure che *un gruppo di $m$ punti $\Gamma_m$ impone $\nu$ condizioni alla serie $g_n^r$ quando in $\Gamma_m$ si possono scegliere $\nu$ ma non $\nu + 1$ punti indipendenti per la $g_n^r$*; sarà dunque

$$0 \leqq \nu \leqq m$$

(dove il caso estremo $\nu = 0$ si presenta se ogni gruppo di $g_n^r$ contiene $\Gamma_m$). La serie residua di $\Gamma_m$ rispetto a $g_n^r$ è evidentemente una $g_{n-m}^{r-\nu}$, perchè i gruppi di $g_n^r$ che passano per i $\nu$ punti indipendenti di $\Gamma_m$ devono in conseguenza contenere tutto $\Gamma_m$ (**).

una $V$ passante per $C$, allora ogni sistema $\infty^{l-i}$ determinato da $l - i + 1$ $V$ spezzate conterrebbe almeno $\infty^1$ $V$ passanti per $C$,... e finalmente il sistema di tutte le $\infty^l$ $V$ (determinato da $l + 1$ $V$ spezzate in $k$ iperpiani) conterrebbe almeno $\infty^{l+1}$ $V$ passanti per $C$, contro l'ipotesi.

(*) Ad es. sulla quartica razionale dello spazio ordinario la serie $g_8^8$ segata dalle quadriche è doppia della $g_4^3$ segata dai piani; ma la serie residua di una sezione piana rispetto a $g_8^8$ è una $g_4^4$ (e non la $g_4^3$); e la $g_8^8$ può considerarsi anche come somma della $g_4^3$ e della $g_4^4$.

(**) Nell'ultima definizione sono sottointese le disuguaglianze $m \leqq n$, $\nu \leqq r$; in caso opposto non esistono gruppi di $g_n^r$ passanti per $\Gamma_m$, e si può dire soltanto che $\Gamma_m$ presenta alla serie più di $r$ condizioni.

A noi interessa di esaminare come uno stesso gruppo $\Gamma$ si comporti rispetto a più serie $g'$, $g''$... e alla loro somma. Si hanno i teoremi:

*Se $\mu'$, rispettivamente $\mu''$ punti comunque scelti entro a $\Gamma_m$ risultano sempre indipendenti per le serie $g'$, rispettiv. $g''$, allora per la serie somma risultano certo indipendenti $\mu' + \mu'' - 1$ punti comunque scelti entro a $\Gamma_m$, se $\mu' + \mu'' < m$, o tutti gli $m$ punti di $\Gamma_m$ nell'ipotesi opposta.* Tutto si riduce a costruire un gruppo di $g' + g''$ il quale passi per $(\mu' - 1) + (\mu'' - 1)$ punti (o nella seconda ipotesi per $m - 1$ punti) scelti comunque in $\Gamma_m$ e non contenga altri punti di $\Gamma_m$. E ciò si ottiene subito perchè un gruppo di $g'$ che passi per $\mu' - 1$ punti arbitrari di $\Gamma_m$ senza contenerne altri, insieme ad un gruppo di $g''$ che passi per $\mu'' - 1$ tra i rimanenti punti di $\Gamma_m$ [o per $m - 1 - (\mu' - 1)$ punti nella seconda ipotesi] e non ne contenga altri, dà un gruppo di $g' + g''$ soddisfacente alle condizioni volute.

Il teorema si estende subito alla somma di $k$ serie e ci dà:

*Se per la serie $g^{(i)}$ $(i = 1, 2 \ldots k)$ $\mu^{(i)}$ punti comunque scelti in $\Gamma_m$ risultano indipendenti, allora per la serie somma $g^{(1)} + g^{(2)} + \ldots + g^{(k)}$ risultano certo indipendenti $\mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \ldots + \mu^{(k)} - k + 1$ punti arbitrari di $\Gamma_m$, o tutti gli $m$ punti* (se il numero precedente superasse $m - 1$).

O sotto altra forma più ristretta ma più utile per noi:

*Se per la serie $g^{(i)}$ $(i = 1, 2 \ldots k)$ $\mu^{(i)}$ punti comunque scelti in $\Gamma_m$ risultano indipendenti, allora il numero delle condizioni che $\Gamma_m$ presenta alla serie somma $g^{(1)} + g^{(2)} + \ldots + g^{(i)}$ supera $\mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \ldots + \mu^{(k)} - k$ od uguaglia $m$.*

3. Noi abbiamo da considerare in seguito sulla curva $C$ una serie $g_n^r$ $(r > 1)$ ed i suoi multipli successivi; per semplificare la scrittura introduciamo il simbolo $[k]$ ad indicare la serie $k$-upla di $g_n^r$, il cui ordine è $kn$, la cui dimensione (che non conosciamo) indicheremo con $r_k$ (per convenzione $r_1 = r$). Alla $g_n^r$ (completa o no, poco importa) imporremo la *sola* restrizione che gli $\infty^{r-1}$ gruppi contenenti un punto generico della curva sostegno non abbiano altri punti comuni; vale a dire supporremo che si possa costruire nello

spazio a $r$ dimensioni $S_r$ una curva $C^n$ d'ordine $n$, riferita univocamente alla $C$, sulla quale gli iperpiani $S_{r-1}$ seghino la serie corrispondente alla $g_n^r$. La restrizione porta come conseguenza che *nel gruppo $\Gamma_n$ generico di $g_n^r$ $r$ punti comunque scelti riescono sempre indipendenti per la $g_n^r$* (cioè appartengono ad un solo gruppo della serie); questa proprietà, quasi intuitiva, ammette una dimostrazione rigorosa che il lettore troverà nella Nota del sig. Bertini *« Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica »* (*).

Si potrà dunque, nell'applicare l'ultimo teorema del n° precedente alla serie $[k]$ (somma di $k$ serie identiche a $g_n^r$) e al gruppo $\Gamma_n$ generico di $g_n^r$, porre

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \ldots = \mu^{(k)} = r,$$

e si avrà :

*Il numero $\nu_k$ delle condizioni che $\Gamma_n$ impone alla serie $[k]$ è*

$$(1) \qquad \nu_k \geqq k(r-1)+1 \quad \text{se} \quad k < \frac{n-1}{r-1}$$

*oppure in caso opposto*

$$(1)' \qquad \nu_k = n.$$

La serie residua di $\Gamma_n$ rispetto a $[k]$ ha la dimensione $r_k - \nu_k$, e contiene $[k-1]$ o coincide con essa (n° 1); quindi

$$r_k - \nu_k \geqq r_{k-1}$$

e in virtù del teorema precedente

$$(2) \qquad r_k - r_{k-1} \geqq k(r-1)+1 \quad \text{per} \quad k < \frac{n-1}{r-1},$$

$$(2)' \qquad r_k - r_{k-1} \geqq n \qquad \text{per} \quad k \geqq \frac{n-1}{r-1}.$$

Consideriamo anzitutto i valori di $k < \frac{n-1}{r-1}$ (tra i quali si trova

(*) Atti della Accad. d. Scienze di Torino, vol. XXVI (1890), ni. 2, 3.

almeno il valore $k = 1$, eccettuato il caso della curva razionale normale di $S_r$). Nella (2) mutiamo successivamente $k$ in $k - 1$, $k - 2 \ldots 2, 1$, otterremo una serie di relazioni di cui le ultime due sono

$$r_2 - r \geqq 2(r - 1) + 1$$
$$r = (r - 1) + 1.$$

Sommando la (1) colle $k - 1$ relazioni analoghe si trova

$$r_k \geqq \binom{k+1}{2}(r - 1) + k \tag{3}$$

*la quale fissa un limite inferiore alla dimensione della serie* $[k]$ *per tutti i valori di* $k < \frac{n-1}{r-1}$; ed il limite può esser raggiunto, in curve particolari di genere qualunque, per i nominati valori di $k$ (*).

4. La formola (3) diventa sopratutto importante quando a $k$ si attribuisce il massimo valore che esso può ricevere, cioè l'intero $\chi$ definito dalle disuguaglianze

$$\frac{n-1}{r-1} - 1 \leqq \chi < \frac{n-1}{r-1}. \tag{4}$$

La (3) ci dà

$$r_\chi \geqq \binom{\chi+1}{2}(r - 1) + \chi. \tag{5}$$

Ma qui si presenta un fatto notevole, il quale conduce subito ad un limite *superiore* per $r_\chi$; infatti *la serie* $[\chi]$ *è non speciale*. Lo

---

(*) È facile vedere che se nella (3) va preso il segno $=$, allora deve essere $r_2 = 3r - 1$; quindi ripetendo un ragionamento delle mie *Ricerche di geometria sopra una curva algebrica* (Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXIV, 1889; v. n° 29 e seg.), si trova che: *Le curve* $C^n$ *di* $S_r$ ($n > 2r$, $r > 2$) *sulle quali le varietà* $V$ *ad* $r - 1$ *dimensioni d'ordine* $k < \frac{n-1}{r-1}$ *segano una serie la cui dimensione è data dal secondo membro della* (3), *appartengono ad una superficie d'ordine* $r - 1$ (rigata necessariamente per $r$ diverso da 5); *e viceversa.*

si vede osservando che il gruppo generico di $g_n^r$ presenta alla serie $[\chi]$ [per la (1)]

$$\nu_\chi \geqq \chi(r-1)+1 \geqq n-r+1$$

condizioni, mentre se $[\chi]$ fosse speciale, ad essa (per il teorema di Riemann-Roch) un gruppo di $g_n^r$ presenterebbe al più $n-r$ condizioni. Dall'osservazione che $[\chi]$ è non speciale ed ha l'ordine $\chi n$, risulta subito che deve essere la sua dimensione

$$r_\chi \leqq \chi n - p, \tag{6}$$

dove $p$ è il genere della curva $C$; il segno inferiore corrisponde al caso in cui $[\chi]$ è completa. La $[\chi]$ può del resto essere scompleta, ma il *difetto di completezza* $d_\chi$ non può superare la differenza tra il limite superiore (6) ed il limite inferiore (5) di $r_\chi$; ossia

$$d_\chi \leqq \chi\left[n-r-\frac{\chi-1}{2}(r-1)\right]-p. \tag{7}$$

E di quà varie notevoli conseguenze. Intanto $d_\chi$ per sua natura non può esser negativo; dunque $p$ non può superare la espressione

$$\pi = \chi\left[n-r-\frac{\chi-1}{2}(r-1)\right] \tag{8}$$

La (8) ci dà il *massimo valore che può assumere il genere di una curva contenente una serie* $g_n^r$ (*). Il massimo può esser raggiunto (qua-

(*) Il valore di $\pi$ si trova già determinato nelle mie *Ricerche* citate (n° 27) per via meno semplice, ma in sostanza non diversa da questa. Colà si vedrà pure che le $C^n$ di $S_r$ $(r>2)$ aventi il genere massimo si dividono nelle tre classi:

1) tutte le curve normali (non speciali) d'ordine $n<2r$ $(n-r=p,\ \chi=1)$;

2) le curve canoniche $n=2r=2p-2$ $(\chi=2)$;

3) le curve d'ordine $n>2r$ che giacciono sopra una superficie $F$ d'ordine $r-1$, non hanno punti multipli, e segano le generatrici di $F$, se è rigata, in $\chi+1$ punti $\left(\text{od anche in } \chi+2 \text{ nel caso estremo } \chi+1=\frac{n-1}{r-1}\right)$; e se invece $F$ è la superficie di Veronese $(r=5)$ le $C^n$ ($n$ pari) segano ciascuna delle $\infty^2$ coniche di $F$ in $\frac{n}{2}$ punti.

lunque siano $n$ ed $r > 1$) ed in tal caso la serie $[\chi]$ è completa; altrimenti la $[\chi]$ può esser scompleta, ma il difetto di completezza è

$$(7)' \qquad d_\chi \leqq \pi - p \quad (*).$$

Anche il valore $\pi - p$ può esser raggiunto dal difetto di completezza qualunque sia $p$ (precisamente nelle curve piane e in quelle nominate nella nota al n° 3).

5. Il procedimento che ci ha condotto a determinare un limite inferiore ad $r_k$ per $k \leqq \chi$ non è più applicabile ai valori superiori di $k$, perchè la formola (2) non serve più, e si deve ricorrere alla (2)'. Questa ci dà

$$(9) \qquad r_{\chi+1} \geqq r_\chi + n, \quad r_{\chi+2} \geqq r_{\chi+1} + n, \ldots$$

e poichè le successive serie $[\chi + 1]$, $[\chi + 2] \ldots$ sono tutte non speciali (contenendo la $[\chi]$ non speciale), si hanno pure le disuguaglianze

$$(10) \qquad r_{\chi+1} \leqq (\chi + 1)n - p, \quad r_{\chi+2} \leqq (\chi + 2)n - p, \ldots$$

Le differenze tra i secondi e i primi membri delle (10) dànno i difetti di completezza delle serie $[\chi + 1]$, $[\chi + 2] \ldots$; ora tenendo conto delle (9) si trova subito

$$d_\chi \geqq d_{\chi+1} \geqq d_{\chi+2} \geqq \ldots$$

D'altra parte le $d$ non possono diventar negative; dunque:

*Esiste sempre un intero $\omega$ così grande che per tutti i valori di $k \geqq \omega$ la serie $[k]$ ha un difetto di completezza $d$ indipendente da $k$, ed ha quindi la dimensione*

$$(11) \qquad r_k = kn - p - d. \qquad (0 \leqq d \leqq \pi - p)$$

In particolare *se $p = \pi$* (allora $d_\chi = 0$ e quindi) *si può assumere $\omega = \chi$ ed è $d = 0$.*

---

(*) Il ragionamento precedente, unito alla osservazione che se $\chi$ varia per numeri interi il secondo membro della (8) non può crescere, ci mostra che è $d_k \leqq \pi - p$ ogniqualvolta $[k]$ è serie non speciale, anche se $k < \chi$; (per $k > \chi$ si veda il n° 5).

Ad es. per le due classi di curve 1), 2) date nella nota al numero precedente si ha: *Tutti i multipli di una serie $g_n^r$ completa non speciale d'ordine $n > 2r$, e tutti i multipli della serie canonica* (essa esclusa) *sono serie complete non speciali* $g_{kn}^{kn-p}$ [e un teorema analogo sussiste per la classe 3)].

Vogliamo intanto enunciare sotto forma proiettiva il principale risultato a cui finora siamo giunti.

*La serie segata sopra la curva $C^n$ di $S_r$ dalle varietà* (a $r-1$ dimensioni) *d'ordine $k \geqq \chi$ ha una dimensione che non supera $kn-p$ e se ne è inferiore la differenza è al più uguale alla differenza che passa tra il massimo genere $\pi$ di una curva d'ordine $n$ di $S_r$ ed il genere $p$ che ha la data $C^n$* (*).

6. Tornando alle serie $[k]$ per $k > \chi$ due questioni ci restano da risolvere.

1) Come si può calcolare un numero $\omega$ a partire dal quale valga sempre la formola (11)?

2) Quale particolarità presenta la serie $g_n^r$ quando la costante $d$ che si presenta nella (11) è diversa da 0?

Occupiamoci intanto del primo quesito. Noi sappiamo che la $d_k$ difetto di completezza della serie $[k]$ decresce o rimane costante, mentre $k$ cresce oltre $\chi$. Se ci fosse nota la legge di decrescenza di $d_k$, si saprebbe subito a partire da qual valore $\omega$ di $k$, la $d_k$ rimane costante. Ora questa legge non è certo facile a scoprire; e soltanto riusciremo a vedere che (a partire da $k = \chi + 1$) $d_k$ deve diminuire di una unità almeno per volta finchè $k$ non ha raggiunto quel limite $\omega$, a partire dal quale $d_k$ rimane *sempre* costante; vale a dire *se per un certo valore di $k > \chi + 1$ si ha $d_{k-1} = d_k$, si avrà allora $d_k = d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d$ costante.*

La ipotesi fatta $d_{k-1} = d_k$ si può anche scrivere (poichè $d_k = kn - p - r_k, \ldots$)

$$r_{k-1} + n = r_k;$$

(*) Il teorema può completarsi coll'ultima nota al n° precedente.

si vuol dimostrare che in conseguenza sarà

$$d_k = d_{k+1} \text{ ossia } r_k + n = r_{k+1}.$$

Perciò tra gli $\infty^{r_k}$ gruppi della serie $[k]$, consideriamo quelli che contengono un gruppo generico $G$ fissato nella $g_n^r$; noi sappiamo già che $G$ impone $n$ condizioni alla $[k]$; quindi i gruppi in questione formano una serie d'ordine $nk$ e di dimensione $r_k - n = r_{k-1}$. Se in ciascuno di essi si sopprimesse $G$, rimarrebbero i gruppi della serie residua di $G$ rispetto a $[k]$, la quale contiene $[k - 1]$ (n° 1), ed anzi questa volta deve coincidere con essa, perchè le due serie hanno la stessa dimensione $r_{k-1}$. Quindi la nostra serie d'ordine $nk$ considerata entro a $[k]$ si può formare aggiungendo ad ogni gruppo di $[k - 1]$ il gruppo fisso $G$; lo ricorderemo indicando la serie col simbolo

$$[k - 1] + G.$$

Una seconda serie dello stesso ordine $nk$, della stessa dimensione $r_k - n$, si può ottenere similmente partendo da un secondo gruppo generico $G'$ da $g_n^r$, e sarà

$$[k - 1] + G'.$$

Le due serie hanno in comune tutti i gruppi di $[k]$ che contengono sia $G$ sia $G'$, che soddisfanno adunque a $2n$ condizioni (perchè $k > \chi + 1$), e nessun altro gruppo; questi gruppi sono $\infty^{r_k - 2n}$. Dunque la minima varietà lineare di gruppi di $kn$ punti a cui le due serie $\infty^{r_k - n}$ appartengano ha

$$(r_k - n) + (r_k - n) - (r_k - 2n) = r_k$$

dimensioni, è la stessa $[k]$ da cui siamo partiti. In altre parole operando *linearmente* sulle due serie $[k - 1] + G$ e $[k - 1] + G'$, vale a dire costruendo tutte le serie $\infty^1$ determinate da un gruppo qualsiasi della prima serie con un gruppo qualsiasi della seconda, si può arrivare ad ogni altro gruppo di $[k]$. Ora io dico che operando *linearmente* sulle due serie d'ordine $(k+1)n$ e dimensione $r_k$

$$[k] + G, \quad [k] + G'$$

(ottenute aggiungendo ai gruppi di $[k]$ il gruppo fisso $G$ o il gruppo fisso $G'$), si perviene a costruire tutta la $[k+1]$. Dimostrato ciò, (poichè le due serie nominate hanno in comune una serie $\infty^{r_k - n}$), si conchiude subito che $[k+1]$ ha la dimensione

$$r_{k+1} = r_k + r_k - (r_k - n) = r_k + n,$$

e a questo risultato precisamente vogliamo arrivare.

Dunque tutto è ridotto a provare (per la definizione di $[k+1]$) che l'insieme di $k+1$ gruppi scelti ad arbitrio in $g_n^r$

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_{k+1}$$

può ottenersi con costruzioni lineari partendo dalle due serie

$$[k] + G, \quad [k] + G'.$$

E ciò risulta purchè si osservi che quei gruppi della prima serie i quali contengono $G_1$, formano la serie $\infty^{r_k - 1}$

$$[k-1] + G + G_1;$$

analogamente quei gruppi della seconda serie che contengono $G_1$ formano la serie $\infty^{r_k - 1}$

$$[k-1] + G' + G_1.$$

Mediante costruzioni lineari le due serie $\infty^{r_k - 1}$ conducono a tutti i gruppi che risultano dall'unione di $G_1$ coi gruppi della serie determinata da

$$[k-1] + G \text{ insieme con } [k-1] + G'.$$

Ma questa serie (fu visto prima) è precisamente $[r_k]$, e contiene quindi in particolare il gruppo $G_2 + \ldots + G_{k+1}$. Dunque in realtà la serie $\infty^{r_k + n}$ costruita linearmente partendo dalle due

$$[k] + G, \quad [k] + G'$$

contiene ogni gruppo formato dall'unione di $k+1$ gruppi di $g_n^r$ e quindi coincide con $[k+1]$. (Non potrebbe questa esser contenuta in quella perchè la dimensione di $[k+1]$ è certo $\geqq r_k + n$). Così la nostra asserzione è dimostrata.

7. Se ora noi partiamo dalla serie $[\chi + 1]$ il cui difetto di completezza è (n° 5)

$$d_{\chi+1} \leqq \pi - p$$

e costruiamo la serie successiva $[\chi + 2]$, il difetto di completezza di questa è

$$d_{\chi+2} \leqq d_{\chi+1} - 1 \leqq \pi - p - 1$$

oppure

$$d_{\chi+2} = d_{\chi+1};$$

ma in questo secondo caso, per il teorema precedente, tutte le $d$ con indici maggiori hanno lo stesso valore; e quindi come valore $\omega$ dell'indice a partire dal quale le $d$ rimangono costanti, si può prendere

$$\omega = \chi + 1.$$

Nel primo caso invece si costruisca la serie $[\chi + 3]$; avremo in corrispondenza

$$d_{\chi+3} \leqq d_{\chi+2} - 1 \leqq \pi - p - 2$$

oppure

$$d_{\chi+3} = d_{\chi+2},$$

ma in quest'ultimo caso si può prendere

$$\omega = \chi + 2.$$

Così continuando, poichè le $d$ non sono mai negative, si vede che nella peggior ipotesi risulterà

$$d_{\chi+\pi-p+1} = d_{\chi+\pi-p+2} = \ldots$$

Dunque possiamo finalmente conchiudere:

*Per ogni valore di $k > \chi + \pi - p$ il difetto di completezza $d$ della serie $[k]$ è indipendente da $k$ e la serie stessa* (o in altre parole la serie segata su $C^n$ di $S_r$ dalle varietà d'ordine $k$) *ha la dimensione*

$$r_k = kn - p - d. \qquad (0 \leqq d \leqq \pi - p) \tag{11}$$

Ora rimane da trattare la seconda questione; per quali serie è $d = 0$; e in caso opposto quale è il significato geometrico di $d$?

Mediante considerazioni appartenenti alla geometria sopra una curva e fondate sugli stessi principi (dei n' 1 e 2) che finora ci hanno servito, si potrebbe dimostrare che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè* (sia $d = 0$, o in altre parole) *sia completa la serie* $[k]$, *per* $k$ *abbastanza alto, è che non esistano sulla curva due* (o più) *punti i quali offrano una sola condizione alla* $g_n^r$; vale a dire che sia priva di punti multipli la $C^n$ di $S_r$. Ma lo stesso risultato, insieme ad altri, si può anche ottenere per una via così semplice (di natura proiettiva) che val la pena di seguire quest'ultima da ora in poi, abbandonando il metodo che ci ha condotto fin qua.

8. Ragioniamo anzitutto sulle curve piane

$$\left[r = 2, \quad \chi = n - 2, \quad \pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$

È noto (*) che sulla curva piana $C^n$ (con singolarità ordinarie o straordinarie) di genere

$$p = \pi - \frac{1}{2}\sum i(i-1)$$

(dove la somma va estesa a tutti i punti di $C^n$ multipli secondo $i = 2, 3\ldots$) le curve *aggiunte* d'ordine $k \geqq n - 2$ segano una serie *completa non speciale.* L'ordine di questa serie è

$$N_k = kn - \sum i(i-1) = kn - 2(\pi - p);$$

la dimensione della serie sarà quindi

$$R_k = N_k - p = kn - 2(\pi - p) - p.$$

D'altra parte la serie $[k]$ segata su $C^n$ da *tutte* le curve d'ordine $k$ ha l'ordine $kn$, mentre la dimensione $r_k$ supera $R_k$ del numero delle condizioni che si esigono perchè una curva d'ordine $k$ sia *ag-*

(*) Si veda ad es. Brill e Nöther, *Ueber die algebraische Functionen.* Mathem. Annalen, 7.

*giunta* alla $C^{i}$. Ma è pur noto che questo numero di condizioni è indipendente da $k$, per $k \geqq n-3$ e vale

$$\frac{1}{2}\sum i(i-1)=\pi-p.$$

Dunque

$$r_k = kn - p - (\pi - p).$$

E così all'ultimo teorema del n° 7 possiamo sostituire nel caso di curve piane il seguente più completo:

*Sopra una $C^n$ piana di genere $p$ le curve d'ordine $k \geqq n-2$ segano una serie non speciale* (di ordine $kn$) *di dimensione*

$$r_k = kn - p - (\pi - p). \tag{12}$$

La (12) dà quindi la dimensione della serie $k$-upla di una $g_n^2$ (*).

9. Passiamo in secondo luogo alle curve sghembe $C^n$ dello spazio ordinario ($r=3$). Si scelga nello spazio un punto $S$ per il quale non passi nessuna delle $\infty^1$ trisecanti di $C^n$; da $S$ la curva $C^n$ sarà proiettata sopra un piano in una $C_1^n$ la quale, oltre alle singolarità *effettive* proiezioni delle corrispondenti di $C^n$, non avrà che un certo numero $\delta$ di punti doppi apparenti $a, b, c \ldots$, proiezioni di altrettante coppie di punti semplici $(a_1, a_2)$ $(b_1, b_2)$, $(c_1, c_2) \ldots$ di $C^n$. Le curve d'ordine $k \geqq n-2$ aggiunte a $C_1^n$ segano su questa una serie completa non speciale di un certo ordine $N_k$ di dimensione $R_k = N_k - p$; quindi i coni d'ordine $k$ projettanti le curve aggiunte da $S$, i quali passano in modo perfettamente determinato per le singolarità di $C^n$ e segano inoltre semplicemente $C^n$ nelle $\delta$ coppie di punti $(a_1, )$ $(b_1 a_2, b_2) \ldots$, determinano su $C^n$ una serie completa non speciale d'ordine $N_k$ e dimensione $R_k$; e la stessa serie (essendo completa) è segata da tutte le superficie d'ordine $k$ che passano semplicemente per i $2\delta$ punti $a_1, a_2, b_1, b_2 \ldots$, e in ciascun punto singolare segano la $C^n$ precisamente come la segavano quei coni; la quale ultima condizione

(*) La costante $d$ della (11) la quale è in generale compresa fra o e $\pi - p$, nelle curve piane uguaglia il limite superiore come fu già osservato.

(relativa ai punti singolari) per brevità esprimeremo dicendo che le superficie sono *aggiunte a* $C^n$.

Se ora riesciremo a mostrare che i $2\delta$ punti $a_1, a_2, b_1, b_2 \ldots$, presentano proprio $2\delta$ condizioni indipendenti alle superficie d'ordine $k$ aggiunte a $C^n$ che devono contenerli, ne seguirà subito che le superficie d'ordine $k$ soddisfacenti alle *sole* condizioni di esser aggiunte a $C^n$ dovranno segare su $C^n$ una serie d'ordine $N_k + 2\delta$, di dimensione $R_k+2\delta$, quindi ancora una serie *completa non speciale*.

Tutto si riduce a provare che esiste una superficie d'ordine $k$ aggiunta a $C^n$ che passa per $2\delta - 1$ comunque scelti tra i $2\delta$ punti, ad es. per $a_2, b_1, b_2 \ldots$, senza passare per il rimanente punto $a_1$. Ed infatti, poichè le condizioni affinchè una curva piana d'ordine $n-3$ (o maggiore) sia aggiunta ad una curva piana $C_1^n$ sono tutte (come è noto) indipendenti fra loro, segue che tra i coni di vertice $S$ e d'ordine $n-3$ (o maggiore) aggiunti alla curva sghemba $C^n$, certo ne esiste qualcuno passante per le $\delta - 1$ rette $Sb$, $Sc, \ldots$, ma non per la retta $Sa$; ed uno di tali coni insieme ad un piano passante per $a_2$ e non per $a_1$, dà precisamente una superficie d'ordine $n-2$ (o maggiore) aggiunta a $C^n$ e passante per $2\delta - 1$ tra i $2\delta$ punti senza contenere il rimanente. Dunque resta dimostrato che tutte le superficie d'ordine $k \geqq n-2$ aggiunte alla curva $C^n$ segano sopra di essa una serie completa non speciale.

Lo stesso ragionamento si può applicare ad una curva $C^n$ dello spazio a $r$ dimensioni $S_r$, proiettandola sopra un piano da un $S_{r-3}$ generico (oppure proiettandola sopra un $S_{r-1}$ da un punto generico e procedendo allora col metodo da $r-1$ ad $r$). Si giunge così al teorema:

*Sopra una curva $C^n$ di $S_r$ le varietà aggiunte* (a $r-1$ dimensioni) *d'ordine $k \geqq n-2$ segano una serie completa non speciale* (*). Noi diciamo per ora (riserbandoci di allargare al n° 12 la definizione) che una varietà è *aggiunta* a $C^n$, quando in ciascun punto multiplo della curva la varietà ha tante intersezioni coi singoli rami uscenti dal punto, quante ne ha con una proiezione piana $C_1^n$ nel corrispon-

(*) Con una lieve modificazione del ragionamento, ed escludendo le curve razionali, si riuscirebbe a sostituire il limite $n-2$, col limite più basso $n-3$.

dente punto (e sui corrispondenti rami) una curva piana aggiunta; sicchè ogni punto $i$-uplo di $C^n$ assorbe esattamente $i(i-1)$ tra le intersezioni di $C^n$ con una varietà aggiunta (d'ordine $k \geqq n-2$), e

$$\mu = \sum i(i-1)$$

sono le intersezioni fisse di $C^n$ colle varietà aggiunte.

Il caso più semplice ($\mu = 0$) in cui $C^n$ non ha punti multipli ci dà:

*Sopra una curva $C^n$ di $S_r$ priva di punti multipli le varietà* (a $r-1$ dimensioni) *d'ordine $k \geqq n-2$ segano una serie completa non speciale d'ordine $kn$ e dimensione*

$$r_k = kn - p. \tag{13}$$

O sotto forma invariantiva (dicendo che un gruppo di due o più punti è *neutro* per una serie $g_n^r$ quando presenta una sola condizione alla serie): *La serie $k$-upla di una $g_n^r$ senza gruppi neutri per $k \geqq n-2$ è completa, non speciale.*

Questo risultato confrontato con quello del n° 7 ci prova che se $g_n^r$ non ha gruppi neutri il termine $d$ che comparisce nella (11) è nullo; e che inoltre il teorema ora enunciato potrebbe applicarsi a partire da $k = \chi + \pi + p - 1$ anzichè dal valore $k = n - 2$, quando il primo numero fosse inferiore al secondo.

10. E torniamo alla $C^n$ dotata di punti multipli, sulla quale le varietà aggiunte d'ordine $k \geqq n-2$ segano una serie completa non speciale, che ha l'ordine

$$kn - \mu$$

(perchè $\mu$ sono le intersezioni fisse di una aggiunta con $C^n$), e la dimensione

$$kn - \mu - p.$$

Ora diciamo $\nu_k$ il numero delle condizioni a cui deve soddisfare una varietà d'ordine $k$ per riuscire aggiunta a $C^n$, vale a dire per contenere quei $\mu$ punti fissi; la dimensione $r_k$ della serie $[k]$ d'ordine $kn$ segata su $C^n$ da *tutte* le varietà d'ordine $k$ sarà

$$r_k = kn - p - (\mu - \nu_k);$$

$\mu - \nu_k$ è dunque il difetto di completezza della serie $[k]$.

Non sembra facile il decidere se la quantità $\nu_k$ sia indipendente da $k$ per tutti i valori di $k \geqq n - 2$. Ma si può osservare che per quei valori di $k$, $\nu_k$ non può essere inferiore al numero $\frac{1}{2}\sum i(i-1)$, poichè tante sono le condizioni che si esigono affinchè un cono d'ordine $k$ (proiettante da un $S_{r-3}$ una curva piana) sia aggiunto a $C^n$ (o ciò che fa lo stesso alla sua proiezione piana); e $\nu_k$ non può essere superiore al numero $\sum (i-1)^2$, perchè una varietà aggiunta deve passare per ciascun punto $i$-uplo (il che impone *una* condizione per volta) e passare per $i(i-1) - i = (i-1)^2 - 1$ punti infinitamente vicini al primo (il che impone al più *altre* $(i-1)^2 - 1$ condizioni); dunque

$$\frac{1}{2}\sum i(i-1) \leqq \nu_k \leqq \sum (i-1)^2.$$

D'altra parte il numero $\nu_k$ delle condizioni che si esigono perchè una varietà d'ordine $k$ sia aggiunta a $C^n$ non può diminuire al crescere di $k$ (*).

Dunque si potrà scegliere un numero $\omega'$ così grande che per $k \geqq \omega'$, $\nu_k$ risulti indipendente da $k$, uguale per esempio a $\nu$. La differenza $\mu - \nu$ è allora un carattere appartenente al gruppo dei punti multipli di $C^n$. Avremo così il teorema:

*Il difetto di completezza costante della serie $[k]$ segata sopra una curva $C^n$ di $S_r$ dalle varietà d'ordine $k$ abbastanza alto* (ad es. $\geqq \chi + \pi - p + 1$ per il n° 7) *uguaglia la differenza tra il numero di punti fissi in cui le varietà aggiunte segano $C^n$ ed il numero delle condizioni che questi punti impongono ad una varietà d'ordine abba-*

(*) Si può infatti costruire una varietà d'ordine $k+1$ (degenere in una varietà d'ordine $k$ insieme ad un iperpiano), la quale contenga $\nu_k - 1$ comunque scelti tra i $\mu$ punti fissi su $C^n$ senza contenere tutti quei $\mu$ punti.

*stanza alto che debba contenerli.* Va notato che nel calcolo della differenza si può tener conto *staccatamente* di ciascun punto multiplo, sommando poi i singoli risultati; perchè già pei coni aggiunti d'ordine $n-2$ (n° 9) i punti multipli di $C^n$ presentano condizioni tutte indipendenti.

Ricordando la disuguaglianza $d \leqq \pi - p$ del n° 7, vediamo di qua che *la differenza nominata nel teorema non può mai superare la differenza tra il massimo genere $\pi$ che può avere una curva d'ordine $n$ di $S_r$ ed il genere $p$ che la $C^n$ data effettivamente possiede* (*).

In particolare poichè un punto doppio di $C^n$ assorbe due punti intersezioni di $C^n$ con una varietà aggiunta, ed impone una sola condizione alla varietà (che passa semplicemente per esso):

*Il massimo numero di punti doppi che può avere una curva $C^n$ di $S_r$ di genere $p$, uguaglia la differenza $\pi - p$.*

11. Si può domandare se (come accade per le curve piane, n° 8) si riesca ad esprimere il difetto di completezza costante della serie $[k]$ mediante le molteplicità dei punti multipli di $C^n$. Ora un esempio, col quale terminerò questo lavoro, mostrerà chiaramente che il nominato *difetto* non è funzione soltanto delle *molteplicità*, ma dipende pure dai mutui legami che passano tra le $i$ tangenti alla curva in ciascun punto $i$-uplo; tanto che riuscirebbe molto complicata una formola che volesse contemplare tutti i casi.

Sia $A$ un punto triplo *ordinario* di $C^n$ ed $a_1$, $a_2$, $a_3$ siano i tre punti infinitamente vicini ad $A$ sui tre rami di curva. Una varietà $V$ aggiunta a $C^n$ deve passare per $A$ e per i tre punti $a_1$, $a_2$, $a_3$ (giacchè per le proiezioni piane di quei punti passa ogni curva piana aggiunta alla proiezione piana di $C^n$); e sono *sei* $(3A + a_1 + a_2 + a_3)$ le intersezioni fisse di $C^n$ colla $V$ aggiunta assorbite dal punto multiplo. Dobbiamo esaminare quante condizioni quei sei punti impongano alla $V$. Intanto i tre punti riuniti in $A$ impongono *una* sola con-

(*) E se il massimo $\pi - p$ è raggiunto la $C^n$ di $S_r$ quando sia $n > 2r$, $r > 2$, sta sopra una superficie d'ordine $r-1$; e quindi o ciascun punto multiplo di $C^n$ ha le sue tangenti in un piano, o un solo punto multiplo non si trova in queste condizioni e la superficie è un cono col vertice in quel punto. Si dimostra tenendo conto dell'ultima osservazione del n° 4 e della nota al n° 3.

dizione, ed i due punti $a_1$, $a_2$ impongono sempre altre *due* condizioni indipendenti; le $V$ che soddisfanno a queste *tre* condizioni toccano in $A$ il piano $A a_1 a_2$. Sicchè o la tangente $A a_3$ si trova fuori del piano e allora una *quarta* condizione occorre perchè la $V$ passi per $a_3$ (e la $V$ acquista un punto doppio in $A$); oppure $A a_3$ si trova nel piano $A a_1 a_2$ e allora ogni $V$ che verifichi le *tre* prime condizioni passa in conseguenza per $a_3$ (ed ha un piano tangente fisso in $A$).

Dunque in virtù di un teorema del n° precedente possiamo dire che *un punto triplo ordinario di $C^n$ contribuisce con due o con tre unità al difetto di completezza costante della serie $[k]$ secondo che le tre tangenti nel punto triplo non appartengono oppure appartengono ad uno stesso piano* (*).

12. Nel primo caso non solo le $V$ d'ordine abbastanza alto che passano *doppiamente* per $A$ (e sono pure aggiunte negli altri punti multipli) segano su $C^n$ una serie completa non speciale, ma anche le $V$ che passano semplicemente per $A$ (e sono aggiunte altrove) segano una serie completa non speciale, perchè l'ordine e la dimensione della nuova serie superano di tre unità i corrispondenti caratteri dell'antica. Ora la stessa osservazione si può presentare sotto forma generale: se delle $i(i-1)$ intersezioni fisse della $C^n$ con una $V$ aggiunta, riunite in un punto $i$-uplo, alcune $j$ ad es. (e non $j+1$) presentano condizioni tutte indipendenti alle $V$ che passano per i rimanenti $i(i-1)-j$ punti, si può esigere che per questi soli punti passino le varietà (aggiunte altrove) senza che la serie segata perda il carattere di esser completa non speciale. Operando poi nello stesso modo negli altri punti multipli di $C^n$ si viene a sostituire al primitivo gruppo di $\mu$ punti base per le $V$ aggiunte un nuovo gruppo di $\mu' \leqq \mu$ punti contenuto nel primo e tale che tutte le varietà $V$ (di ordine $k$ abbastanza alto) passanti per i $\mu'$ punti del nuovo gruppo segano su $C^n$ una serie completa (non speciale), mentre ciò non ac-

(*) E similmente l'influenza di un punto $i$-uplo ordinario colle $i$ tangenti in un piano è di $\frac{i(i-1)}{2}$ unità, mentre se le $i$ tangenti nel punto $i$-uplo di una curva $C^n$ di $S_r$ $(r \geqq i)$ sono linearmente indipendenti, il punto influisce con $i-1$ unità soltanto.

cadrebbe se le $V$ passassero solo per $\mu'-1$ di quei punti. A questo sistema di varietà di dato ordine $k$ e di *massima dimensione* tra quelli di ordine $k$ che segano su $C^n$ una serie completa non speciale è naturale di assegnare il nome di *sistema aggiunto* (anzichè al sistema minore che prima abbiamo chiamato nello stesso modo). Il solo inconveniente sta nel fatto che la definizione del sistema più vasto è meno semplice che quella del sistema ristretto. Al nuovo sistema aggiunto si applicano senz'altro i teoremi del n° 10. Ma di più si vedrebbe che *ogni sistema di varietà d'ordine* $\equiv k$ *che seghi su* $C^n$ *una serie completa è contenuto entro al sistema aggiunto d'ordine* $k$; ed inoltre: *il sistema aggiunto è completamente definito dalle condizioni che tra le intersezioni fisse della varietà generica del sistema con* $C^n$ *ciascuna stia sulle varietà passanti per le rimanenti, e che i punti infinitamente vicini ad ogni punto multiplo di* $C^n$ *presentino condizioni tutte indipendenti alle varietà del sistema costrette a contenerli ancora una volta.*

Roma, maggio 1893.

G. CASTELNUOVO.