

Zur Variationsrechnung.

Von

ADOLF KNESER in Dorpat.

Haben die durch den festen Punkt A gehenden geodätischen Linien einer Fläche eine Enveloppe, welche von zweien unter ihnen in den Punkten B und C berührt wird, so ist im Allgemeinen der längs der Enveloppe gemessene Bogen BC gleich der Differenz der geodätischen Bögen AB und AC . Dieser bekannte Satz kann bedeutend verallgemeinert werden, indem man von folgenden Erwägungen ausgeht.

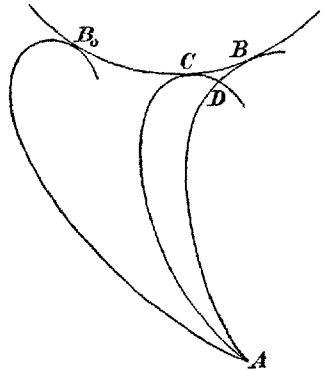
Sind x und y rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so giebt es zweifach unendlich viele Curven von der Beschaffenheit, dass wenn man längs einer von ihnen integrirt, die erste Variation des Integrals

$$J = \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

verschwindet. Allgemein werde der Werth dieses Integrals, wenn man längs einer beliebigen Curve MN von M nach N hin integrirt, durch (MN) bezeichnet, sodass, wenn P ein dritter Punkt der Curve MN ist, die allgemeinen Gleichungen

$$(MN) + (NM) = 0, \quad (MP) + (PN) = (MN)$$

bestehen. Die durch den festen Punkt A gehenden Curven, für welche δJ verschwindet, mögen nun eine Enveloppe besitzen, welche von dreien unter ihnen, den Curven AB_0 , AB und AC in B_0 , B , C berührt werde; die Curven AB und AC seien von einander unendlich wenig verschieden, und mögen sich etwa im Punkte A unter einem Winkel schneiden, der unendlich klein von der ersten Ordnung ist. Sie mögen ferner ausser A noch den Punkt D gemein haben, welcher unendlich nahe bei B und C liegt (Figur). Alsdann ist die Differenz der längs der Curven AB und AC von A bis D genommenen Integrale J , welche



durch $(AD)_1$ und $(AD)_2$ bezeichnet werden mögen, unendlich klein von der zweiten Ordnung. Dasselbe gilt von der Grösse

$$(BD) + (DC) - (BC),$$

wenn die ersten beiden Integrale längs der Curven AB und AC , das dritte längs der Enveloppe genommen werden; denn vergleicht man die Integrale $(BD) + (DC)$ und (BC) , so ist sowohl die Differenz ihrer Integranden wie auch das Integrationsintervall unendlich klein von der ersten Ordnung. Hieraus folgt, dass auch die Grösse

$$(AD)_2 - (AD)_1 + (BD) + (DC) - (BC)$$

oder auch, da die Integration längs der Curven AC und AB die Gleichungen

$$(AC) = (AD)_2 + (DC),$$

$$(AB) = (AD)_1 + (DB) = (AD)_1 - (BD),$$

ergibt, die Grösse

$$(AC) - (AB) - (BC)$$

von der zweiten Ordnung unendlich klein ist. Diese kann als das Differential des Aggregats

$$\Delta = (AB) - (AB_0) - (B_0B)$$

betrachtet werden, in dessen Gliedern längs der Curven AB , AB_0 und der Enveloppe integrirt wird, wenn man B als veränderlich ansieht; daher ist die Grösse Δ von B unabhängig, und da sie verschwinden kann, hat sie den Werth Null, d. h. es gilt die Gleichung

$$(AB) - (AB_0) = (B_0B),$$

welche eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Eigenschaft des Bogenintegrals und der geodätischen Linie ausspricht.

Diese Gleichung ist in einer allgemeineren enthalten, welche Zermelo in seiner Dissertation (Untersuchungen zur Variationsrechnung, Berlin 1894, S. 96) vermittelst der von Weierstrass eingeführten Function E ableitet, ohne jedoch, wie er selbst hervorhebt, festzustellen, wann eine Enveloppe existirt, und wann die erhaltene Gleichung auf ein Problem der Variationsrechnung angewandt werden kann. Diese Frage beantworte ich in der vorliegenden Abhandlung, ersetze die obige Infinitesimalbetrachtung durch einen strengen und directen Beweis, und erhalte schliesslich einen neuen Satz über das Aufhören der Maximums- oder Minimumeigenschaft des Integrals J in dem Falle, dass man längs einer Curve, für welche δJ verschwindet, von einem Punkte bis zu dem ihm conjugirten integrirt.

§ 1.

Ein analytischer Hülffssatz.

In den Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{du_v}{dx} = f_v(x, u_1, u_2, \dots u_n), \quad (v = 1, 2, \dots n)$$

seien die rechten Seiten in der Umgebung des Werthsystems

$$(2) \quad x_0, a_1, a_2, \dots a_n$$

reguläre analytische Functionen ihrer Argumente. Sobald dann die Differenzen $\alpha_1 - a_1, \alpha_2 - a_2, \dots \alpha_n - a_n$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind, giebt es ein Lösungssystem der Gleichungen (1), für welches die Gleichungen

$$(3) \quad u_{v0} = \alpha_v$$

bestehen, wobei, wie fortan immer, durch u_{v0} der Werth der Function u_v für $x = x_0$ bezeichnet wird, und für v jede der Zahlen $1, 2, \dots n$ gesetzt werden kann. Speciell werde durch u_v^0 dasjenige Integralsystem bezeichnet, für welches

$$u_{v0}^0 = \alpha_v.$$

Aus den Beweisen für die Existenz der Integrale simultaner Systeme folgt nun leicht, dass die durch die Relationen (3) definirten Integrale u_v durch Potenzreihen der Argumente

$$x - x_0, \alpha_1 - a_1, \alpha_2 - a_2, \dots \alpha_n - a_n$$

dargestellt werden können; diese Reihen convergiren, sobald die Ungleichungen

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad |\alpha_v - a_v| < \delta_v$$

bestehen, in welchen $\delta_0, \delta_1, \dots$ gewisse positive Constanten sind.

Wenn man daher annimmt, es sei

$$|x_1 - x_0| < \delta_0,$$

so sind die Grössen u_{v1} analytische Functionen der Argumente α_v , welche sich in der Umgebung der Stelle

$$(4) \quad \alpha_v = a_v$$

regulär verhalten; dabei ist die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(u_{11}, u_{21}, \dots u_{n1})}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)}$$

an der Stelle (2) von Null verschieden, sobald $|x_1 - x_0|$ hinreichend klein genommen wird. Denn bezeichnet man, wie auch später vielfach geschehen soll, durch eine eckige Klammer mit angeheftetem Index k eine nach den eingeklammerten Grössen fortschreitende Potenzreihe,

deren Glieder von nicht geringerer als der k^{ten} Dimension sind, so kann man setzen

$$\begin{aligned} u_v^0 &= \alpha_v + f_v(x_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)(x - x_0) + [x - x_0]_2, \\ u_v &= \alpha_v + \{f_v(x_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + [\alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n]_1\}(x - x_0) \\ &\quad + (x - x_0)[x - x_0, \alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n]_1, \end{aligned}$$

sodass sich für $\varrho \geq v$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_v}{\partial \alpha_v} &= 1 + [x - x_0, \alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n]_1, \\ \frac{\partial u_v}{\partial \alpha_\varrho} &= [x - x_0, \alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n]_1, \end{aligned}$$

mithin

$$(5) \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = 1 + [x - x_0, \alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n]_1,$$

woraus die aufgestellte Behauptung unmittelbar folgt. Sie kann offenbar auch folgendermassen formulirt werden. Zu jedem Werthsystem (2) von der angegebenen Beschaffenheit gehört eine derartige positive Grösse δ , dass für

$$|x_1 - x_0| < \delta$$

und hinreichend kleine Werthe der Differenzen $|\alpha_v - \alpha_v|$ die Grössen u_{v1} bestimmt und in der Umgebung der Stelle (4) reguläre von einander unabhängige analytische Functionen der Argumente α_v sind.

Jetzt werde das Functionensystem u_v^0 analytisch fortgesetzt längs einer in der Ebene der complexen Grösse x gezogenen, von x_0 nach x_2 gehenden Linie Λ , auf welcher x_3 ein beliebiger Punkt sei. Dabei führen wir die Annahme ein, dass die Functionen f_v sich regulär verhalten in der Umgebung jeder Stelle

$$x_3, u_{13}^0, u_{23}^0, \dots, u_{n3}^0,$$

sodass diese die Eigenschaften der Stelle (2) besitzt. Zu jeder solchen durch einen bestimmten Werth x_3 charakterisirten Stelle gehört also eine positive Grösse δ von der oben angegebenen Beschaffenheit. Fasst man alle Stellen x_3 ins Auge, die von einer bestimmten, z. B. x_0 hinreichend wenig entfernt liegen, so liegen, wie wir jetzt zeigen wollen, die sämtlichen zugehörigen Grössen δ oberhalb einer positiven Constanten.

In der That kann man bei den eingeführten Bezeichnungen setzen

$$(6) \quad u_v = \alpha_v + [x - x_0, \alpha_1 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_n];$$

bei den erhaltenen Eigenschaften der Grösse (5) kann man diese Gleichungen nach den Grössen $\alpha_v - \alpha_v$ auflösen und erhält

$$\alpha_r - a_r = [x - x_0, u_1 - a_1, \dots, u_n - a_n]_1,$$

oder auch speciell

$$\alpha_r - a_r = [x_3 - x_0, u_{13} - a_1, \dots, u_{n3} - a_n]_1.$$

Aus der Gleichung (6) folgt

$$(7) \quad u_{rs}^0 = \alpha_r + \mathfrak{P}_r(x_3 - x_0) = \alpha_r + [x_3 - x_0]_1$$

sodass man, indem man die Bezeichnung

$$u_{rs}^0 = b_r$$

einführt, setzen kann

$$\alpha_r - a_r = [x_3 - x_0, u_{13} - b_1 + \mathfrak{P}_1(x_3 - x_0) \dots u_{n3} - b_n + \mathfrak{P}_n(x_3 - x_0)]_1.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (6), so ergibt sich

$$u_r = \alpha_r + [x - x_3 + x_3 - x_0, x_3 - x_0, u_{13} - b_1 + \mathfrak{P}_1(x_3 - x_0), \dots]_1.$$

Ordnet man diese Reihen um, indem man nach den Argumenten

$$x - x_3, x_3 - x_0, u_{rs} - b_r$$

entwickelt, was bei der durch (7) definirten Form der Reihen \mathfrak{P}_r möglich ist, sobald $|x_3 - x_0|$ hinreichend klein ist, so erhält man Reihen, deren Convergencebereich durch Ungleichungen von folgender Form gegeben werden:

$$|x - x_3| < \Delta_0, |x_3 - x_0| < \Delta', |u_{rs} - b_r| < \Delta_r.$$

Man kann also auch sagen: sobald $x_3 - x_0$ hinreichend klein ist, giebt es eine von der speciellen Wahl der Grösse x_3 unabhängige Grösse Δ_0 , welche für das Werthsystem

$$x_3, b_1, b_2, \dots, b_n$$

oder

$$x_3, u_{13}^0, u_{23}^0, \dots, u_{n3}^0$$

dieselben Eigenschaften wie die oben definirte Grösse δ für die Stelle (2) besitzt. Dabei kann offenbar statt des Werthes x_0 jeder specielle Werth x_3 , etwa x_4 genommen werden, indem dann für α_r die Grösse u_{r4}^0 eintritt.

Hieraus folgt, dass die zu allen Punkten der Linie Λ gehörenden Werthe δ oberhalb einer bestimmten positiven Grösse Δ liegend angenommen werden können. Denn wäre das nicht der Fall, so folgte nach einer bekannten Schlussweise, dass in der Umgebung mindestens einer Stelle der Linie Λ die Grösse δ nothwendig unter jede Grenze herabsinken müsste, was dem oben erhaltenen Resultat widerspricht.

Längs der Linie Λ können nun auch alle Integrale u_r analytisch fortgesetzt werden von x_0 bis x_2 hin, wenn sie zunächst in der Umgebung der Stelle x_0 definirt sind und die Differenzen $|u_{r0} - \alpha_r|$ gewisse Grenzen nicht überschreiten. Denn sind etwa x_5 und x_6 zwei Punkte der Linie Λ , deren Abstand kleiner ist als 2Δ , ist ferner x_7 ein Punkt der Linie Λ , welcher sowohl innerhalb des um x_5 als auch des um x_6

beschriebenen Kreises vom Radius Δ liegt, so sind nach der Definition dieser Grösse die Integrale u_v , welche durch ihre Werthe u_{v6} defnirt sind, zunächst in der Umgebung von x_7 defnirt und die Werthe u_{v7} bilden ein System von einander unabhängiger analytischer Functionen der Grössen u_{v6} , die sich in der Umgebung der Stelle $u_{v6} = u_{v6}^0$ regulär verhalten. Defnirt man ferner die Integrale u_v durch die Werthe u_{v5} , und sind die Differenzen $|u_{v5} - u_{v5}^0|$ hinreichend klein, so sind die Integrale u_v ebenfalls für die Umgebung der Stelle x_7 defnirt, also mit den vorher eingeführten u_v identisch, sobald das Werthsystem u_{v7} dasselbe ist, wie vorher. Dieses erscheint jetzt als ein System von einander unabhängiger analytischer Functionen der Grössen u_{v5} ; mithin können auch die Grössensysteme u_{v5} und u_{v6} als Functionen von einander betrachtet werden, und die Integrale u_v , für welche die Grössen $|u_{v5} - u_{v5}^0|$ hinreichend klein sind, sind auch in der Umgebung von x_6 defnirt. Die Functionen u_{v6} verhalten sich dabei regulär in der Umgebung der Stelle $u_{v5} = u_{v5}^0$, und an dieser ist die Functional-determinante

$$\frac{\partial(u_{16}, u_{26}, \dots, u_{n6})}{\partial(u_{15}, u_{25}, \dots, u_{n5})}$$

von Null verschieden. Nun lässt sich zwischen x_0 und x_2 auf der Linie Λ eine endliche Anzahl solcher Stellen einschalten, dass je zwei aufeinanderfolgende in derselben Beziehung stehen wie x_5 und x_6 ; somit folgt, dass die Integrale u_v , welche in der Umgebung von x_0 durch die Werthe u_{v0} defnirt sind, längs der Linie Λ bis zum Punkte x_2 fortgesetzt werden können, sobald die Grössen $|u_{v0} - u_{v0}^0|$ hinlänglich klein sind. Dabei ist dann die Determinante

$$\frac{\partial(u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2})}{\partial(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0})}$$

in der Umgebung der Stellen $u_{v0} = u_{v0}^0$, also jedenfalls sobald die Grössen $|u_{v0} - u_{v0}^0|$ hinreichend klein sind, von Null verschieden.

Sind die Werthe x_0, u_{v0}^0 , sowie die Functionen f_v bei reellen Werthen der Differenzen $x - x_0, u_v - u_{v0}^0$ reell, und ist Λ ein Stück der Axe der reellen Grössen x , so haben auch die Reihen (6) reelle Coefficienten, ebenso die aus ihnen abgeleiteten; bei reellen Werthen der Grössen u_{v0} sind daher auch alle Grössen u_{v3}, u_{v2} reell.

§ 2.

Die Differentialgleichungen des einfachsten Problems der Variationsrechnung.

Wir wenden die durchgeführten Betrachtungen an auf die Differentialgleichungen, welche als nothwendige Bedingungen dafür erhalten werden, dass die erste Variation des Integrals

$$J = \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

verschwinde. Setzt man

$$p = \frac{1}{q} = \frac{dy}{dx},$$

so hat man, wenn man x als unbekannte Function von y ansieht,

$$\begin{aligned} J &= \int f(x, y, p) dx = \int f(x, y, p) \frac{dy}{p} \\ &= \int f\left(x, y, \frac{1}{q}\right) q dy = \int F(x, y, q) dy, \end{aligned}$$

und die Methoden der Variationsrechnung ergeben, je nachdem man x oder y als unabhängige Variable ansieht, die beiden gleichwerthigen Differentialgleichungen

$$(8) \quad f_y - \frac{df_p}{dx} = 0,$$

$$(9) \quad F_x - \frac{dF_q}{dy} = 0.$$

Dabei bedeute hier, wie fortan immer, ein Buchstabe als Index die partielle Differentiation nach dem durch ihn bezeichneten Argument. Ausführlicher lauten jene Gleichungen als Systeme erster Ordnung folgendermassen:

$$(10) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-f_y + f_{px} + f_{py}p}{f_{pp}} = \Phi(x, y, p),$$

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

$$(11) \quad \frac{dq}{dy} = \frac{q^3(f_{px} - f_y) + q^2 f_{py}}{f_{pp}} = \Psi(x, y, q),$$

$$\frac{dx}{dy} = q;$$

im letzteren System ist nach Ausführung der partiellen Differentiationen überall p durch $1:q$ zu ersetzen.

Es sei nun \mathcal{C} ein endliches, bestimmtes Stück einer reellen analytischen Curve, welche überall einer der beiden Gleichungen (8)

und (9) genügt, seine Bogenelemente mögen Werthsysteme (x, y, p) oder (x, y, q) definiren, in deren Umgebung, wenn p endlich ist, f und Φ , dagegen wenn q endlich ist, F und Φ ein reguläres Verhalten zeigen. Ein Stück der Curve \mathfrak{C} , längs dessen die Grösse p endlich bleibt, nennen wir einen Bogen \mathfrak{C}_1 ; ebenso sei \mathfrak{C}_2 ein Theil der Curve \mathfrak{C} , der überall endliche Werthe von q liefert. Für die Werthsysteme, welche die Bogenelemente von \mathfrak{C}_1 repräsentiren, verhalten sich die rechten Seiten des Systems (10) regulär, sodass die Sätze des § 1 angewandt werden können. Es giebt daher eine der Gleichung (8) genügende analytische, bei reellen Argumenten reelle Function $g(x, a, b)$ von folgender Beschaffenheit.

Die Gleichung

$$y = g(x, a_0, b_0)$$

gilt längs des Bogens \mathfrak{C}_1 , und wenn (x_1, y_1) einer seiner Punkte p_1 und q_1 die zugehörigen Werthe von p und q sind, so verhält sich die Function g regulär in der Umgebung der Stelle (x_1, a_0, b_0) , und man hat

$$p_1 = \frac{1}{q_1} = g_x(x_1, a_0, b_0).$$

Die Grössen b und a sind die Werthe der Functionen g und g_x für $x = x_0$, wenn (x_0, y_0) ein willkürlich fixirter Punkt des Bogens \mathfrak{C}_1 ist, und es bestehen die Gleichungen

$$(12) \quad \begin{aligned} y_0 = b_0 = g(x_0, a_0, b_0), \quad a_0 = g_x(x_0, a_0, b_0). \\ b = g(x_0, a, b), \quad a = g_x(x_0, a, b). \end{aligned}$$

Sobald ferner die Differenzen $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ hinreichend klein sind, verhält sich die Grösse

$$(13) \quad y = g(x, a, b)$$

als Function von x regulär, solange diese die Abscisse eines Punktes des Bogens \mathfrak{C}_1 ist. Dabei gilt für die Functionaldeterminante der Grössen y und p nach a und b die Ungleichung

$$(14) \quad \begin{vmatrix} g_{xa} & g_{xb} \\ g_a & g_b \end{vmatrix} \geq 0$$

solange die ausgesprochenen Voraussetzungen für x , $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ erfüllt sind.

Wenn ferner im Punkte (x_1, y_1) die Grösse g_x nicht verschwindet, so kann man die Gleichung (13) nach x auflösen und erhält eine Potenzreihe von folgender Form

$$(15) \quad x - x_1 = [y - y_1, a - a_0, b - b_0]_1.$$

Sieht man hierin y als constant an, während a und b variiren, so giebt die Gleichung (13)

$$(16) \quad 0 = g_x dx + g_a da + g_b db;$$

ferner die Gleichung

$$p = g_x(x, a, b),$$

wenn man differenzirt,

$$dp = g_{xx}dx + g_{xa}da + g_{xb}db;$$

setzt man hier den aus der Gleichung (16) folgenden Werth von dx ein, so ergibt sich für die Functionaldeterminante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p, x)}{\partial(a, b)} &= \begin{vmatrix} g_{ax} - \frac{g_a g_{xx}}{g_x} & g_{bx} - \frac{g_b g_{xx}}{g_x} \\ -\frac{g_a}{g_x} & -\frac{g_b}{g_x} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{g_x} \begin{vmatrix} g_{ax} & g_{bx} \\ g_a & g_b \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

also nach (14) für $x = x_1$, $a = a_0$, $b = b_0$ ein von Null verschiedener Werth. Dasselbe gilt von der Determinante

$$\frac{\partial(q, x)}{\partial(a, b)} = -p^2 \frac{\partial(p, x)}{\partial(a, b)} = g_x \begin{vmatrix} g_{ax} & g_{bx} \\ g_a & g_b \end{vmatrix}.$$

Die Werthepaare (q, x) , welche für $y = y_1$ erhalten werden, wenn man a und b in der Umgebung von a_0 und b_0 variiren lässt, erfüllen daher eine gewisse Umgebung des Werthepaars (q_1, x_1) vollständig.

Jetzt sei speciell (x_1, y_1) ein Punkt, in welchem ein Stück \mathfrak{C}_2 beginnt und ein Stück \mathfrak{C}_1 endigt. Dann kann für ersteres und die Gleichungen (9) und (11) dieselbe Betrachtung wie für \mathfrak{C}_1 und die Gleichung (8) angestellt werden; sind \bar{x} und \bar{q} die für $y = y_1$ erhaltenen Werthe von x und q , so wird ein Integral der Gleichung (9) nach § 1 in folgender Weise dargestellt werden können

$$x = K(y, \bar{x}, \bar{q});$$

dabei ist K eine analytische Function; für den Bogen \mathfrak{C}_2 hat man die Gleichung

$$(17) \quad x = K(y, x_1, q_1),$$

und wenn (x_2, y_2) irgend ein Punkt des Bogens \mathfrak{C}_2 ist, so ist die Function K in der Umgebung der Stelle (y_2, x_1, q_1) regulär, sodass man setzen kann

$$x - x_2 = [y - y_2, \bar{x} - x_1, \bar{q} - q_1]_1.$$

Die Werthepaare (\bar{x}, \bar{q}) bedecken nun eine gewisse Umgebung des Paares (x_1, q_1) genau einfach; man kann also für sie auch jene oben definirten Werthepaare (x, q) setzen, welche als von einander unabhängige Functionen von a und b definirt waren; dann geht die Grösse (17) in die Form

$$(18) \quad x = h(y, a, b)$$

über, und die Function h ist regulär in der Umgebung der Stelle (y_2, a_0, b_0) , da dem Werthepaar (a_0, b_0) das Paar (x_1, q_1) entspricht. Die für $y_2 = y_1$ erhaltene Entwicklung

$$x = h(y, a, b) = x_1 + [y - y_1, a - a_0, b - b_0]_1$$

muss mit der unter (15) definirten identisch sein, da beide dieselben Grössen darstellen; die Gleichung (18) repräsentirt daher in der Umgebung der Stelle (x_1, y_1) die Auflösung der Gleichung (13) nach x . Anders ausgedrückt, die Gleichungen

$$(19) \quad y = g(x, a, b), \quad x = h(y, a, b)$$

stellen dasselbe analytische Gebilde dar, die erste in der Umgebung aller Bogenelemente des Stücks \mathfrak{C}_1 , die zweite in der Umgebung der Elemente von \mathfrak{C}_2 ; sind die Grössen $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ hinreichend klein, so stellen die Gleichungen (19) eine Curve dar, von welcher jedem Bogenelement der Stücke \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 gewisse Elemente benachbart sind.

Den hier vollzogenen Uebergang von \mathfrak{C}_1 zu \mathfrak{C}_2 kann man in analoger Weise bewerkstelligen, wenn sich an den Bogen \mathfrak{C}_2 wieder ein Bogen \mathfrak{C}_2 anschliesst, und man kann offenbar die ganze Curve \mathfrak{C} durch eine endliche Anzahl von Theilpunkten, in denen weder p noch q verschwindet, in Stücke zerlegen, welche abwechselnd als Bögen \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 anzusehen sind, und längs deren Functionen g und h von den angegebenen Eigenschaften definirt sind. Wir construiren damit ein analytisches Gebilde im Gebiet der vier Grössen x, y, a, b , welches für $a = a_0, b = b_0$ und reelle Werthe von x und y die Curve \mathfrak{C} enthält; ist (x_0, y_0) irgend ein Punkt derselben, so kann, wenn in ihm p endlich ist, in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0, a_0, b_0) das Gebilde durch eine Gleichung

$$y - y_0 = [x - x_0, a - a_0, b - b_0]_1,$$

oder, wenn q endlich ist, durch eine Gleichung

$$x - x_0 = [y - y_0, a - a_0, b - b_0]_1$$

dargestellt werden. Auf diese Weise liefert jedes Werthsystem (a, b) , für welches die Differenzen $|a - a_0|$ und $|b - b_0|$ hinreichend klein sind, eine Curve, von welcher jedem beliebigen Bogenelement der Curve \mathfrak{C} gewisse Elemente benachbart sind.

Sind p und q endlich, sodass beide Functionen g und h regulär sind und die Gleichungen (19) zusammen bestehen, kann man in die erste von ihnen für x den Werth $h(y, a, b)$ einsetzen, und nach a und b differenziren; so erhält man

$$0 = g_a + g_x h_a, \quad 0 = g_b + g_x h_b$$

oder

$$(20) \quad g_a = -p h_a, \quad g_b = -p h_b.$$

Hieraus folgt dann

$$g_{ax} = - \frac{d(p h_a)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = - p \frac{dp}{dy} h_a - p^2 h_{ay},$$

$$g_{bx} = - p \frac{dp}{dy} h_b - p^2 h_{by},$$

also nach (20)

$$(21) \quad g_a g_{bx} - g_b g_{ax} = p^3 (h_a h_{by} - h_b h_{ay}),$$

wobei a und b willkürliche Variable, x und y aber durch die Gleichungen (19) verknüpft sind.

Diese Gleichungen setzen wir in Verbindung mit einer für die Variationsrechnung fundamentalen Bemerkung von Jacobi, nach welcher aus der Gleichung (8), wenn man für y eine zwei Constante enthaltende Function setzt, z. B.

$$y = g(x, a, b),$$

und nach a und b differenzirt, die Gleichung

$$(22) \quad \frac{d}{dx} \{ f_{pp} (g_a g_{bx} - g_b g_{ax}) \} = 0$$

resultirt. Analog ergibt sich aus der Differentialgleichung (9), deren Integral $h(y, a, b)$ ist,

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{\partial^2 \left(q f \left(x, y, \frac{1}{q} \right) \right)}{\partial q^2} (h_a h_{by} - h_b h_{ay}) \right\} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dy} \{ f_{pp} p^3 (h_a h_{by} - h_b h_{ay}) \} = 0.$$

Hieraus und aus der Gleichung (22) ergibt sich nach (21) die Doppelgleichung

$$(23) \quad f_{pp} (g_a g_{bx} - g_b g_{ax}) = p^3 f_{pp} (h_a h_{by} - h_b h_{ay}) = C,$$

in welcher C eine Constante bedeutet. Diese kann, wie man weiss, nicht verschwinden; denn f_{pp} kann jedenfalls nicht längs der ganzen Curve \mathfrak{C} verschwinden, da in der Umgebung jedes Elements derselben die rechte Seite der ersten Gleichung (10) oder (11) eine reguläre analytische Function ihrer Argumente sein soll; die Grösse $g_a g_{bx} - g_b g_{ax}$ verschwindet aber auf der Curve \mathfrak{C} nach (14) nirgends; die Constante C ist also gleich einem Product, dessen Factoren jedenfalls an gewissen Stellen beide von Null verschieden sind.

§ 3.

Die Enveloppe der Curven, längs deren die erste Variation verschwindet.

Wir betrachten nun von den Curven

$$y = g(x, a, b)$$

diejenigen, welche mit \mathfrak{C} einen festen, einem Bogen \mathfrak{C}_1 angehörigen Punkt (x_0, y_0) gemein haben. Bei der speciellen in § 2 angegebenen Definition der Grössen a und b hat man nach (12) für diese Curvenschaar einfach $b = b_0$; sind dagegen a und b irgend zwei von einander unabhängige analytische Functionen jener Grössen, so hat man allgemeiner

$$(24) \quad y_0 = g(x_0, a, b)$$

und wenn man annimmt

$$(25) \quad g_b(x_0, a_0, b_0) \geq 0,$$

was bei der in § 2 getroffenen speciellen Bestimmung der Grössen a und b offenbar der Fall ist, so kann man entwickeln

$$b - b_0 = [a - a_0]_1;$$

durch diese Substitution erhalte man

$$(26) \quad \begin{aligned} g(x, a, b) &= \varphi(x, a), \\ h(y, a, b) &= \psi(y, a); \end{aligned}$$

dann ist die Function φ in der Umgebung der Stelle (x_1, a_0) regulär, wenn (x_1, y_1) ein Punkt eines Bogens \mathfrak{C}_1 ist, ebenso in der Umgebung der Stelle (x_0, a_0) , wenn jener Punkt einem Bogen \mathfrak{C}_2 angehört.

Wir halten die erstere Annahme fest; bei der letzteren gestaltet sich die ganze Entwicklung dieses Paragraphen genau ebenso, indem nur φ und x durch ψ und y zu ersetzen ist.

Wenn nun die Ungleichung

$$\varphi_a(x_1, a_0) \geq 0$$

besteht, so wird in der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) die Curve \mathfrak{C} nicht von Curven

$$(27) \quad y = \varphi(x, a)$$

geschnitten, für welche $|a - a_0|$ beliebig klein ist. Denn wäre dies der Fall, so könnte die Gleichung

$$\varphi(x, a) - \varphi(x, a_0) = 0$$

bestehen für beliebig kleine Werthe von $x - x_1$ und $a - a_0$; für ihre linke Seite aber kann man schreiben

$$(a - a_0) \varphi_a(x, a_0) + \frac{1}{2} (a - a_0)^2 (\varphi_{aa}(x_1, a_0) + [a - a_0, x - x_1]_1) \\ = (a - a_0) \{ \varphi_a(x, a_0) + (a - a_0) [a - a_0, x - x_1]_1 \},$$

und diese Grösse ist von Null verschieden, sobald $|a - a_0|$ und $|x - x_1|$ hinreichend klein sind, erstere Grösse aber nicht verschwindet. Wenn daher für beliebig kleine Werthe von $|a - a_0|$ die Curven (13) mit \mathcal{C} Punkte gemein haben, welche sich dann in der Umgebung mindestens einer Stelle (x_1, y_1) unbegrenzt häufen, so hat man für diese die Gleichung

$$(28) \quad \varphi_a(x_1, a_0) = 0.$$

Die Häufungsstelle ist von (x_0, y_0) verschieden, da in der Nähe dieser jede Curve (27), wie man leicht sieht, mit \mathcal{C} keinen zweiten Punkt gemein hat.

Aus den Identitäten (26) folgt nun allgemein

$$\varphi_a = g_a + g_b \frac{db}{da},$$

ferner ist nach (24)

$$(29) \quad 0 = g_a(x_0, a, b) + g_b(x_0, a, b) \frac{db}{da}.$$

Aus der Gleichung (28), die wir fortan voraussetzen, ergibt sich aber

$$0 = g_a(x_1, a_0, b_0) + g_b(x_1, a_0, b_0) \left(\frac{db}{da} \right)_{a=a_0},$$

also nach (29)

$$(30) \quad 0 = \begin{vmatrix} g_a(x_0, a_0, b_0) & g_b(x_0, a_0, b_0) \\ g_a(x_1, a_0, b_0) & g_b(x_1, a_0, b_0) \end{vmatrix},$$

wofür man nach (25) auch schreiben kann

$$(31) \quad g_b(x_1, a_0, b) \frac{g_a(x_0, a_0, b_0)}{g_b(x_0, a_0, b_0)} = g_a(x_1, a_0, b_0).$$

Da nun allgemein, wenn die alleinstehenden Functionszeichen sich stets auf das Argumentsystem x, a, b beziehen,

$$\varphi_{xa} = g_{xa} + g_{xb} \frac{db}{da},$$

mithin nach (29)

$$\varphi_{xa} g_b(x_0, a, b) = g_{xa} g_b(x_0, a, b) - g_{xb} g_a(x_0, a, b)$$

und weiter

$$\varphi_{xa}(x_1, a_0) g_b(x_0, a_0, b_0) = \begin{vmatrix} g_{xa}(x_1, a_0, b_0) & g_{xb}(x_1, a_0, b_0) \\ g_a(x_0, a_0, b_0) & g_b(x_0, a_0, b_0) \end{vmatrix},$$

so ergeben die Relationen (25) und (31)

$$\varphi_{xa}(x_1, a_0) g_b(x_1, a_0, b_0) = \begin{vmatrix} g_{xa}(x_1, a_0, b_0) & g_{xb}(x_1, a_0, b_0) \\ g_a(x_1, a_0, b_0) & g_b(x_1, a_0, b_0) \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach (14) oder (23) von Null verschieden, $g_b(x_1, a_0, b_0)$ eine endliche Grösse, da der Punkt (x_1, y_1) einem Bogen \mathfrak{C}_1 angehört; es folgt daher die für die fernere Entwicklung wichtige Relation

$$(32) \quad \varphi_{xa}(x_1, a_0) \geq 0.$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die rechte Seite der Gleichung (30) die von Jacobi in die Variationsrechnung eingeführte, von Mayer durch

$$\Delta(x_0, x_1)$$

bezeichnete Grösse ist, dass also die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) irgend zwei auf der Curve \mathfrak{C} liegende conjugirte Punkte sind. Sie können durch beliebig viele Bögen \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 von einander getrennt sein, y braucht also nicht von x_0 bis x_1 eine eindeutige Function von x zu sein.

Aus den Relationen (28) und (32) folgt in aller Strenge, dass die Curven (27) in der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) eine Enveloppe besitzen. Denn nach (28) kann man ξ als analytische in der Umgebung von a_0 reguläre Function von a durch die Gleichung

$$\varphi_a(\xi, a) = 0$$

definiren, da ihre linke Seite in der Form

$$(\xi - x_1) \varphi_{ax}(x_1, a_0) + (a - a_0) \varphi_{aa}(x_1, a_0) + [\xi - x_1, a - a_0]_2$$

entwickelt werden kann. Dabei kann man offenbar setzen

$$(33) \quad \xi - x_1 = - \frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{\varphi_{ax}(x_1, a_0)} (a - a_0) + [a - a_0]_2,$$

ist ferner

$$(34) \quad \eta = \varphi(\xi, a) = \varphi(x_1, a_0) + [a - a_0]_1 = y_1 + [a - a_0]_1,$$

so wird hiermit eine ebenfalls in der Umgebung von a_0 reguläre Function defnirt, und der Punkt (ξ, η) beschreibt eine Curve, die sich in speciellen Fällen auch auf den einen Punkt (x_1, y_1) reduciren kann. Tritt dies ein, so haben die sämmtlichen Curven (27) für welche $|a - a_0|$ hinreichend klein ist, die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gemein, und es gilt für alle Werthe von a die Gleichung

$$\frac{d\xi}{da} = 0.$$

Wird von diesem besonderen Falle abgesehen, so hat man längs der vom Punkte (ξ, η) beschriebenen Curve

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\varphi_x(\xi, a) \frac{d\xi}{da} + \varphi_a(\xi, a)}{\frac{d\xi}{da}} = \varphi_x(\xi, a)$$

also auch

$$(35) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = p_1 + [a - a_0]_1,$$

diese Curve wird daher in dem zu irgend einem Werth von a gehörenden Punkte (ξ, η) von der Curve (27) berührt, deren Enveloppe sie also ist.

Eine weitere Function von a werde durch die Gleichung

$$(36) \quad \varphi(\xi_0, a) - \varphi(\xi_0, a_0) = 0$$

definit; bestimmt man η_0 durch die Gleichung $\eta_0 = \varphi(\xi_0, a_0)$ so ist (ξ_0, η_0) der Schnittpunkt der Curve (27) mit \mathfrak{C} . Entwickelt man nämlich die linke Seite der Gleichung (36) nach Potenzen von $\xi_0 - x_1$ und $a - a_0$, so haben in der Reihe für $\varphi(\xi_0, a)$ die von $a - a_0$ freien Glieder dieselben Coefficienten wie in der Entwicklung von $\varphi(\xi_0, a_0)$, sodass die Differenz

$$\varphi(\xi_0, a) - \varphi(\xi_0, a_0)$$

den Factor $a - a_0$ enthält. Sie ist ferner von linearen Gliedern frei und man kann setzen

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_0, a) - \varphi(\xi_0, a_0) &= (\xi_0 - x_1) (a - a_0) \varphi_{xa}(x_1, a_0) \\ &+ \frac{1}{2} (a - a_0)^2 \varphi_{aa}(x_1, a_0) + [\xi_0 - x_1, a - a_0]_3; \end{aligned}$$

und da man durch $a - a_0$ dividiren kann, erhält die Gleichung (36) die folgende Gestalt

$$0 = (\xi_0 - x_1) \varphi_{xa}(x_1, a_0) + \frac{1}{2} (a - a_0) \varphi_{aa}(x_1, a_0) + [\xi_0 - x_1, a - a_0]_2.$$

da hier der Coefficient von $\xi_0 - x_1$ nach (32) nicht verschwindet, so kann man entwickeln in der Form

$$(37) \quad \xi_0 - x_1 = - \frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2 \varphi_{ax}(x_1, a_0)} (a - a_0) + [a - a_0]_2.$$

Für die zugehörige Grösse η_0 gilt offenbar die Gleichung

$$(38) \quad \eta_0 = \varphi(\xi_0, a) = \varphi(x_1, a_0) + [a - a_0]_1 = y_1 + [a - a_0]_1,$$

und man hat

$$(39) \quad \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = p_1 + [a - a_0]_1.$$

Endlich führen wir neben a noch ein zweites in der Umgebung von a_0 variirendes Argument a_1 ein, welches von a_0 so wenig verschieden sei, dass in allen bisher erhaltenen nach $a - a_0$ fortschreiten-

den Reihen unbeschadet der Convergenz $a = a_1$ gesetzt werden kann. Wir definiren sodann die Grösse ξ_1 als Function von a und a_1 durch die Gleichung

$$(40) \quad \varphi(\xi_1, a) - \varphi(\xi_1, a_1) = 0,$$

deren linke Seite wir nach $\xi_1 - x_1$, $a - a_0$ und $a_1 - a_0$ entwickelt denken. Da in den Reihen $\varphi(\xi_1, a)$ und $\varphi(\xi_1, a_1)$ die Glieder

$$(\xi_1 - x_1)^m (a - a_0)^n, \quad (\xi_1 - x_1)^m (a_1 - a_0)^n$$

offenbar denselben Coefficienten haben, kann man die linke Seite der Gleichung (40) durch $a_1 - a$ dividiren, ohne dass sie aufhört, eine Potenzreihe der Argumente $\xi_1 - x_1$, $a - a_0$, $a_1 - a_0$ zu sein. Die Glieder niedrigster Dimension sind nun

$$\begin{aligned} & (\xi_1 - x_1) (a - a_0) \varphi_{ax}(x_1, a_0) + \frac{1}{2} (a - a_0)^2 \varphi_{aa}(x_1, a_0) \\ & - (\xi_1 - x_1) (a_1 - a_0) \varphi_{ax}(x_1, a_0) - \frac{1}{2} (a_1 - a_0)^2 \varphi_{aa}(x_1, a_0); \end{aligned}$$

nach der angedeuteten Division kann also die Gleichung (40) in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & (\xi_1 - a_1) \varphi_{ax}(x_1, a_0) + \frac{1}{2} ((a - a_0) + (a_1 - a_0)) \varphi_{aa}(x_1, a) \\ & + [\xi_1 - x_1, a - a_0, a_1 - a_0]_2 = 0, \end{aligned}$$

sodass man für ξ_1 folgende Potenzreihe erhält

$$(41) \quad \xi_1 - x_1 = - \frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2 \varphi_{ax}(x_1, a_0)} ((a - a_0) + (a_1 - a_0)) + [a - a_0, a_1 - a_0]_2.$$

Setzt man noch

$$\begin{aligned} (42) \quad \eta_1 &= \varphi(\xi_1, a_1) = \varphi(x_1, a_0) + [a - a_0, a_1 - a_0]_1 \\ &= y_1 + [a - a_0, a_1 - a_0]_1 \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial a} = \varphi_x(\xi, a_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial a};$$

wenn man a_1 fixirt, a dagegen variabel lässt, so rückt der Punkt (ξ_1, η_1) auf der Curve (42) fort und es gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} (43) \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial a} : \frac{\partial \xi_1}{\partial a} &= \frac{d \eta_1}{d \xi_1} = \varphi_x(x_1, a_0) + [a - a_0, a_1 - a_0]_1 \\ &= p_1 + [a - a_0, a_1 - a_0]_1. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der Werthepeare (ξ_0, η_0) und (ξ_1, η_1) ist aus den obigen analytischen Entwicklungen leicht ersichtlich. Setzt man zunächst $a = a_1$ in der Gleichung (36) und $a = a_0$ in der Gleichung (40), so werden beide bis auf die Bezeichnung der Unbekannten identisch; die Curven

$$(44) \quad y = \varphi(x, a_0), \quad y = \varphi(x, a_1)$$

schneiden sich also in einem Punkte D , dessen Coordinaten in der Form

$$X = x_1 + [a_1 - a_0]_1, \quad Y = \varphi(X, a_0) = y_1 + [a_1 - a_0]_1$$

darstellbar sind, der ferner die Anfangslage des Punktes (ξ_1, η_1) und die Endlage des Punktes (ξ_0, η_0) darstellt, wenn man a das Intervall von a_0 bis a_1 durchlaufen lässt. Sind ferner B und C die Punkte, in denen die Curven (44) ihre Enveloppe berühren, d. h. die Lagen des Punktes (ξ, η) für $a = a_0$ und $a = a_1$, so durchläuft der Punkt (ξ_0, η_0) den Bogen BD längs der Curve \mathfrak{C} , der Punkt (ξ_1, η_1) den Bogen DC längs der Curve $y = \varphi(x, a_1)$, wenn die Variable a sich in der angegebenen Weise bewegt; denn setzt man die Gleichung (40) in die Form

$$0 = (a - a_1) \varphi_a(\xi_1, a_1) + \frac{1}{2} (a - a_1)^2 \varphi_{aa}(\xi_1, a_1) + \dots$$

so reducirt sie sich, nachdem man den Factor $a - a_1$ weggelassen hat, auf die folgende

$$\varphi_a(\xi_1, a_1) = 0;$$

genauer gesagt ist der für $a = a_1$ erhaltene Werth von ξ , diejenige nach Potenzen von $a_1 - a_0$ fortschreitende Entwicklung, welche durch die letzte Gleichung definirt wird, indem man ihre linke Seite nach $a_1 - a_0$ und $\xi_1 - x_1$ entwickelt denkt. Genau dieselbe Potenzreihe des Arguments $a_1 - a_0$ erhält man nach der Definition der Grösse ξ , wenn man diese für $a = a_1$ bildet. Die Endlagen der Punkte (ξ, η) und (ξ_1, η_1) fallen daher zusammen in den Punkt C (vgl. Figur).

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu dem Variationsproblem zurück, und bilden das Integral J längs des Enveloppenbogens BC und längs der den Curven (44) angehörigen Bögen BD und DC ; nach dem, was wir über die Bewegung der Punkte (ξ, η) , (ξ_0, η_0) und (ξ_1, η_1) wissen, erhalten wir für die bezeichneten drei Integrale

$$(BC) = \int_{a_0}^{a_1} f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) \frac{d\xi}{da} da,$$

$$(BD) = \int_{a_0}^{a_1} f\left(\xi_0, \eta_0, \frac{d\eta_0}{d\xi_0}\right) \frac{d\xi_0}{da} da,$$

$$(DC) = \int_{a_0}^{a_1} f\left(\xi_1, \eta_1, \frac{d\eta_1}{d\xi_1}\right) \frac{\partial \xi_1}{\partial a} da.$$

Nun kann man, bei der für den Werth a_1 festgesetzten Beschränkung, für das ganze Integrationsgebiet nach (33), (34) und (35) setzen

$$f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = \{f(x_1, y_1, p_1) + [a - a_0]_1\} \left\{ - \frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a - a_0]_1 \right\} \\ = - \frac{f(x_1, y_1, p_1) \varphi_{aa}(x_1, a_0)}{\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a - a_0]_1$$

ebenso nach (37), (38) und (39)

$$f\left(\xi_0, \eta_0, \frac{d\eta_0}{d\xi_0}\right) \frac{d\xi_0}{da} = -f(x_1, y_1, p_1) \frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a - a_0]_1,$$

endlich nach (41), (42) und (43)

$$f\left(\xi_1, \eta_1, \frac{d\eta_1}{d\xi_1}\right) \frac{\partial \xi_1}{\partial a} = -f(x_1, y_1, p_1) \frac{\varphi_{aa}(x_1, a_0)}{2\varphi_{xa}(x_1, a_0)} + [a - a_0, a_1 - a_0]_1.$$

Somit ergibt sich

$$(45) \quad (BC) - (BD) - (DC) = \int_{a_0}^{a_1} da [a - a_0, a_1 - a_0]_1 = [a_1 - a_0]_2.$$

Damit ist in strenger Weise das in der Einleitung angedeutete Resultat formuliert und bewiesen, dass die Grösse

$$(BC) - (BD) - (DC)$$

unendlich klein von zweiter oder höherer Ordnung wird, wenn die Curven (44) einander unendlich nahe rücken.

In der letzten Entwicklung ist natürlich das Integral J in der Form

$$\int \frac{f(xy p)}{p} dy$$

zu Grunde zu legen, wenn der Punkt (x_1, y_1) einem Bogen \mathfrak{C}_2 angehört.

§ 4.

Die erste Variation des längs der Curve \mathfrak{C} genommenen Integrals.

Ist (x, y) ein Punkt der Curve \mathfrak{C} , welcher einem Bogen \mathfrak{C}_1 angehört, in dessen Umgebung also die Curve \mathfrak{C} durch die Gleichung

$$y - \varphi(x, a_0) = 0$$

dargestellt werden kann, so werden durch die Gleichungen

$$(46) \quad \bar{y} - \varphi(\bar{x}, a) = 0.$$

$$(47) \quad \varphi_x(x, a_0)(\bar{y} - y) + \bar{x} - x = 0$$

die Grössen \bar{x} und \bar{y} als in der Umgebung von $a = a_0$ reguläre Functionen von a defnirt, da die Functionaldeterminante der linken Seiten nach \bar{y} und \bar{x} ,

$$\begin{vmatrix} 1 & -\varphi_x(\bar{x}, a) \\ \varphi_x(x, a_0) & 1 \end{vmatrix},$$

für $\bar{x} = x$ und $a = a_0$ von Null verschieden ist. Der Punkt (\bar{x}, \bar{y}) ist dann der Schnitt der im Punkte (x, y) errichteten Normalen der Curve \mathfrak{C} mit der Curve (46), die von jetzt an durch \mathfrak{C}' bezeichnet werde, und man hat die Gleichungen

$$(48) \quad \begin{aligned} \bar{y} - y &= [a - a_0]_1 = \delta x, \\ \bar{x} - x &= [a - a_0]_1 = \delta y. \end{aligned}$$

Gleichungen von derselben Form für den geometrisch ebenso definierten Punkt kann man auch ableiten, wenn die Curve \mathfrak{C} an der betrachteten Stelle durch die Gleichung

$$x = \psi(y, a_0)$$

dargestellt wird. Auf diese Weise wird jedem Punkte der Curve \mathfrak{C} ein Punkt der Curve \mathfrak{C}' zugeordnet, und verschiedenen Punkten der ersteren entsprechen verschiedene Punkte der letzteren. Wenn die Curve \mathfrak{C} sich selbst durchschneidet, so spielt ein Doppelpunkt die Rolle von zwei verschiedenen zusammenliegenden Punkten, und entsprechendes gilt von \mathfrak{C}' . Genau genommen entsprechen sich ja nicht nur die Punkte beider Curven, sondern die sie darstellenden Functionselemente, indem man offenbar aus den Gleichungen (46) und (47), wenn (x_0, y_0) eine specielle Lage von (x, y) ist, die Grössen \bar{x} und \bar{y} nach Potenzen von $a - a_0$ und $x - x_0$ entwickeln kann.

Der Punkt (x, y) bewege sich nun längs eines Bogens \mathfrak{C}_1 etwa zwischen den Lagen (x_2, y_2) und (x_3, y_3) ; die diesen entsprechenden Punkte der Curve \mathfrak{C}' seien (\bar{x}_2, \bar{y}_2) und (\bar{x}_3, \bar{y}_3) . Der von ihnen begrenzte Bogen ist ebenso wie der entsprechende der Curve \mathfrak{C} der y -Axe nirgends parallel. Die längs beider Bögen genommenen Integrale J drücken sich folgendermassen aus

$$J_{23} = \int_{x_2}^{x_3} f(x, y, p) dx, \quad \bar{J}_{23} = \int_{\bar{x}_2}^{\bar{x}_3} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) d\bar{x},$$

wobei gesetzt ist

$$\bar{p} = \varphi_x(\bar{x}, a),$$

sodass für jedes einzelne Punktepaaar eine Gleichung

$$\bar{p} - p = [a - a_0]_1$$

besteht. Die Beziehungen zwischen den Integralen \bar{J}_{23} und J_{23} bestimmen wir nun mittelst einer Gleichung der formalen Variationsrechnung, welche sich auf Integrale mit veränderlichen Grenzen bezieht:

$$(49) \quad \delta \int_u^v f(x, y, p) dx = \int_u^v \left(f_y - \frac{df_p}{dx} \right) (\delta y - p \delta x) dx + (f - p f_p)_{x=v} \delta v \\ - (f - p f_p)_{x=u} \delta u + [f_p \delta y]_u^v.$$

Diese Formel besagt streng genommen nur folgendes. Vermehren sich x , y und p beim Uebergang von einer Curve, längs deren man das Integral J gebildet hat, zu einer andern um Grössen, die nach Potenzen von $\alpha - \alpha_0$ entwickelt werden können; ist dabei, was bei den in § 2 eingeführten Voraussetzungen für die Curve \mathfrak{C} zutrifft, f eine reguläre analytische Function in der Umgebung aller Werthsysteme (x, y, p) , welche einem Bogenelement der ersten Integrationslinie entsprechen, so erhält das Integral J einen nach Potenzen von $\alpha - \alpha_0$ entwickelbaren Zuwachs, dessen lineare Glieder mit denen der rechten Seite der Gleichung (49) übereinstimmen. Da nun die Gleichungen (48) gelten, so ist nach (47)

$$\begin{aligned}\bar{J}_{23} - J_{23} &= (f - pf_p)^{(3)}(\bar{x}_3 - x_3) + (f_p)^{(3)}(\bar{y}_3 - y_3) \\ &\quad - (f - pf_p)^{(2)}(\bar{x}_2 - x_2) - (f_p)^{(2)}(\bar{y}_2 - y_2) + [\alpha - \alpha_0]_2,\end{aligned}$$

wobei der obere Index ν bedeutet, dass innerhalb der mit ihm versehenen Klammer die Substitution

$$x = x_\nu, \quad y = y_\nu, \quad p = \varphi_x(x_\nu, \alpha_0), \quad q = \psi_y(y_\nu, \alpha_0)$$

zu machen ist.

Um die entsprechende Formel für ein benachbartes Stück der Curve \mathfrak{C} bilden zu können, welches von den Punkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4) begrenzt ist, hat man zu unterscheiden, ob es sich als Bogen \mathfrak{C}_1 oder als Bogen \mathfrak{C}_2 auffassen lässt. In ersterem Falle hat man bei analoger Bezeichnung des Integrals und der den Endpunkten entsprechenden Punkte der Curve \mathfrak{C}' die der obigen ganz ähnliche Formel

$$\begin{aligned}\bar{J}_{34} - J_{34} &= (f - pf_p)^{(4)}(\bar{x}_4 - x_4) + (f_p)^{(4)}(\bar{y}_4 - y_4) \\ &\quad - (f - pf_p)^{(3)}(\bar{x}_3 - x_3) - (f_p)^{(3)}(\bar{y}_3 - y_3) + [\alpha - \alpha_0]_2.\end{aligned}$$

Im zweiten Falle setze man

$$\frac{f(x, y, p)}{p} = F(x, y, q), \quad q = \frac{1}{p}$$

und nehme das Integral in der Form

$$J = \int F(x, y, q) dy;$$

die Function F hat hier dieselben Eigenschaften wie f im vorigen Falle, und es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}\bar{J}_{34} - J_{34} &= (F - qF_q)^{(4)}(\bar{y}_4 - y_4) + (F_q)^{(4)}(\bar{x}_4 - x_4) \\ &\quad - (F - qF_q)^{(3)}(\bar{y}_3 - y_3) - (F_q)^{(3)}(\bar{x}_3 - x_3) + [\alpha - \alpha_0]_2.\end{aligned}$$

Nun bestehen offenbar die Identitäten

$$\begin{aligned}F_q &= \frac{\partial}{\partial q} \left(qf \left(x, y, \frac{1}{q} \right) \right) = f - pf_p, \\ F - qF_q &= f_p,\end{aligned}$$

Es heben sich also auch in diesem Falle das dritte und vierte Glied der Differenz $\bar{J}_{34} - J_{34}$ gegen das erste und zweite der Grösse $\bar{J}_{23} - J_{23}$, was im ersten Falle unmittelbar ersichtlich ist. Die Summe

$$\bar{J}_{23} - J_{23} + \bar{J}_{34} - J_{34} = \bar{J}_{24} - J_{24}$$

besteht daher aus Gliedern, welche $\bar{x}_4 - x_4$, $\bar{y}_4 - y_4$, $\bar{x}_2 - x_2$, $\bar{y}_2 - y_2$ linear enthalten, und einer Potenzreihe $[a - a_0]_2$. Ein ähnlicher Schluss lässt sich offenbar durchführen, wenn man über den Punkt (x_4, y_4) noch hinausintegriert, und ein Integral J_{45} betrachtet, welches dieselben Eigenschaften hat wie J_{23} und J_{34} ; und da man ebenso fortfahren kann, so ergibt sich, dass die Differenz $\bar{J} - J$, wenn man über ein beliebiges Stück der Curve \mathfrak{C} integriert, sich immer aus einer Potenzreihe der Form $[a - a_0]_2$ zusammensetzt und aus Gliedern, welche in den für den Anfangs- und Endpunkt des Integrationsgebiets gebildeten Differenzen $\bar{x} - x$ und $\bar{y} - y$ linear sind.

Integriert man daher speciell zwischen zwei Punkten, in denen diese Differenzen verschwinden, also zwischen zwei Schnittpunkten der Curven \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' , so erhält man für die Differenz der Integrale längs der Curven \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' einfach

$$(50) \quad \bar{J} - J = [a - a_0]_2.$$

Z. B. ergibt sich in der Bezeichnung des vorigen Paragraphen, dass die vom Punkte A oder (x_0, y_0) an längs der Curven

$$y = \varphi(x, a_0), \quad y = \varphi(x, a_1)$$

bis zu ihrem Schnittpunkte D genommenen Integrale J , welche in der Einleitung durch $(AD)_1$ und $(AD)_2$ bezeichnet wurden, einer Gleichung

$$(AD)_1 - (AD)_2 = [a_1 - a_0]_2$$

genügen. Combinirt man hiermit das in der Gleichung (45) formulirte Resultat des § 3, und bedenkt, dass die Gleichungen

$$(AB) = (AD)_1 - (BD),$$

$$(AC) = (AD)_2 + (DC)$$

bestehen, so ergibt sich

$$(51) \quad (AB) + (BC) - (AC) = [a_1 - a_0]_2.$$

Wenn ferner a_1 festgehalten wird und die Differenz $|a_2 - a_1|$ hinreichend klein ist, so berührt die Curve

$$y = \varphi(x, a_2)$$

die Enveloppe BC in einem Punkte C' , der beliebig nahe bei C liegt; man kann daher die Curven AB und AC durch AC und AC' ersetzen und erhält

$$(AC) + (CC') - (AC') = [a_2 - a_1]_2,$$

wobei das Integral (CC') längs der Enveloppe zu nehmen ist; die Figur kann auch hier dienen, indem man B_0, B, C durch B, C, C' ersetzt. Die linke Seite der letzten Gleichung ist aber das Increment, welches die Grösse (51) erhält, wenn man C variirt und durch C' ersetzt; denn es ist

$$\begin{aligned} (AB) + (BC) - (AC) + (AC) + (CC') - (AC') \\ = (AB) + (BC') - (AC'); \end{aligned}$$

die Grösse (51) erhält also, wenn man a_1 durch a_2 ersetzt, einen Zuwachs von der Gestalt $[a_2 - a_1]_2$, d. h. ihr Differenzialquotient nach a_1 ist gleich Null, sie ist von dieser Grösse unabhängig. Da sie aber für $a_1 = a_0$ verschwindet, so hat die Grösse (51) den constanten Werth Null. Dies folgt, wenn die Enveloppe sich auf den Punkt B reducirt, schon aus der Gleichung (50).

Erinnern wir uns nun der eingeführten Voraussetzungen, so können wir das erhaltene Resultat in folgender Weise formuliren.

Man setze

$$p = \frac{1}{q} = \frac{dy}{dx}, \quad F(x, y, q) = qf\left(x, y, \frac{1}{q}\right);$$

für die Curven, welche die erste Variation des Integrals

$$J = \int f(x, y, p) dx = \int F(x, y, q) dy$$

zum Verschwinden bringen, erhalte man, je nachdem x oder y die unabhängige Variable ist, eine der Gleichungen

$$(X) \quad \frac{dp}{dx} = \Phi(x, y, p), \quad \frac{dq}{dy} = \Psi(x, y, q).$$

Man bezeichne ferner durch \mathfrak{C} ein diesen Gleichungen genügendes, reguläres Stück einer analytischen Curve, welches so beschaffen ist, dass jedes seiner Bogenelemente ein Werthsystem (x, y, p) oder (x, y, q) definirt, in dessen Umgebung sich, wenn p endlich ist, die Functionen f und Φ , wenn q endlich ist, F und Ψ regulär verhalten. Sind dann \mathfrak{C}' die den Gleichungen (X) genügenden Curven, welche den festen Punkt A mit \mathfrak{C} gemein haben, und von dieser hinreichend wenig abweichen, wird ferner die Curve \mathfrak{C} in beliebiger Nähe des Punktes B von Curven \mathfrak{C}' geschnitten, die von ihr beliebig wenig verschieden sind, so haben die Curven \mathfrak{C}' eine Enveloppe, welche in der Umgebung von B eine reguläre analytische Curve ist, und sich speciell auf den einen Punkt B reduciren kann. Wird sie allgemein in C von der Curve \mathfrak{C}' berührt, so ist das Integral J , von A bis B längs des Bogens \mathfrak{C} gebildet, vermehrt um das längs der Enveloppe von B nach C erstreckte

Integral J , gleich dem längs der Curve \mathfrak{C}' von A nach C erstreckten, oder kurz

$$(AB) + (BC) = (AC).$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$(52) \quad (AB) = (AC) + (CB),$$

so ergibt sich, dass das Integral J genau denselben Werth wie längs des Bogens AB auch bei unzähligen andern von jenem beliebig wenig abweichenden Integrationswegen erhalten kann, nämlich den Wegen AC längs der Curve \mathfrak{C}' und CB längs der Enveloppe, dass also das Integral J längs des Bogens AB sicher weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Die Punkte A und B sind nach § 3 irgend zwei der Curve \mathfrak{C} angehörige conjugirte Punkte.

Wir können noch weitergehende Schlüsse aus unserem Satze ziehen. Es sei z. B. das Integral J , wenn man längs einer durch die Gleichung (\mathfrak{A}) definirten Curve, etwa der Curve AB in der Richtung von A nach B hin über ein hinreichend kleines Stück integrirt, ein Minimum. Dann nehme man auf der im Punkte B beginnenden Enveloppe, welche sich zunächst nicht auf einen Punkt B reduciren, den Punkt C nach der Richtung hin an, welche der von A herkommenden Richtung der Curve AB entgegengesetzt ist, und verbinde die Punkte C und B durch eine den Gleichungen (\mathfrak{A}) genügende Curve, längs deren, wenn man von C nach B integrirt, das Integral J den Werth (\overline{CB}) annehme. Ist nun (CB) wie früher das auf die Enveloppe bezogene Integral, so hat man wegen der vorausgesetzten Minimumeigenschaft, wie leicht ersichtlich,

$$(53) \quad (CB) > (\overline{CB});$$

denn die Enveloppe selbst genügt sicher den Gleichungen (\mathfrak{A}) nicht, da in ihren Punkten, solange der Bogen BC hinreichend klein ist, die Integralcurven jener Gleichungen durch ihre Tangenten eindeutig bestimmt sind. Aus der letzten Ungleichung aber folgt nach (52)

$$(AB) > (AC) + (\overline{CB}),$$

sodass das Integral (AB) kein Minimum darstellt. Die Curve ACB , längs deren das rechts stehende Integral gebildet ist, schliesst sich nicht nur mit ihren Punkten, sondern auch, da die Richtung CB mit der Richtung AB längs der Curve \mathfrak{C} übereinstimmt, mit ihren Tangenten dem Bogen AB beliebig nahe an. Analoge Betrachtungen gelten offenbar, wenn J bei hinreichend beschränkter Integration in der Richtung von A nach B hin ein Maximum ist.

Zieht sich die Enveloppe in den Punkt B zusammen, so besteht die Ungleichung (53) nicht mehr und unser Satz lehrt nur, dass längs aller von A nach B gehenden, den Gleichungen (\mathfrak{A}) genügenden und

von \mathcal{C} hinreichend wenig abweichenden Curven das Integral (AB) denselben Werth erhält.

Das Integral J hört also, wenn man längs der Curve \mathcal{C} vom Anfangspunkte A an integrirt, auf ein Extremum zu sein, nicht nur wenn das Integrationsgebiet den zu A conjugirten Punkt B umfasst, sondern schon wenn es von diesem begrenzt wird. Bisher war das Extremum für einen Bogen wie AB nur als unsicher bezeichnet worden, z. B. bei Schaeffer (Bd. XXV dieser Annalen S. 555) und Mayer (Crelles Journal Bd. LXIX, S. 260). Die hier erhaltenen Resultate scheinen also über die bisher bekannten hinauszugehen.

Dorpat, Februar 1897.
