Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Den Gegenstand der nachstehenden Untersuchung bilden die Differentialgleichung

(1) $$\frac{d^n y}{dx^n} = xy,$$

die von Scherk*), Jacobi**), Lobatto***), Petzval†) behandelt worden ist, und die allgemeinere Differentialgleichung

(2) $$\frac{d^n y}{dx^n} = x^p y,$$

welche Herr Kummer††) durch p-fache bestimmte Integrale gelöst hat†††). Die Substitution $x = \alpha x'$ lässt aus (1) und (2) die Gleichungen

---

*) „Ueber die Integration der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x) y$", Crelle's Journ., Bd. 10, pag. 92.

**) „Bemerkung zu der Abhandlung etc.", Crelle's Journ., Bd. 10, pag. 279.

***) „Sur l'intégration des équations etc.", § 1, Crelle's Journ., Bd. 17, pag. 363.

†) „Integration der linearen Differentialgleichungen etc.", Wien, Braumüller, 1853.

††) „Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ par des intégrales définies", Crelle's Journ., Bd. 19, pag. 286.

†††) Die Abhandlung von S. Spitzer „Ueber die Integration etc.", Crelle's Journ., Bd. 57, pag. 82, enthält die Lösung der Differentialgleichung $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y$ durch bestimmte Integrale im Fall $m \geqq 2n$. Aber diese Gleichung geht durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \xi^{1-n} \eta = x^{n-1} \eta$ in die Gleichung

$$\frac{d^n \eta}{d\xi^n} = \pm (-1)^n \xi^{m-2n} \eta$$

über. Spitzer giebt, ohne es zu bemerken, im Wesentlichen nur eine Wiederholung der Kummer'schen Rechnung in einer etwas modificirten Form.

$$\frac{d^n y}{dx'^n} = \alpha^{n+1} x' y, \qquad \frac{d^n y}{dx'^n} = \alpha^{n+p} x'^p y$$

entstehen. Man kann also durch passende Wahl von α einen beliebigen constanten Factor zu den rechten Seiten von (1) und (2) hinzutreten lassen. Den folgenden Rechnungen sind die Differentialgleichungen

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{n+1} xy, \tag{3}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(n+p)^p} x^p y \tag{4}$$

(p eine beliebige positive ganze Zahl) zu Grunde gelegt worden. Nachdem in § 1 eine einfache Umformung eines bestimmten Integrals vorausgeschickt ist, wird in § 2 die Gleichung (3) und in §§ 3—4 die Gleichung (4) betrachtet.

§ 1.

In der Ebene, welche die complexen Werthe darstellt, sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 1. Der Schnittpunkt des Kreises mit der positiven reellen Axe heisse $\mathfrak{b}_0$. Dann wird nach § 3 der Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" (diese Annalen Bd. 35, pag. 515) durch $\bar{\Gamma}(a)$ das Integral

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{+\infty}^{(0)} e^{-t} t^{a-1} dt \tag{5}$$

bezeichnet, in welchem die Variable t den Abschnitt der positiven reellen Axe von $+\infty$ bis $\mathfrak{b}_0$, den Kreis $\mathfrak{K}$ in positiver Drehungsrichtung und wiederum die Strecke von $\mathfrak{b}_0$ bis $+\infty$ durchläuft. Auf dem ersten Theil des Integrationsweges kommt, wie vorausgesetzt wird, für die Potenz t^{a-1} derjenige Werth $e^{(a-1)\log t}$, in welchem $\log t$ reell ist, zur Anwendung. Es seien ferner $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{s-1}$ die $s-1$ vom Nullpunkte ausgehenden Geraden, welche mit der positiven reellen Axe die respectiven Winkel

$$\frac{2\pi}{s}, \quad \frac{4\pi}{s}, \quad \frac{6\pi}{s}, \ldots, \frac{2(s-1)\pi}{s}$$

bilden; s bedeutet eine beliebige positive ganze Zahl. Die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{s-1}$ mit dem Kreise $\mathfrak{K}$, welche $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{s-1}$ heissen mögen, und der Punkt $\mathfrak{b}_0$ theilen den Kreis in s gleiche Bogen. Der unendlich entfernte Punkt der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ werde $\mathfrak{q}_\nu$ genannt; ebenso sei $\mathfrak{q}_0$ der unendlich entfernte Punkt der positiven reellen Axe. Man setzt also

$$\mathfrak{b}_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}, \qquad \mathfrak{q}_\nu = \lim_{\varrho=\infty} \left(\varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}\right). \tag{6}$$

Die Grössen $\mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{q}_s$ sind mit $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{q}_0$ identisch.

Es soll nun ein Integral

$$(7) \qquad J = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-v^s} v^{m-1}\, dv$$

betrachtet werden, dessen Integrationsweg sich aus dem Abschnitt der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ von $\mathfrak{q}_\nu$ bis $\mathfrak{b}_\nu$, dem Kreisbogen $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{b}_{\nu+1}$ und dem Abschnitt der Geraden $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ von $\mathfrak{b}_{\nu+1}$ bis $\mathfrak{q}_{\nu+1}$ zusammensetzt; m ist irgend

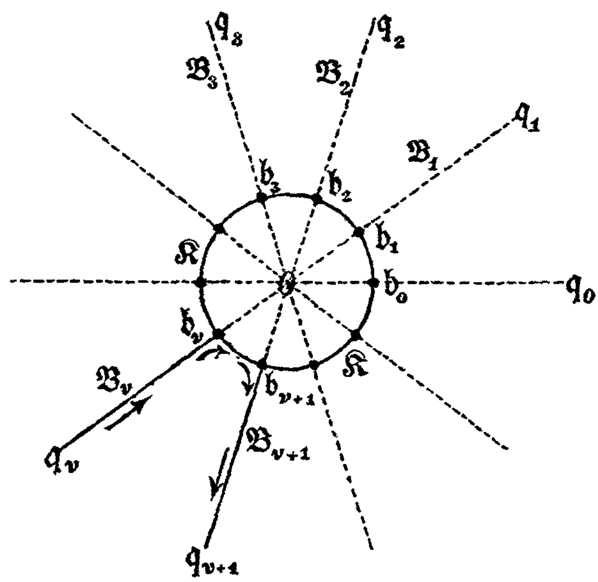

Fig. 1.

eine positive ganze Zahl. Für die Punkte der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ hat man, wenn mod. v durch ϱ bezeichnet wird,

$$v = \varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}, \qquad dv = e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}\, d\varrho$$

zu nehmen, also

$$(8) \qquad v^{m-1} dv = e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}} \varrho^{m-1} d\varrho.$$

Man wendet auf das Integral J die Substitution

$$v = t^{\frac{1}{s}}, \qquad v^s = t$$

an, woraus

$$e^{-v^s} v^{m-1} dv = \frac{1}{s} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1}\, dt$$

folgt. Setzt man $v = \varrho e^{\lambda i}$, $t = \varrho' e^{\lambda' i}$, so ist $\varrho' = \varrho^s$ und $\lambda' = s\lambda$. Sowohl dem genannten Abschnitte der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ als auch dem der Geraden $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ entspricht in dem Wege der Variable t die Strecke der positiven reellen Axe zwischen 1 und ∞, und während v längs des Kreisbogens $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{b}_{\nu+1}$ variirt, durchläuft t den ganzen Kreis $\mathfrak{K}$. Demnach ist J gleich dem Integral

$$(9) \qquad \frac{1}{s} \int_{+\infty}^{(0)} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1}\, dt,$$

dessen Integrationsweg mit dem des Integrals (5) übereinstimmt. Wegen der Gleichung $\varrho' = \varrho^s$ ist, so lange t auf der positiven reellen Axe fortschreitet, der reelle Werth von $\frac{1}{s} t^{\frac{m}{s}-1} dt$ gleich der Grösse

$$\frac{1}{s} \varrho'^{\frac{m}{s}-1} d\varrho' = \varrho^{m-1} d\varrho.$$

Aber auf der ersten Strecke des Weges der Variable v wird nach (8) der Werth von $v^{m-1} dv$ durch das Product aus der reellen Grösse $\varrho^{m-1} d\varrho$ und der Constante $e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}}$ angegeben. Folglich hat man (da durch die Substitution keine Aenderung des Werthes der zu integrirenden Function eintreten darf) auch auf dem ersten Theile des Integrationsweges von (9) für die Potenz $t^{\frac{m}{s}-1}$ das Product aus dem reellen Werthe $t^{\frac{m}{s}-1}$ und der Constante $e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}}$ anzuwenden. Man findet auf diese Weise für J den genaueren Ausdruck

$$J = \frac{1}{s} e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1} dt, \tag{10}$$

in welchem $t^{\frac{m}{s}-1}$ während des anfänglichen Fortschreitens von t längs der reellen Axe reell und positiv ist. Mit Rücksicht auf die Gleichung (5) kann nun in (10)

$$\overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1} dt = e^{-\frac{m\pi i}{s}} \bar{\Gamma}\left(\frac{m}{s}\right)$$

gesetzt werden, da $t^{\frac{m}{s}-1}$ den in (5) vorkommenden Zweig der Potenz t^{a-1} für $a = \frac{m}{s}$ bedeutet. Also gilt für J die Gleichung

$$\int_{q_\nu}^{q_{\nu+1}} e^{-v^s} v^{m-1} dv = \frac{1}{s} e^{\frac{2\nu+1}{s} m\pi i} \bar{\Gamma}\left(\frac{m}{s}\right). \tag{11}$$

Ist m ein Vielfaches von s, so wird das Integral J gleich Null, da die Grösse $\bar{\Gamma}(a)$ für positive ganzzahlige Argumente a verschwindet.

§ 2.

Man setze in die Differentialgleichung (3)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{n+1} xy$$

für y das bestimmte Integral

$$y = \int_g^h e^{vx}\, V\, dv$$

ein, in welchem V nur von v abhängt, und g, h Constante sind. Dann ergiebt sich

$$(n+1)\int_g^h e^{vx} v^n\, V\, dv - \int_g^h e^{vx} x\, V\, dv = 0$$

oder, wenn der zweite Summandus durch theilweise Integration umgeformt wird,

$$\int_g^h e^{vx}\left\{\frac{dV}{dv} + (n+1)v^n V\right\} dv - \left[e^{vx} V\right]_{v=g}^{v=h} = 0.$$

Man stellt für V die Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dv} + (n+1)v^n V = 0$$

auf, die durch

$$V = e^{-v^{n+1}}$$

befriedigt wird. Das Integral

(12) $$y = \int_g^h e^{-v^{n+1}+vx}\, dv$$

ist folglich eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (3), falls die Constanten g und h so gewählt werden, dass

(13) $$e^{-h^{n+1}+hx} - e^{-g^{n+1}+gx} = 0$$

ist.

Die Exponentialgrösse $e^{-v^{n+1}+vx}$ nähert sich (unter der Voraussetzung, dass x endlich bleibt) dem Werthe Null, wenn v reell, positiv und unbegrenzt gross ist. Dasselbe gilt, wenn man

$$v = \lim_{\varrho=\infty}\left(\varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{n+1}}\right)$$

setzt. Es mögen, indem in (6) $s = n+1$ genommen wird, durch $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$ jetzt die Werthe

(14) $$\mathfrak{b}_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{n+1}}, \quad \mathfrak{q}_\nu = \lim_{\varrho=\infty}\left(\varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{n+1}}\right)$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ bezeichnet werden. Da der Bedingung (13) genügt ist, wenn man für g und h irgend zwei der in (14) genannten Werthe $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{n+1}$ wählt, so existiren n particuläre Integrale der Gleichung (3) von der Form

(15) $$Y_\nu = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-v^{n+1}+vx}\, dv,$$

deren Integrationsweg dem des Integrals (7) analog ist. Diese

Functionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\varkappa$ bilden zusammen das vollständige Integral der Gleichung (3).

Die obige Entwickelung kommt im Wesentlichen auf die Rechnungen zurück, welche Jacobi, Lobatto, Petzval in Bezug auf die Gleichung (3) angestellt haben. Jacobi und Lobatto beschränken sich (l. c.) auf reelle Integrationswege, multipliciren aber die Grösse v successiv mit den Einheitswurzeln $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$. Petzval dagegen benutzt (l. c. Bd. I, pag. 57) die Integralgrenzen $\mathfrak{b}_1 . \infty, \mathfrak{b}_2 . \infty, \ldots, \mathfrak{b}_{n+1} . \infty$, wo unter ∞ der reelle positive unendliche Werth verstanden wird. In der von ihm angegebenen Lösung der Gleichung (3)

$$C_1 \int_0^{\mathfrak{b}_1 \cdot \infty} e^{-v^{n+1}+vx} dv + C_2 \int_0^{\mathfrak{b}_2 \cdot \infty} e^{-v^{n+1}+vx} dv$$
$$+ \cdots + C_{n+1} \int_0^{\mathfrak{b}_{n+1} \cdot \infty} e^{-v^{n+1}+vx} dv$$

sind die im Uebrigen willkürlichen Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ durch die (zuerst von Jacobi aufgestellte) Relation

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_{n+1} = 0$$

mit einander verbunden. Setzt man also

$$O = C_1 = C_2 = \cdots = C_{\nu-1} = C_{\nu+2} = C_{\nu+3} = \cdots = C_{n+1},$$

so erhält man, da $C_\nu = - C_{\nu+1}$ wird, das particuläre Integral

$$C_{\nu+1} \left\{ \int_0^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-v^{n+1}+vx} dv - \int_0^{\mathfrak{q}_\nu} e^{-v^{n+1}+vx} dv \right\}.$$

Letzterer Ausdruck ist aber gleich $C_{\nu+1} Y_\nu$. Statt die Variable v die Linien $\mathfrak{B}_\nu$ und $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ (von $\mathfrak{q}_\nu$ bis O und von O bis $\mathfrak{q}_{\nu+1}$, Fig. 1) durchlaufen zu lassen, kann man, da $v = 0$ kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function ist, den in (7) bezeichneten Integrationsweg anwenden*).

Die Differentialgleichung (3) hat die Eigenschaft, dass, wenn für y die Reihe

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

substituirt wird, die Coefficienten der Potenzen

$$x^n, \; x^{2n+1}, \; x^{3n+2}, \; \ldots, \; x^{\varkappa(n+1)-1}, \; \ldots$$

verschwinden. Zwischen $c_\varkappa$ und $c_{\varkappa+n+1}$ besteht (für ein beliebiges $\varkappa$) die Relation

$$c_{\varkappa+n+1} = \frac{1}{n+1} \, \frac{c_\varkappa}{(\varkappa+2)(\varkappa+3)\ldots(\varkappa+n+1)}.$$

Man findet, da $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ willkürlich bleiben, als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (3) die n unendlichen Reihen

*) Cfr. C. Jordan, „Cours d'Analyse de l'École Polytechnique", Tome III, 1887 (Paris, Gauthier-Villars § 195.

$$(16)\qquad \eta_l = \begin{cases} \frac{x^l}{l!} + \frac{\alpha_l x^{l+n+1}}{(l+n+1)!} + \frac{\alpha_l(\alpha_l+1)x^{l+2n+2}}{(l+2n+2)!} \\ + \cdots + \frac{\alpha_l(\alpha_l+1)(\alpha_l+2)\ldots(\alpha_l+\varkappa-1)x^{l+\varkappa(n+1)}}{(l+\varkappa n+\varkappa)!} + \cdots, \end{cases}$$

woselbst für l nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu setzen sind, und α_l die Constante

$$(17)\qquad \alpha_l = \frac{l+1}{n+1}$$

bedeutet. Durch $m!$ wird das Product $1.2\ldots m$ (durch $0!$ der Werth 1) bezeichnet.

Man gelangt nun unmittelbar zu den zwischen den Integralen Y_ν und den Reihen $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ bestehenden Beziehungen, wenn man in (15) für e^{vx} die Reihe

$$e^{vx} = 1 + \frac{vx}{1} + \frac{v^2x^2}{1.2} + \cdots + \frac{v^kx^k}{k!} + \cdots$$

einführt. Hierdurch ergiebt sich für Y_ν die Reihenentwickelung

$$(18)\qquad Y_\nu = P_0 + P_1\frac{x}{1} + P_2\frac{x^2}{1.2} + \cdots + P_k\frac{x^k}{k!} + \cdots,$$

in der zur Abkürzung

$$P_k = \int_{q_\nu}^{q_{\nu+1}} e^{-v^{n+1}} v^k\, dv$$

gesetzt ist. Da das letztere Integral aus (7) für $s=n+1$, $m=k+1$ entsteht, so folgt aus der Formel (11), wenn durch δ die Constante

$$(19)\qquad \delta = e^{\frac{2\nu+1}{n+1}\pi i}$$

bezeichnet wird, die Gleichung

$$P_k = \frac{\delta^{k+1}}{n+1}\,\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+1}\right).$$

Die verschiedenen Werthe von k sind je nach dem Reste, der bei der Division von $k+1$ durch $n+1$ verbleibt, in $n+1$ Gruppen zu theilen. In dem Falle, wo $k+1$ ein Multiplum von $n+1$ ist, hat man

$$P_k = 0,$$

da die Grösse $\bar{\Gamma}$ für positive ganzzahlige Argumente verschwindet. Ist $k+1$ kein Vielfach von $n+1$, so nenne man $l+1$ den Rest, der sich bei der Division $k+1 : n+1$ ergiebt. Es wird also

$$k+1 = \varkappa(n+1) + l + 1,\quad k = \varkappa(n+1) + l$$

gesetzt, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, und l einer der Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ist. Durch Anwendung der Formel (Bd. 35 dieser Annalen, pag. 515)

$$(20)\qquad \bar{\Gamma}(a+\varkappa) = (-1)^\varkappa a(a+1)\cdots(a+\varkappa-1)\,\bar{\Gamma}(a)$$

findet man dann für $\bar\Gamma\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$, $=\bar\Gamma\left(\frac{l+1}{n+1}+\varkappa\right)$, den Ausdruck

$$\bar\Gamma\left(\frac{k+1}{n+1}\right)=(-1)^{\varkappa}\alpha_l(\alpha_l+1)\cdots(\alpha_l+\varkappa-1)\bar\Gamma(\alpha_l),$$

wo α_l, wie in (17), den positiven ächten Bruch $\frac{l+1}{n+1}$ bedeutet. Da ferner $\delta^{n+1}=-1$ ist, so folgt

$$\delta^{k+1}=\delta^{\varkappa(n+1)+l+1}=(-1)^{\varkappa}\delta^{l+1}.$$

Mithin gilt für P_k die Gleichung

$$P_k=P_{\varkappa(n+1)+l}=\frac{\delta^{l+1}}{n+1}\alpha_l(\alpha_l+1)\cdots(\alpha_l+\varkappa-1)\bar\Gamma(\alpha_l). \tag{21}$$

Dieser Werth von P_k wird in die Reihe (18) substituirt. Nimmt man dann diejenigen Summanden zusammen, deren Indices k zu demselben l gehören, so entsteht die Formel

$$\begin{aligned}Y_\nu=\frac{\delta}{n+1}\Big\{&\bar\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\eta_0+\bar\Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right)\delta\eta_1+\bar\Gamma\left(\frac{3}{n+1}\right)\delta^2\eta_2+\cdots\\&+\bar\Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right)\delta^{n-1}\eta_{n-1}\Big\},\end{aligned} \tag{22}$$

in welcher δ die Constante (19), und $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ die Reihen (16) bezeichnen.

§ 3.

Die Differentialgleichung (4) soll zunächst für den Fall, dass $p=2$ ist, betrachtet werden. Dieselbe lautet dann

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{1}{(n+2)^2}x^2 y. \tag{23}$$

Man nenne g, h, g', h' Constante, V eine Function von v allein, W eine Function von w allein und substituire in (23) für y das Doppelintegral

$$y=\int_{g'}^{h'}W\,dw\int_g^h e^{vwx}V\,dv. \tag{24}$$

Dann entsteht die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned}&(n+2)^2\int_{g'}^{h'}w^n W\,dw\int_g^h e^{vwx}v^n V\,dv\\&=x^2\int_{g'}^{h'}W\,dw\int_g^h e^{vwx}V\,dv.\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Das rechts stehende Integral, dem man die Gestalt

$$x\int_{g'}^{h'}\frac{W}{w}\,dw\int_g^h e^{vwx}wx\,V\,dv$$

geben kann, wird durch zweimalige Anwendung der Formel der theilweisen Integration transformirt. Es ist

$$\int_g^h e^{vwx}\, wx\, V\, dv = \left[e^{vwx}\, V\right]_{v=g}^{v=h} - \int_g^h e^{vwx} \frac{dV}{dv}\, dv.$$

Unterwirft man also die Constanten g und h der Bedingung

(26) $$\left[e^{vwx}\, V\right]_{v=g}^{v=h} = 0$$

und kehrt die Reihenfolge der Integration (nach v und w) um, so wird die rechte Seite von (25) gleich dem Ausdruck

$$-\int_g^h \frac{1}{v} \frac{dV}{dv}\, dv \int_{g'}^{h'} e^{vwx}\, vx \frac{W}{w}\, dw.$$

Dass die Aenderung der Integrationsfolge zulässig ist, ergiebt sich aus der schliesslichen Wahl der Functionen V und W. Man setzt nun

$$\int_{g'}^{h'} e^{vwx} vx \frac{W}{w}\, dw$$

$$= \left[e^{vwx} \frac{W}{w}\right]_{w=g'}^{w=h'} - \int_{g'}^{h'} e^{vwx} \frac{d\frac{W}{w}}{dw}\, dw$$

und beschränkt g', h' durch die Bedingung

(27) $$\left[e^{vwx} \frac{W}{w}\right]_{w=g'}^{w=h'} = 0.$$

Dann wird aus (25) die Gleichung

$$(n+2)^2 \int_{g'}^{h'} w^n W\, dw \int_g^h e^{vwx} v^n V\, dv$$

$$= \int_{g'}^{h'} \frac{d\frac{W}{w}}{dw}\, dw \int_g^h e^{vwx} \frac{1}{v} \frac{dV}{dv}\, dv$$

erhalten, der Genüge geschieht, wenn V und W durch die Differentialgleichungen

(28) $$\begin{cases} (n+2)\, v^n V = -\dfrac{1}{v} \dfrac{dV}{dv}, \\[2ex] (n+2)\, w^n W = -\dfrac{d\frac{W}{w}}{dw}, \end{cases}$$

d. h.

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dv} = \frac{d \log V}{dv} = -(n+2) v^{n+1},$$

$$\frac{w}{W} \frac{d\frac{W}{w}}{dw} = \frac{d \log \frac{W}{w}}{dw} = -(n+2) w^{n+1}$$

bestimmt werden. Es ist hiernach

(29) $$V = e^{-v^{n+2}}, \qquad W = w e^{-w^{n+2}}.$$

Nennt man ferner (für $\nu = 1, 2, \ldots, n+2$)

$$(30) \qquad \mathfrak{q}_\nu = \lim_{\varrho=\infty} \left(\varrho\, e^{\frac{2\nu\pi i}{n+2}} \right)$$

und wählt für g, h und für g', h' je zwei der Werthe $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{n+2}$ so sind die Bedingungen (26) und (27) erfüllt. Das Doppelintegral

$$(31) \qquad Y_{\mu,\nu} = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-w^{n+2}}\, w\, dw \int_{\mathfrak{q}_\mu}^{\mathfrak{q}_{\mu+1}} e^{-v^{n+2}+vwx}\, dv,$$

in welchem sowohl v als w einen Integrationsweg von der in (7) angegebenen Art durchlaufen mögen, ist also, für beliebige Werthe der Indices μ und ν, eine Lösung der Differentialgleichung (23).

Wird in (31)

$$e^{vwx} = 1 + \frac{vwx}{1} + \cdots + \frac{v^k w^k x^k}{k!} + \cdots$$

gesetzt, so folgt

$$(32) \qquad Y_{\mu,\nu} = Q_0 + Q_1 \frac{x}{1} + \cdots + Q_k \frac{x^k}{k!} + \cdots,$$

wo Q_k die Constante

$$Q_k = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-w^{n+2}} w^{k+1}\, dw \int_{\mathfrak{q}_\mu}^{\mathfrak{q}_{\mu+1}} e^{-v^{n+2}} v^k\, dv.$$

bedeutet. Die Grösse Q_k stellt das Product zweier einfacher Integrale dar, deren Werth sich aus der Formel (11) (für $s = n+2$, $m = k+1$ resp. $k+2$) ergiebt. Man findet, wenn durch A und ε die von k unabhängigen Constanten

$$(33) \qquad A = \frac{1}{(n+2)^2}\, e^{\frac{2\mu+1+2(2\nu+1)}{n+2}\pi i}, \qquad \varepsilon = e^{\frac{\mu+\nu+1}{n+2} 2\pi i}$$

bezeichnet werden, für Q_k den Ausdruck

$$(34) \qquad Q_k = A\, \varepsilon^k\, \bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+2}\right) \bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+2}\right).$$

Die Grösse Q_k verschwindet, sobald k die Form $\varkappa(n+2) - 2$ oder $\varkappa(n+2) - 1$ annimmt, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl ist; denn hierfür wird $\bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+2}\right)$, resp. $\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+2}\right)$, gleich Null. In der Entwickelung (32) des Integrals $Y_{\mu,\nu}$ fehlen daher die Potenzen

$$x^n,\ x^{n+1},\ x^{2n+2},\ x^{2n+3},\ \ldots,\ x^{\varkappa(n+2)-2},\ x^{\varkappa(n+2)-1},\ \ldots.$$

Es sei im Uebrigen

$$k = \varkappa(n+2) + l,$$

wo l eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ bedeutet. Dann gelten nach (20) die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)=\bar{\Gamma}(\beta_l+\varkappa)=(-1)^\varkappa\beta_l(\beta_l+1)\dots(\beta_l+\varkappa-1)\bar{\Gamma}(\beta_l),$$

$$\bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+2}\right)=\bar{\Gamma}(\gamma_l+\varkappa)=(-1)^\varkappa\gamma_l(\gamma_l+1)\dots(\gamma_l+\varkappa-1)\bar{\Gamma}(\gamma_l),$$

in denen zur Abkürzung

$$(35)\qquad \beta_l=\frac{l+1}{n+2},\qquad \gamma_l=\frac{l+2}{n+2}$$

gesetzt ist. Für Q_k ergiebt sich, wenn man beachtet, dass nach (33)

$$\varepsilon^{n+2}=1,\quad \varepsilon^k=\varepsilon^{\varkappa(n+2)+l}=\varepsilon^l$$

ist, hieraus der Werth

$$(36)\qquad Q_k=Q_{\varkappa(n+2)+l}$$
$$=A\varepsilon^l\beta_l\gamma_l(\beta_l+1)(\gamma_l+1)\dots(\beta_l+\varkappa-1)(\gamma_l+\varkappa-1)\bar{\Gamma}(\beta_l)\,\bar{\Gamma}(\gamma_l).$$

Indem man nun in (32) diejenigen Terme, deren Index k bei der Division durch $n+2$ denselben Rest l liefert, zu Theilsummen vereinigt, und durch ζ_l für $l=0,1,2,\dots,n-1$ die Reihe

$$(37)\qquad \zeta_l=\begin{cases}\dfrac{x^l}{l!}+\dfrac{\beta_l\gamma_l x^{l+n+2}}{(l+n+2)!}+\dfrac{\beta_l\gamma_l(\beta_l+1)(\gamma_l+1)x^{l+2(n+2)}}{(l+2n+4)!}\\[2ex] +\dots+\dfrac{\beta_l\gamma_l(\beta_l+1)(\gamma_l+1)\dots(\beta_l+\varkappa-1)(\gamma_l+\varkappa-1)x^{l+\varkappa(n+2)}}{(l+n\varkappa+2\varkappa)!}+\cdots\end{cases}$$

bezeichnet, findet man, dass das Integral $Y_{\mu,\nu}$ mit den Reihen ζ^l durch die Gleichung

$$(38)\qquad Y_{\mu,\nu}=A\left\{\begin{aligned}&\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+2}\right)\zeta_0+\bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+2}\right)\varepsilon\zeta_1\\ &+\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{4}{n+2}\right)\varepsilon^2\zeta_2+\dots+\bar{\Gamma}\left(\frac{n}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\varepsilon^{n-1}\zeta_{n-1}\end{aligned}\right\}$$

verbunden ist.

§ 4.

In die Differentialgleichung (4)

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{1}{(n+p)^p}x^py$$

werde für y das p-fache Integral

$$(39)\qquad \int_{g_p}^{h_p}T_p\,dt_p\int_{g_{p-1}}^{h_{p-1}}T_{p-1}\,dt_{p-1}\dots\int_{g_2}^{h_2}T_2\,dt_2\int_{g_1}^{h_1}e^{t_1t_2\cdots t_px}T_1\,dt_1$$

eingesetzt, in welchem T_ν (für $\nu=1,2,\dots,p$) eine Function von t_ν allein ist, und $g_1, h_1, \dots, g_p, h_p$ Constante bedeuten. Es entsteht dann die Gleichung

$$(40)\quad (n+p)^p \int_{g_p}^{h_p} t_p^n T_p\, dt_p \dots \int_{g_2}^{h_2} t_2^n T_2\, dt_2 \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_1^n T_1\, dt_1$$
$$= x^p \int_{g_p}^{h_p} T_p\, dt_p \dots \int_{g_2}^{h_2} T_2\, dt_2 \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} T_1\, dt_1,$$

auf deren rechte Seite man die Formel der theilweisen Integration p Mal, und zwar nach einander in Bezug auf die Variablen $t_1, t_2, \dots, t_p$ anwendet. Hierbei werde die Reihenfolge der Integrationen regelmässig in der Art geändert, dass diejenige Integration, wo partiell integrirt werden soll, die zuerst auszuführende ist. Für das Integral nach t_1 erhält man, indem man gleichzeitig bei $T_2, T_3, \dots, T_p$ die Factoren $t_2^{-1}, t_3^{-1}, \dots, t_p^{-1}$ hinzufügt, den Ausdruck

$$\int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_2 t_3 \dots t_p x\, T_1\, dt_1$$
$$= \left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x}\, T_1\right]_{t_1=g_1}^{t_1=h_1} - \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{dT_1}{dt_1}\, dt_1.$$

Die Constanten g_1 und h_1 werden der Bedingung

$$\left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x}\, T_1\right]_{t_1=g_1}^{t_1=h_1} = 0$$

unterworfen. Analog schreibt man

$$\int_{g_2}^{h_2} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x}\, t_1 t_3 t_4 \dots t_p\, \frac{T_2}{t_2}\, dt_2$$
$$= \left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_2}{t_2}\right]_{t_2=g_2}^{t_2=h_2} - \int_{g_2}^{h_2} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{d\dfrac{T_2}{t_2}}{dt_2}\, dt_2$$

und bestimmt, dass

$$\left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_2}{t_2}\right]_{t_2=g_2}^{t_2=h_2} = 0$$

sein soll. Bei der theilweisen Integration nach t_ν hat man zu berücksichtigen, dass zu T_ν bereits der Factor $\frac{1}{t_\nu^{\nu-1}}$ hinzugetreten ist (wegen der vorausgegangenen theilweisen Integrationen nach $t_1, t_2, \dots, t_{\nu-1}$), so dass sich die Gleichung

$$\int_{g_\nu}^{h_\nu} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x}\, t_1 t_2 \dots t_{\nu-1} t_{\nu+1} \dots t_p x\, \frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}\, dt_\nu$$
$$= \left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}\right]_{t_\nu=g_\nu}^{t_\nu=h_\nu} - \int_{g_\nu}^{h_\nu} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu}\, dt_\nu$$

ergiebt. Durch die späteren theilweisen Integrationen nach

$$t_{\nu+1},\ t_{\nu+2}, \dots, t_p$$

tritt zu $\dfrac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu}$ noch der Factor $\dfrac{1}{t_\nu^{p-\nu}}$ hinzu. Für die Constanten g_ν und h_ν wird $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ die Bedingung

$$\left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x}\frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}\right]_{t_\nu=g_\nu}^{t_\nu=h_\nu} = 0 \tag{41}$$

aufgestellt. Auf diese Weise entsteht aus (40) die Gleichung

$$(n+p)^p\int_{g_p}^{h_p} t_p^n T_p\,dt_p \ldots \int_{g_\nu}^{h_\nu} t_\nu^n T_\nu\,dt_\nu \ldots \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2\cdots t_p x} t_1^n T_1\,dt_1$$
$$= (-1)^p \int_{g_p}^{h_p} \frac{d\dfrac{T_p}{t_p^{p-1}}}{dt_p}\,dt_p \cdots \int_{g_\nu}^{h_\nu} \frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu}\,\frac{dt_\nu}{t_\nu^{p-\nu}} \cdots$$
$$\cdots \int_{g_2}^{h_2} \frac{d\dfrac{T_2}{t_2}}{dt_2}\,\frac{t_2}{t_2^{p-2}} \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2\cdots t_p x}\,\frac{dT_1}{dt_1}\,\frac{dt_1}{t_1^{p-1}}.$$

Um derselben zu genügen, definirt man (für $\nu = 1, 2, \ldots, p$) die Function T_ν durch die Differentialgleichung

$$\frac{1}{t_\nu^{p-\nu}}\,\frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} = -(n+p)\,t_\nu^n T_\nu. \tag{42}$$

Durch Multiplication mit $\dfrac{1}{T_\nu}t_\nu^{p-1}$ folgt hieraus

$$\frac{t_\nu^{\nu-1}}{T_\nu}\,\frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} = \frac{d\log\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} = -(n+p)\,t_\nu^{n+p-1},$$

also

$$T_\nu = t_\nu^{\nu-1} e^{-t_\nu^{n+p}}. \tag{43}$$

Die Bedingungen (41) sind erfüllt, wenn für die Integralgrenzen $g_1, h_1, \ldots, g_p, h_p$ Werthe aus der Reihe $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ genommen werden, wo q_m (für $m = 1, 2, \ldots, n+p$) die Grösse

$$q_m = \lim_{\varrho=\infty}\left(\varrho\, e^{\frac{2m\pi i}{n+p}}\right) \tag{44}$$

bedeutet. Es mögen, indem man unter $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ beliebige der $n+p$ Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n+p$ versteht, die Werthe

$$g_1 = q_\alpha,\ h_1 = q_{\alpha+1},\ g_2 = q_\beta,\ h_2 = q_{\beta+1}, \ldots, g_p = q_\mu,\ h_p = q_{\mu+1} \tag{45}$$

zur Anwendung kommen. Bezeichnet man also zur Abkürzung durch Φ die Function

(46) $$\Phi = e^{-t_1^{n+p}-t_2^{n+p}-\cdots-t_p^{n+p}+t_1t_2\cdots t_p x}\, t_2 t_3^2 \ldots t_p^{p-1}$$

und wählt für sämmtliche Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_p$ Integrationswege, die dem Weg der Variable v in (7) analog sind, so erhält man den Ausdruck

(47) $$Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu} = \int_{q_\mu}^{q_{\mu+1}} dt_p \ldots \int_{q_\beta}^{q_{\beta+1}} dt_2 \int_{q_\alpha}^{q_{\alpha+1}} \Phi\, dt_1$$

als particuläre Lösung der Differentialgleichung (4).

Die Integration der Gleichung (4) durch die Potenzreihe

(48) $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

liefert n particuläre Lösungen von der Form

(49) $$\omega_l = \frac{x^l}{l!} + \frac{\sigma_l^{(1)}\sigma_l^{(2)}\ldots\sigma_l^{(p)} x^{l+n+p}}{(l+n+p)!} + \frac{\sigma_l^{(1)}(\sigma_l^{(1)}+1)\sigma_l^{(2)}(\sigma_l^{(2)}+1)\ldots\sigma_l^{(p)}(\sigma_l^{(p)}+1)x^{l+2(n+p)}}{(l+2n+2p)!}$$
$$+ \frac{\sigma_l^{(1)}(\sigma_l^{(1)}+1)(\sigma_l^{(1)}+2)\sigma_l^{(2)}(\sigma_l^{(2)}+1)(\sigma_l^{(2)}+2)\ldots\sigma_l^{(p)}(\sigma_l^{(p)}+1)(\sigma_l^{(p)}+2)x^{l+3(n+p)}}{(l+3n+3p)!} + \cdot$$

woselbst l die Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ nach einander annimmt, und $\sigma_l^{(1)}, \sigma_l^{(2)}, \ldots, \sigma_l^{(p)}$ die Constanten

(50) $$\sigma_l^{(1)} = \frac{l+1}{n+p},\ \sigma_l^{(2)} = \frac{l+2}{n+p}, \ldots, \sigma_l^{(p)} = \frac{l+p}{n+p}$$

bedeuten; $m!$ ist $1.2.3\ldots m$ (und $0!$ gleich 1). Die Potenzen

$$\begin{array}{llll} x^n, & x^{n+1}, & \ldots, & x^{n+p-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{\varkappa(n+p)-p}, & x^{\varkappa(n+p)-(p-1)}, & \ldots, & x^{\varkappa(n+p)-1}, \text{ etc.} \end{array}$$

($\varkappa$ eine beliebige positive ganze Zahl) kommen in den letzteren Entwickelungen nicht vor.

Da die unendlichen Reihen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ das vollständige Integral von (4) angeben, so kann man die Grösse $Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu}$ als lineare Function derselben darstellen. Um einen solchen Ausdruck für $Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu}$ abzuleiten, substituirt man in (46)

$$e^{t_1t_2\cdots t_p x} = 1 + \frac{t_1 t_2 \ldots t_p x}{1} + \cdots + \frac{t_1^k t_2^k \ldots t_p^k x^k}{k!} + \cdots.$$

Dann ergiebt sich

(51) $$Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu} = S_0 + S_1 \frac{x}{1} + S_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + S_k \frac{x^k}{k!} + \cdots + \text{inf.},$$

wo S_k das Product der p Integrale

$$S_k = \int_{q_\alpha}^{q_{\alpha+1}} e^{-t_1^{n+p}} t_1^k dt_1 \int_{q_\beta}^{q_{\beta+1}} e^{-t_2^{n+p}} t_2^{k+1} dt_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{q_\mu}^{q_{\mu+1}} e^{-t_p^{n+p}} t_p^{k+p-1} dt_p$$

bezeichnet. Aus der Formel (11) folgt aber, wenn man B und θ die von k unabhängigen Constanten

$$(52)\qquad \begin{cases} B = \dfrac{1}{(n+p)^p}\, e^{\frac{2\alpha+1+2(2\beta+1)+\cdots+p(2\mu+1)}{n+p}\pi i}, \\ \theta = e^{\frac{2(\alpha+\beta+\cdots+\mu)+p}{n+p}\pi i} \end{cases}$$

nennt, für S_k der Werth

$$(53)\qquad S_k = B\theta^k\,\bar{\Gamma}\Big(\frac{k+1}{n+p}\Big)\bar{\Gamma}\Big(\frac{k+2}{n+p}\Big)\cdots\bar{\Gamma}\Big(\frac{k+p}{n+p}\Big).$$

Die letztere Gleichnng zeigt, dass S_k verschwindet, sobald eine der Zahlen

$$k+1,\ k+2,\ldots,\ k+p$$

ein Multiplum von $n+p$ ist. Setzt man also

$$k = \varkappa(n+p)+l,$$

wo $\varkappa$ und l positive ganze Zahlen sind, und $l < n+p$, so entsprechen die von Null verschiedenen Werthe der Grösse S_k den Fällen $l=0$, $l=1,\ldots, l=n-1$; für $l=n$, $l=n+1,\ldots$ werden $k+p$, $k+p-1,\ldots$ Vielfache von $n+p$. Durch Benutzung der Formel (20) findet man (für $v=1,2,\ldots,p$), wenn man nach (50) den Quotienten $\dfrac{l+v}{n+p}$ kurz $\sigma_l^{(v)}$ nennt,

$$\bar{\Gamma}\Big(\frac{k+v}{n+p}\Big) = \bar{\Gamma}\Big(\frac{l+v}{n+p}+\varkappa\Big) = \bar{\Gamma}(\sigma_l^{(v)}+\varkappa)$$
$$= (-1)^\varkappa\sigma_l^{(v)}(\sigma_l^{(v)}+1)\cdots(\sigma_l^{(v)}+\varkappa-1)\,\bar{\Gamma}(\sigma_l^{(v)}).$$

Für θ^k gilt, da nach (52) θ^{n+p} den Werth $(-1)^p$ hat, die Gleichung

$$\theta^k = \theta^{\varkappa(n+p)+l} = (-1)^{p\varkappa}\theta^l.$$

Folglich ist S_k, d. h. $S_{\varkappa(n+p)+l}$, gleich dem Producte aus der von $\varkappa$ unabhängigen Grösse

$$B\theta^l\,\bar{\Gamma}\Big(\frac{l+1}{n+p}\Big)\bar{\Gamma}\Big(\frac{l+2}{n+p}\Big)\cdots\Big(\frac{l+p}{n+p}\Big)$$

und dem Ausdrucke

$$\prod_{v=1}^{v=p}\sigma_l^{(v)}(\sigma_l^{(v)}+1)(\sigma_l^{(v)}+2)\cdots(\sigma_l^{(v)}+\varkappa-1).$$

Dieser Werth von S_k ist in (51) einzusetzen. Werden zur Abkürzung durch $G_1, G_2,\ldots, G_n$ die Constanten

$$G_1 = \bar{\Gamma}\left(\frac{1}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{p}{n+p}\right),$$
$$G_2 = \bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{4}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{p+1}{n+p}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_n = \bar{\Gamma}\left(\frac{n}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{n+1}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{n+2}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{n+p-1}{n+p}\right)$$

bezeichnet, so ergiebt sich für das Integral $Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu}$ die Gleichung

$$(54)\qquad Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu} = B\left\{G_1\,\omega_0 + G_2\,\theta\,\omega_1 + G_3\,\theta^2\,\omega_2 + \cdots + G_n\,\theta^{n-1}\,\omega_{n-1}\right\},$$

in der $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ die Reihen (49), und B, θ die Constanten (52) bedeuten. Die verschiedene Wahl der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ beeinflusst auf der rechten Seite dieser Gleichung nur die Werthe B und θ.

Kiel, im September 1890.