

Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.

Von A. CLEBSCH in GÖTTINGEN.

Im 17. Bande der Göttinger Abhandlungen habe ich eine bisher nicht untersuchte Fundamentalfrage der Invariantentheorie behandelt, und erlaube mir, die Resultate der Untersuchung an dieser Stelle kurz zu reproduciren.

Die neuere Algebra behandelt die Theorie der algebraischen Formen, d. h. ganzer Functionen, welche Reihen von n Veränderlichen in homogener Weise enthalten. Diese n Veränderlichen (etwa $x_1, x_2 \dots x_n$) mögen die Coordinaten eines Punktes x in einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen genannt werden. Ersetzt man in einer homogenen Function f der x mit den Coefficienten a die x durch lineare Functionen der Coordinaten eines veränderlichen Punktes y , so mögen die neuen Coefficienten durch b bezeichnet werden. Ist endlich r die Determinante der linearen Transformation, so betrachtet man diejenigen ganzen Functionen der a und x , welche sich von denselben Functionen der b und y nur um eine Potenz von r unterscheiden, und nennt solche durch eine Gleichung:

$$(1) \quad \Pi(b, y) = r^i \Pi(a, x)$$

charakteristische Function *Invariante* oder *Covariante*, jenachdem sie von den y, x frei ist oder nicht. Ich werde im Folgenden der Kürze wegen die Bezeichnung *Invarianten* auch für die letzteren in Anwendung bringen, so wie für alle ähnlichen, einer Gleichung (1) genügenden Bildungen verwickelteren Charakters, von denen sogleich die Rede sein wird.

Es ist kein Grund vorhanden, sich auf eine einzige Function zu beschränken, deren Coefficienten bei der Bildung einer Form Π benutzt werden sollen. Aber eben so wenig liegt ein Grund vor, warum man sich auf eine Reihe von Coordinaten beschränken soll. Es können die benutzten Grundformen selbst bereits mehr als eine Reihe von Punktcoordinaten enthalten; ausserdem können bei Bildung von Π neue Punkte in die Betrachtung hineingezogen werden; alle aber werden stets *derselben* linearen Transformation unterworfen.

In der Theorie der binären Formen zeigt es sich (vgl. Gordan, diese Annalen Bd. III., p. 360 und meine „Theorie der binären Formen“, Leipzig 1872, § 14.), dass es genüge, Grundformen und Invarianten mit höchstens *einer* Reihe von Veränderlichen zu betrachten. Denn die aus Grundformen mit mehreren Reihen entspringenden Invarianten lassen sich immer durch solche ersetzen, die aus einem simultanen Systeme von Grundformen gebildet werden, deren jede nur *eine* Reihe enthält. Ebenso kann jede Invariante mit mehreren Reihen aus solchen mit nur einer Reihe und deren Polaren zusammengesetzt werden. Unter Polaren versteht man dabei die einfachen invarianten Bildungen, welche aus einer Form hervorgehen, wenn man Prozesse wie:

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad , \quad z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad , \quad \dots$$

in beliebiger Folge und beliebig oft auf dieselbe anwendet.

Es entsteht die Frage, ob ähnliche Fundamentalsätze für Formen höherer Mannigfaltigkeiten gelten. Um das Resultat, zu welchem ich für diese gelangt bin, ausdrücken zu können, muss ich einige Bemerkungen voranschicken.

Sofern die Veränderlichen $x, y \dots$ in Bezug auf lineare Transformationen betrachtet werden, ist es von besonderer Wichtigkeit, wenn eine Anzahl von Reihen (k):

$$(1) \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

nur in den Verbindungen vorkommen, welche entstehen, wenn man aus irgend k Vertikalreihen die Determinanten bildet. Solche Verbindungen sind in der Geometrie der Ebene für $k = 2$ die Liniencoordinaten, in der Geometrie des Raumes für $k = 2$ Linienkoordinaten, für $k = 3$ Ebenencoordinaten. Bei einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen treten $n - 1$ Classen dieser Art auf, und die gedachten Determinanten, welche durch $q_{i, k} \dots$ (k Indices) bezeichnet werden sollen, bezeichne ich als Veränderliche der entsprechenden Classe; dem Werthe $k = 1$ entsprechen die Coordinaten eines Punktes selbst.

Man kann die Classen von Gebilden, welchen diese Coordinaten angehören, und welche hier beziehungsweise durch k Punkte bestimmt sind, noch auf eine zweite, dualistisch entgegengesetzte Art erzeugen. Bezeichnen wir durch u_1, u_2, \dots, u_n die Coordinaten eines Gebildes, dessen Coordinaten aus $n - 1$ Reihen x zusammengesetzt sind, entsprechend einer Geraden in der Ebene, einer Ebene im Raum. Bezeichnen wir ferner durch u_x Ausdrücke wie $u_1 x_1 + u_2 x_2 \dots + u_n x_n$. Haben wir dann $n - k$ Reihen von u :

$$(2) \quad \begin{array}{c} u_1 \quad , \quad u_2 \dots u_n \\ v_1 \quad , \quad v_2 \dots v_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

und bestehen zwischen den Reihen (1) (2) die $k(n - k)$ Gleichungen:

$$\begin{array}{c} u_x = 0 \quad , \quad u_y = 0, \dots \\ v_x = 0 \quad , \quad v_y = 0, \dots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

so sind die aus den $u, v \dots$ zusammengesetzten $(n - k)$ reihigen Determinanten $p_{\varrho, \sigma, \dots}$ den q einzeln in gewisser Folge proportional, und zwar ist immer, wenn τ den Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$\tau q_{i, h \dots} = p_{\varrho, \sigma \dots},$$

sobald die Indices $i, h \dots, \varrho, \sigma \dots$ eine positive Permutation der Zahlen $1, 2 \dots n$ bilden. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist die doppelte Darstellungsweise, welche die Coordinaten einer Geraden im Raume zulassen.

Man kann also eine Classe von Veränderlichen gleichzeitig aus k Reihen x , wie aus $n - k$ Reihen u zusammensetzen. Ich bezeichne diese Classe von Veränderlichen als Classe $(k, n - k)$. Die Punkte gehören der Classe $(1, n - 1)$, die Veränderlichen u der Classe $(n - 1, 1)$ an. Die doppelte Ausdrucksweise der Veränderlichen einer Classe begründet die Art und Weise, in welcher das *Princip der Dualität* in einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen auftritt.

Die Veränderlichen p oder q , welche einem Grundgebilde der Classe $(k, n - k)$ angehören, sind nicht von einander unabhängig, wenn nicht k einen der Werthe 1 oder $n - 1$ hat. In allen andern Fällen besteht zwischen diesen Coordinaten eine Anzahl von Beziehungen. Das einfachste Beispiel liefern die Coordinaten einer Geraden im Raume, zwischen denen die bekannte Gleichung:

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

stattfindet.

Betrachten wir nun eine Form f , welche beliebig viele Reihen von Veränderlichen aus allen Classen enthält, so tritt zunächst hervor, dass wegen dieser Beziehungen die Gestalt der Form f , ohne dass ihr Wesen sich ändere, mannigfach abgeändert werden kann. Ich beweise nun zunächst, dass man jeder Form f eine gewisse feste Normalform geben kann, und zwar auf eine einzige Weise. Diese Normalform ist dadurch vollkommen definirt, dass f in derselben gewissen partiellen Differentialgleichungen genügt. Man erhält diese in folgender Weise. Es sei:

$$\Sigma C \cdot p_{i h \dots} p_{i' h' \dots} p_{i'' h'' \dots} \dots = 0$$

eine der homogenen Gleichungen, welche zwischen den Veränderlichen

p der betreffenden Classe besteht; die Function f genügt dann in der Normalform in Bezug auf jede in ihr auftretende Reihe von Veränderlichen den betreffenden Gleichungen:

$$(1) \quad \Sigma C \cdot \frac{\partial^q f}{\partial p_{ih} \dots \partial p_{i'k'} \dots \partial p_{i''k''} \dots} = 0.$$

Die *Normalform* einer Function f begründet die Einführung einer *symbolischen Bezeichnung*, welche ihr Wesen vollständig ausdrückt. Eine symbolische Bezeichnung setzt an Stelle einer gegebenen Form eine einfachere, zwischen deren Coefficienten genau dieselben *linearen* Beziehungen obwalten, wie zwischen denen der gegebenen Form; höhere Beziehungen sind dabei ganz gleichgültig. Eine symbolische Darstellung ist daher eine gegebene Form in der Normalform zu vertreten fähig, nur und sobald zwischen den symbolischen Coefficienten genau und ausschliesslich dieselben linearen Relationen an und für sich stattfinden, welche durch die Gleichungen (1) für die Normalform bedingt sind. Dies wird erfüllt durch folgende Annahmen:

1. Die symbolische Darstellung der Form f in der Normalform ist ein Produkt von ebensoviel Factoren, als f Reihen von Veränderlichen enthält.

2. Jeder symbolische Factor ist eine Potenz eines linearen Ausdrucks der Veränderlichen der betreffenden Reihe; der Exponent ist die Ordnung, zu welcher die Reihe in f auftritt.

3. Ein solcher linearer Ausdruck ist eine Determinante von n Reihen, zusammengesetzt aus den Reihen x , bez. u , welche die betreffende Reihe von Veränderlichen bilden, und der entsprechenden Zahl symbolischer Coefficienten. Jeder dieser Ausdrücke ist demnach einer doppelten symbolischen Darstellung fähig, jenachdem die betreffende Reihe von Veränderlichen aus Reihen x oder aus Reihen u zusammengesetzt wird.

Solche symbolische Darstellung habe ich im II. Bande dieser *Annalen* bezüglich der Linienkoordinaten im Raume angegeben, und dort sowie in Nr. 3. der *Gött. Nachr.* von 1872 Anwendungen davon gemacht.

Von dieser symbolischen Darstellung ausgehend, kann man nun den folgenden Fundamentalsatz beweisen:

Jede Form f , welche beliebig viele Reihen aller Classen enthält, kann aus Polaren solcher Formen φ zusammengesetzt werden, welche aus jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten.

Unter dem Ausdruck *Polare* verstehe ich hier auch bezüglich der Veränderlichen irgend einer Classe (p , bez. p' , p'' . . .) Bildungen, welche durch wiederholte Anwendung der Operationen:

$$\Sigma p'_{ih} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ih} \dots}, \quad \Sigma p''_{ih} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ih} \dots}, \dots$$

hervorgehen.

Die Formen φ , aus denen f dem Fundamentalsatze gemäss hervorgeht, nenne ich *das reducirte System der Form f* . Der Beweis des Fundamentalsatzes beruht darauf, dass man für zwei Reihen derselben Classe, welche in f vorkommen, das reducirte System bildet, und also f durch ein Formensystem ersetzt, welches gewisse einfachere Eigenschaften besitzt. Indem man dasselbe Verfahren auf jede Form des erhaltenen Systems anwendet, zeigt es sich, dass man sich einer Grenze nähert, in welcher jede Form des Systems höchstens eine Reihe jeder Classe enthält, und dass zugleich die Anzahl der Formen dieses reducirten Systems eine endliche ist.

Die Form f steht mit dem reducirten Systeme der φ in dem besondern Zusammenhange, dass sowohl alle φ Invarianten von f sind, als auch umgekehrt f eine simultane Invariante der φ . In Folge dessen ist überhaupt jede Invariante von f auch eine solche der φ . Man zieht also die Folgerung, dass alle Invarianten von Formen mit beliebig vielen Reihen aus simultanen Formen erzeugt werden können, deren jede höchstens *eine* Reihe jeder Classe enthält. Für die allgemeine Auffassung der Invariantentheorie entspringt hieraus eine Begrenzung des Gegenstandes, welche von höchster Wichtigkeit ist. *Um alle Bildungen, welche die Invariantentheorie innerhalb einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen überhaupt zulässt, untersucht zu haben, genügt es, solche Grundformen zu betrachten, welche von jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten.*

Die zu betrachtenden Grundformen innerhalb einer Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen zerfallen daher in 2^{n-1} Classen, von denen die erste keine Reihe von Veränderlichen, die andere mehr oder weniger von solchen, die letzte alle enthalten. Bei den binären Formen erhält man ausser Constanten nur Functionen einer Reihe; bei ternären Formen ergeben sich Grundformen, deren vier Classen genau den vier in der ternären Formentheorie üblichen Bezeichnungen der Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen entsprechen. Für quaternäre Formen erhält man 8 Classen, von denen die meisten noch niemals betrachtet sind, welche sich aber hier als nothwendig und unumgänglich erweisen.

Noch wichtiger darf man wohl das Resultat nennen, welches hierdurch für die Begriffsbestimmung der Invarianten an sich gewonnen ist. Als Aufgabe der Invariantentheorie darf man es in einem gewissen Sinne bezeichnen, alle Invarianten einer Form oder eines Formensystems zu finden, durch welche, und durch deren Polaren, alle Invarianten dieser Form oder dieses Formensystems als ganze Functionen darstellbar sind. Durch den obigem Satz ist nun gezeigt, dass Invarianten mit mehreren Reihen derselben Classe sich immer auf solche zurückführen lassen, welche aus jeder Classe höchstens eine

Reihe enthalten. *Daher können wir nunmehr die Betrachtung der Invarianten einer Form oder eines Formensystems von vorn herein auf solche beschränken, welche aus jeder Classe höchstens eine Reihe enthalten.* Andererseits aber erkennt man auch die Nothwendigkeit diese $2^n - 1$ Classen von Invarianten in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Für ternäre Formen ist dies längst geschehen, wenn auch nicht mit dem principiellen Bewusstsein, dass damit alles umfasst sei. Aber anders bei den quaternären Formen; und die relative Unvollkommenheit ihrer Theorie darf wohl wesentlich durch diesen Umstand erklärt werden.

Man kann die Reduction, welche in der Einführung des reducirten Systems liegt, noch einen Schritt weiter führen. Bezeichnen wir als *conjugirte Reihen* in einer Form des reducirten Systems solche, welche den Classen $(k, n - k)$ und $(n - k, k)$ angehören, und bezeichnen wir die Veränderlichen dieser Reihen durch p und q , so können wir noch jede Form des reducirten Systems auf eine Anzahl von solchen zurückführen, welche in Bezug auf jedes Paar conjugirter Reihen die Gleichung:

$$(2) \quad 0 = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_{ih} \dots \partial q_{ih} \dots}$$

befriedigen. Das System, welches auf diese Weise entsteht, nenne ich das *eigentlich reducirte*. Es folgt wie im Vorigen, dass man sich in der Theorie der algebraischen Form insbesondere auf die Untersuchung solcher Formen und Invarianten beschränken darf, welche aus jeder Classe nur eine Reihe enthalten, und welche überdies die Gleichungen (2) befriedigen.

Es entsteht hier nun eine Frage, welche ich in Bezug auf ternäre Formen beantwortet habe; in wie weit nämlich, wenn man die Coefficienten von f als von einander unabhängig voraussetzt, auch die Coefficienten der Formen des eigentlich reducirten Systems von einander unabhängig seien, abgesehen natürlich von den durch (2) ausgesprochenen linearen Bedingungen. Für ternäre Formen habe ich bewiesen, dass in der That die Coefficienten des eigentlich reducirten Systems übrigens von einander unabhängig sind. Bei ternären Formen ist also die Theorie einer Form f mit beliebig vielen Reihen von Punkt- und Linienkoordinaten nicht nur individuell, sondern auch generell durch die eines mit entsprechenden Ordnungszahlen übrigens beliebig gebildeten simultanen Systems ersetzbar, dessen Formen sämtlich höchstens eine Reihe von Punkt- und Linienkoordinaten enthalten und in Bezug auf dieselben die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial u_3} = 0$$

befriedigen. Man bildet dies System auf folgende Art.

1. Enthält f nur eine Reihe von x und eine Reihe von u , so bildet man die Formen:

$$\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial u_3}$$

$$\delta^2 f = \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_3 \partial u_3}$$

$$\dots \dots \dots$$

und bestimmt sodann die Zahlen $\alpha, \beta \dots$ so, dass die Formen:

$$\varphi = f + \alpha u_x \delta f + \beta u_x^2 \delta^2 f \dots$$

$$\varphi_1 = \delta f + \alpha' u_x \delta^2 f + \beta' u_x^2 \delta^3 f \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

sämmtlich der Gleichung (3) genügen. Die $\alpha, \beta \dots$ sind hierdurch völlig und eindeutig bestimmt (siehe Gordan, diese Annalen Bd. V., p. 103). Die Formen φ bilden das eigentlich reducirte System.

2. Enthält f nur zwei gleichartige Reihen, etwa x und y , so kann man symbolisch setzen:

$$f = a_x^m b_y^n.$$

Die Formen des eigentlich reducirten Systems sind dann:

$$\varphi = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (a b u), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (a b u)^2, \text{ etc.}$$

3. Enthält f mehr als zwei Reihen, so sind unter diesen mindestens zwei gleichartig. In Bezug auf diese ersetzt man f durch dieselben Formen wie unter 2. Die so entstandenen Formen behandelt man in gleicher Weise bezüglich irgend zweier in ihnen auftretender gleichartiger Reihen weiter, und gelangt so endlich zu einem eigentlich reducirten Systeme. Aus demselben fallen nur verschiedene Formen fort, weil die Formen φ unter 2. schon die besondere Eigenschaft haben, der Gleichung (3) in Bezug auf die Reihen x, u zu genügen. Die Fortsetzung der hier zu leistenden Operationen führt daher auf die folgende Aufgabe, durch deren Lösung alles erledigt ist:

Eine Form f enthält drei Reihen x, y, u , und genügt in Bezug auf x und u der Gleichung (3). Man soll das eigentlich reducirte System von f angeben.

Es sei symbolisch:

$$f = a_x^m b_y^n u_\alpha^p;$$

der Umstand, dass f der Gleichung (3) genügt, wird dadurch ausgedrückt, dass alle mit dem symbolischen Factor u_α behafteten Glieder ausgelassen werden können. Ein reducirtes System von f ist:

$$(4) \varphi_0 = a_x^m b_x^n u_\alpha^p, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} u_\alpha^p (a b u), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} u_\alpha^p (a b u)^2 \dots$$

Man erhält das eigentlich reducirte, wenn man jede dieser Formen wie oben unter 1. behandelt. Dabei aber ist zu bemerken, dass:

$$\delta^x \varphi_\lambda = \delta^x \{a_x^{n-\lambda} b_x^{n-\lambda} u_\alpha^p (abu)^\lambda\}$$

verschwindet, sobald x grösser als eine der Zahlen $n - \lambda$ oder p wird, wodurch die Anzahl der dem eigentlich reducirten Systeme angehörigen Formen sich vermindert.

Als Anwendung dieser Principien gebe ich die Reduction einer Form f , welche drei Reihen x, y, u , jede quadratisch und in allgemeiner Weise enthält. Es sei symbolisch:

$$f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2.$$

Nach 2. erhält man in Bezug auf die Reihen x, y das eigentlich reducirte System:

$$\varphi = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad \psi = a_x b_x u_\alpha^2 (abv), \quad \chi = u_\alpha^2 (abv)^2.$$

Von diesen Formen gehört φ schon dem (nicht eigentlich) reducirten Systeme an; χ giebt nach 2. die Formen:

$$\varphi_1 = u_\alpha^2 (abu)^2, \quad \varphi_2 = u_\alpha (abu) (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha), \quad \varphi_3 = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2.$$

Endlich genügt die Form ψ in Bezug auf die Reihen x, v der Gleichung (3); ihr reducirtes System ist also nach (4):

$$\varphi_4 = a_x b_x u_\alpha^2 (abu), \quad \varphi_5 = a_x b_x u_\alpha (a_\alpha b_x - b_\alpha a_x).$$

Das reducirte System von f besteht also aus den folgenden Formen mit den beigesetzten Ordnungen und Classen:

Form.	Ordnung.	Classe
φ	4	2
φ_1	0	4
φ_2	1	2
φ_3	2	0
φ_4	2	3
φ_5	3	1

Wenn die Coefficienten von f von einander unabhängig sind, so sind auch die Coefficienten dieser Formen von einander unabhängig, nur dass φ_2 der Gleichung $\delta \varphi_2 = 0$ genügt. Bei der Bildung des eigentlich reducirten Systems, dessen Formen dann sämmtlich der Gleichung $\delta \varphi = 0$ genügen, bleiben $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ungeändert. Dagegen wird φ durch drei Formen φ' (Ordnung 4, Classe 2), φ'' (Ordnung 3, Classe 1), φ''' (Ordnung 2, Classe 0), φ_4 durch drei Formen φ_4' (Ordnung 2, Classe 3), φ_4'' (Ordnung 1, Classe 2), φ_4''' (Ordnung 0, Classe 1), endlich φ_5 durch zwei Formen φ_5' (Ordnung 3, Classe 1) und φ_5'' (Ordnung 2, Classe 0) ersetzt. Die Zahl der von einander unabhängigen Coefficienten dieser Formen ist in der That 216, gleich der Zahl der Coefficienten von f .

Göttingen, den 8. März 1872.