Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

(Dritte Abhandlung).

Von

Martin Krause in Dresden.

Im Folgenden soll die letzte directe Methode gegeben werden, um die Primfunctionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + na, n\tau)}{\vartheta_\beta(v, \tau)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Auf diese Methode ist schon in der ersten Arbeit gleichen Titels als der sich zunächst darbietenden hingewiesen worden. Sie beruht im Wesentlichen auf der Multiplication zweier trigonometrischer Reihen. Der grosse Vorzug, den dieselbe vor allen andern bisher angegebenen Methoden besitzt, besteht darin, dass die unbestimmten Constanten aus den fertigen Formeln verschwunden sind, so dass wir unmittelbar die Entwickelung der Primfunctionen in expliciter Form kennen lernen. Diese Methode schliesst die Theorie der Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art ab für den Fall, dass die Zahl der Nullstellen grösser ist, als die Zahl der Unendlichkeitsstellen und dürfte am klarsten den Unterschied darlegen, der zwischen den Untersuchungen des Herrn Appell und denen des Verfassers besteht.

Die Entwickelungen sollen in mehrfacher Form gegeben werden. Erstens ergeben sich durch Multiplication von:

$$\frac{1}{\vartheta_\beta(v, \tau)} \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(nv + na, n\tau)$$

unmittelbar die gesuchten Reihen, zweitens aber soll in den fertigen Ausdrücken noch ein Factor

$$\frac{1}{\vartheta_\gamma(na, n\tau)}$$

abgesondert werden. Es geschieht das um die erhaltenen Resultate unmittelbar mit den früher gewonnenen in Verbindung setzen zu können.

Um die Methode klar hervortreten zu lassen und weil die einfachsten Fälle aus nahe liegenden Gründen das hauptsächlichste Interesse darbieten, wollen wir vor Behandlung des allgemeinen Falles den Fall der Functionen zweiter Art und den Fall $n = 2$ gesondert betrachten. Es entsprechen diese in gewisser Weise der linearen und quadratischen Transformation in der allgemeinen Transformationstheorie, mit der ja unsere Theorie enge verknüpft ist.

In den fertigen Ausdrücken treten gewisse unendliche Reihen auf, die noch wenig bemerkt sind und die auch abgesehen von dem vorliegenden Problem sich von grosser Bedeutung zeigen dürften. Der Zweck des ersten Paragraphen ist es, die Entstehung dieser unendlichen Reihen nachzuweisen und einige Eigenschaften derselben zu entwickeln. Im zweiten Paragraphen wird dann der Fall der Functionen zweiter Art behandelt, im dritten der Fall $n = 2$, im letzten der allgemeine Fall.

Wir beschränken uns im folgenden auf ein bestimmtes Beispiel die Function:

$$\frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)},$$

indem wir bemerken, dass die Zusammenstellung der fertigen Formeln für alle andern Fälle an anderer Stelle gegeben werden wird.

§ 1.

Definition und Haupteigenschaften gewisser unendlicher Reihen a_r.

Die Definition der ϑ_2-Function lautet bekanntlich:

$$(1) \qquad \vartheta_2(v, \tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \cdot \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cdot \cos 3\pi v + \cdots.$$

Aus dieser Form folgt, dass wir berechtigt sind, den Factor $\cos \pi v$ abzusondern, d. h. dass wir setzen können:

$$(2) \quad \vartheta_2(v, \tau) = 4 \cos \pi v \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos 2\pi v + a_2 \cdot \cos 4\pi v + \cdots\right].$$

Hierbei ergeben sich dann für die Grössen a_r die Werthe:

$$(3) \qquad a_r = \sum_0^{\infty} {}_m (-1)^m \cdot q^{\left(r+m+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Es leisten diese unendlichen Reihen den Gleichungen Genüge:

$$(4) \qquad a_{r+1} + a_r = q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2}, \qquad a_r = a_{-r}.$$

Ihre Einführung gestattet eine recht übersichtliche Darstellung vieler doppelt periodischen Functionen der verschiedenen Arten in trigonometrische Reihen. Wir greifen zunächst die folgenden Formeln heraus. Die übrigen drei Thetafunctionen lassen sich darstellen:

$$\vartheta_1(v,\tau) = 4\sin\pi v\left(\frac{a_0}{2} - a_1\cdot\cos 2\pi v + a_2\cdot\cos 4\pi v\cdots\right),$$

(5) $$\vartheta_0(v,\tau) = q^{-\frac{1}{4}}(1 - e^{2i\pi v}\cdot q)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r}(-1)^r\cdot a_r\cdot q^r\cdot e^{2i\pi r v},$$

$$\vartheta_3(v,\tau) = q^{-\frac{1}{4}}(1 + e^{2i\pi v}\cdot q)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} a_r\cdot q^r\cdot e^{2i\pi r v}.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\vartheta_2 = 2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} a_m,$$

(6) $$\vartheta_1' = 2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot a_m,$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m a_m\cdot q^{2ms} \qquad s \gtrless 0.$$

Ebenso einfach aber ergeben sich die Entwickelungen der reciproken Thetafunctionen in trigonometrische Reihen. In der That, es ist:

$$\frac{\vartheta_1'}{2\pi\cdot\vartheta_0(v,\tau)} = a_0 + 2\sum_{1}^{\infty}{}^{m} a_m\cdot q^{-m^2}\cdot\cos 2m\pi v,$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\pi\cdot\vartheta_1(v,\tau)} = \frac{1}{\sin\pi v} - 2\sum_{0}^{\infty}{}^{m} a_{m+1}\cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\cdot\sin(2m+1)\pi v,$$

(7)

$$\frac{\vartheta_1'}{\pi\cdot\vartheta_2(v,\tau)} = \frac{1}{\cos\pi v} + 2\sum_{0}^{\infty}{}^{m}(-1)^{m+1}\cdot a_{m+1}\cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\cdot\cos(2m+1)\pi v,$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\pi\cdot\vartheta_3(v,\tau)} = a_0 + 2\sum_{1}^{\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot a_m\cdot q^{-m^2}\cdot\cos 2m\pi v.$$

Durch Nullsetzen des Argumentes ergiebt sich:

(8) $$\vartheta_2\cdot\vartheta_3 = 2a_0 + 4\sum_{1}^{\infty}{}^{m} a_m\cdot q^{-m^2},$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} \vartheta_2 \cdot \vartheta_0 &= 2a_0 + 4\sum_1^{\infty} {}^m (-1)^m \cdot a_m \cdot q^{-m^2}, \\ \vartheta_0 \cdot \vartheta_3 &= 1 \quad + 2\sum_0^{\infty} {}^m (-1)^{m+1} \cdot a_{m+1} \cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln können zahlentheoretisch interpretirt werden. In der That, nehmen wir die erste Gleichung, so können wir die linke Seite auch schreiben:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^r \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^s q^{\frac{(2r+1)^2+4s^2}{4}}$$

die rechte Seite dagegen nimmt die Form an:

$$2\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^m \sum_0^{\infty} {}^\mu (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu+2m+1)^2-4m^2}{4}}.$$

Wir kommen demnach zu einer Vergleichung der beiden Formen:

$$(2r+1)^2 + 4s^2$$

und

$$(2\mu+2m+1)^2 - 4m^2 = (2\mu+1)(2\mu+4m+1).$$

Dieselbe erlaubt in völlig elementarer Weise die Darstellung einer Zahl als Summe von Quadraten einer geraden und einer ungeraden Zahl zu entwickeln. Es möge hierauf bei dieser Gelegenheit nicht näher eingegangen werden, es sei nur bemerkt, dass Herr Hermite in einigen classischen Arbeiten die Eigenschaften der doppelt periodischen Functionen dritter Art zur Ableitung ebenso wichtiger wie fundamentaler arithmetischer Sätze gebraucht hat und dass ausser den von ihm herrührenden Anwendungen, noch eine Fülle anderer aufgestellt werden kann.

§ 2.

Die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter Art in trigonometrische Reihen.

Multipliciren wir die beiden Reihen für:

$$\vartheta_1(v+a) \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_1'}{\pi \cdot \vartheta_0(v)}$$

mit einander, so ergiebt sich, wie schon in der letzten Arbeit bemerkt worden ist, die Reihe:

$$(1)\qquad \frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(v+a)}{\pi \cdot \vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^k \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^r c_{kr} \cdot e^{(2k+1)\pi i v + (2r+1)\pi i a},$$

wobei gesetzt ist:

$$(2)\qquad c_{kr} = -2i(-1)^r \cdot q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-r)^2} \cdot a_{k-r}.$$

Diese Reihe multipliciren wir noch mit:

$$\frac{\vartheta_1'}{\pi \cdot \vartheta_0(a, \tau)},$$

dann erhalten wir die zweite Darstellung:

$$(3)\qquad \frac{\vartheta_1'^2 \cdot \vartheta_1(v+a)}{\pi^2 \cdot \vartheta_0(v) \cdot \vartheta_0(a)} = -4i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^r A_{kr} \cdot e^{(2k+1)\pi i v + (2r+1)\pi i a},$$

$$A_{k,r} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m (-1)^m \cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - (k-m)^2 - (r-m)^2} a_{k-m} \cdot a_{r-m}.$$

Es lässt sich diese zweite Darstellung in eine bedeutend einfachere Form bringen.

Zunächst ist klar, dass die Coefficienten der Gleichung Genüge leisten:

$$(4)\qquad A_{k,r} = -A_{-k-1,-r-1}.$$

Dann aber wird:

$$A_{k+1,r} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m (-1)^m \cdot q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - (k-m+1)^2 - (r+m)^2} a_{k+1-m} \cdot a_{r-m}$$

oder also nach leichten Reductionen:

$$(5)\quad A_{k+1,r} = q^{2r+1} \cdot A_{k,r} - (-1)^k \cdot q^{(k+1)^2 + \frac{2r+1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m (-1)^m \cdot q^{2m(k+1)} \cdot a_m.$$

Ist demnach k verschieden von -1, so folgt:

$$A_{k+1,r} = q^{2r+1} \cdot A_{k,r}.$$

Genau so wird:

$$(6)\quad A_{k,r+1} = q^{2k+1} \cdot A_{k,r} - (-1)^r \cdot q^{(r+1)^2 + \frac{2k+1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^m (-1)^m \cdot q^{2m(r+1)} \cdot a_m.$$

Ist also r verschieden von -1, so wird:

$$A_{k,r+1} = q^{2k+1} A_{k,r}.$$

Sind demnach k und r beide positiv, so wird:

$$A_{k,r} = q^{k(2r+1)} A_{0,r} = q^{k(2r+1)+r} A_{0,0}.$$

Ferner ist nach Formel (6):

$$A_{0,0} = q \cdot A_{0,-1} + q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi},$$

$$A_{0,-1} = q^{-1} \cdot A_{-1,-1} + q^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}$$

oder also:

$$A_{0,0} = q \cdot A_{0,-1} + q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi} = -A_{-1,-1} = -q \cdot A_{0,-1} + q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}.$$

Mithin folgt:

(7) $$A_{0,0} = q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}$$

oder also wir erhalten für positive k und r

(8) $$A_{k,r} = q^{\frac{(2k+1)(2r+1)}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{2\pi}.$$

Ferner folgt:

$$A_{0,-1} = A_{-1,0} = 0$$

und damit allgemein

(9) $$A_{k,r} = 0,$$

falls eine und nur eine der beiden Zahlen k und r negativ ist. Sind beide negativ, so ergiebt sich der dazu gehörende Werth des Coefficienten aus der Gleichung:

$$A_{k,r} = -A_{-k-1,-r-1}.$$

Wir erhalten auf diese Weise die bekannten Resultate.

§ 3.

Behandlung des Falles $n = 2$.

Durch Multiplication der beiden trigonometrischen Reihen für:

$$\vartheta_1(2v+2a, 2\tau) \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_1'}{\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)}$$

ergiebt sich zunächst der Ausdruck:

(1) $$\frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(2v+2a, 2\tau)}{\pi \cdot \vartheta_0(v, \tau)} = -2i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} b_{k,r} \cdot e^{2k\pi iv + 2(2r+1)a\pi i},$$

$$b_{k,r} = (-1)^r \cdot q^{2\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-1-2r)^2} \cdot a_{k-1-2r}.$$

Hieraus wiederum erhalten wir durch Multiplication:

(2) $$\frac{\vartheta_1' \cdot \Theta_1' \cdot \vartheta_1(2v+2a, 2\tau)}{\pi^2 \cdot \vartheta_0(v, \tau) \cdot \vartheta_0(2a, 2\tau)} = -4i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} A_{k,r} \cdot e^{(2k+2)\pi iv + 2(2r+1)\pi ia},$$

$$A_{k,r} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} (-1)^m \cdot q^{2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 - (k-2m)^2 - 2(r-m)^2} \cdot a_{k-2m} \cdot a'_{r-m},$$

$$\Theta_1' = \left[\frac{\partial \vartheta_1(2v, 2\tau)}{\partial(2v)}\right]_{v=0}, \quad a'_m = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu} (-1)^\mu \, q^{2\left(m+\mu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Die Resultate gestalten sich übersichtlicher, wenn wir andere Summationsbuchstaben einführen. Wir setzen:

$$2k+2=2r+1+2l+1$$

oder:

$$k=r+l$$

dann wird:

$$(3)\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\Theta_1'\cdot\vartheta_1(2v+2a,2\tau)}{\pi^2\cdot\vartheta_0(v,\tau)\,\vartheta_0(2a,2\tau)}=-4i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r B_{l,r}\cdot e^{(2l+1)\pi i v+(2r+1)\pi i(v+2a)},$$

$$B_{l,r}=(-1)^r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\cdot q^{2\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2-(l-r-2m)^2-2m^2}\cdot a_{l-r-2m}\cdot a_m'.$$

Der Ausdruck, den wir für $B_{l,r}$ gefunden haben, ist ein recht complicirter, es handelt sich darum ihn einfacher zu gestalten.

Es leisten die Grössen $B_{l,r}$ nun den Gleichungen Genüge:

$$(4)\quad \begin{cases} B_{l,r+1}=q^{2(l+r)+3}B_{l,r}+(-1)^{r+1}q^{2(r+1)^2+l+r+\frac{7}{4}}\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\cdot q^{4m(r+1)}\cdot a_m', \\ B_{l+2,r}=q^{4r+2}B_{l,r}+q^{2r+1+(r+l+2)^2}\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m\cdot q^{-2m^2}\cdot a_{2m}. \end{cases}$$

Die Richtigkeit der beiden Gleichungen braucht wohl kaum nachgewiesen zu werden.

Setzen wir der einfacheren Bezeichnung halber:

$$(5)\quad F=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m q^{-2m^2}\cdot a_{2m},$$

so wird, wenn r positiv und von Null verschieden angenommen wird, nach der letzten Formel (4):

$$B_{l,-r}=-F\cdot q^{2r-1}\cdot\sum_0^{\infty}{}_m q^{m(4r-2)+(l-r+2m+2)^2}$$

oder also:

$$(6)\quad B_{l,-r}=-F\cdot q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2r-1)(2l+1)}{2}}\cdot\sum_0^{\infty}{}_m q^{\left(l+2m+\frac{3}{2}\right)^2}.$$

Nun gilt allgemein die Relation:

$$B_{l,r}=-B_{-l-1,-r-1};$$

daraus folgt, dass, wenn jetzt r positiv oder Null ist:

$$(7)\quad B_{l,r}=F\cdot q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(2r+1)(2s+1)}{2}}\cdot\sum_0^{\infty}{}_m q^{\left(l-2m-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Hiermit sind die Constanten in einfacher Weise bestimmt. Die gemeinsame Summe F ist leicht zu interpretiren. In der That es ist:

$$B_{l,0} = q^{2l+1} \cdot B_{l,-1} + q^{l+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\Theta_1'}{2\pi};$$

andrerseits folgt aber

$$B_{l,0} - q^{2l+1} \cdot B_{l,-1} = q^{\frac{1}{4}+\frac{2l+1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2 \cdot F}{2},$$

also wird:

$$F = \frac{\Theta_1'}{\pi\,\vartheta_2}.$$

Somit finden wir schliesslich das Resultat:

$$(8)\quad \frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_1' \cdot \vartheta_1(2v+2a, 2\tau)}{\pi \cdot \vartheta_0(v,\tau) \cdot \vartheta_0(a,\tau)} = -4i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r C_{l,r} \cdot e^{(2l+1)\pi i v + (2r+1)\pi i(v+2a)},$$

$$C_{l,r} = q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(2r+1)(2l+1)}{2}} \sum_0^{\infty}{}_m q^{\left(l-2m-\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$C_{l,-r} = -q^{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(2r-1)(2l+1)}{2}} \sum_0^{\infty}{}_m q^{\left(l+2m+\frac{3}{2}\right)^2}.$$

In der vorletzten Formel ist r positiv oder Null, in der letzten positiv.

Der Werth von F kann auch geschrieben werden:

$$(9)\qquad F = \frac{1}{2}\,\vartheta_2 \cdot \vartheta_0(0, 2\tau).$$

Hiermit sind wir für den Fall $n = 2$ vollkommen am Ziele.

§ 4.

Behandlung des allgemeinen Falles.

Bei einem allgemeinen n haben wir zunächst zu unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

Sei n eine ungerade Zahl, so ergiebt sich durch Multiplication der entsprechenden Reihen:

$$\frac{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(nv+na, n\tau)}{2\pi \cdot \vartheta_0(v,\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r b_{kr} \cdot e^{(2k+1)\pi i v + (2r+1)n a \pi i},$$

$$b_{kr} = (-1)^{r+1} \cdot i \cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(k-\frac{n-1}{2}-nr\right)^2} \cdot a_{k-\frac{n-1}{2}-nr},$$

oder auch:

$$(1)\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\vartheta_1(nv+na,\,n\tau)}{2\pi\cdot\vartheta_0(v,\,\tau)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, c_{kr}\cdot e^{(2k+n)\pi iv+(2r+1)na\pi i},$$

$$c_{kr}=(-1)^{r+1}\cdot i\cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-(k-nr)^2}\cdot a_{k-nr}.$$

Sei zweitens n eine gerade Zahl, so ergiebt sich analog:

$$\frac{\vartheta_1'\cdot\vartheta_1(nv+na,\,n\tau)}{2\pi\cdot\vartheta_0(v,\,\tau)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, b_{kr}\cdot e^{2k\pi iv+(2r+1)na\pi i},$$

$$b_{k,r}=(-1)^{r+1}\cdot i\cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-\left(k-\frac{n}{2}-nr\right)^2}\cdot a_{k-\frac{n}{2}-nr};$$

oder auch:

$$(2)\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\vartheta_1(nv+na,\,n\tau)}{2\pi\cdot\vartheta_0(v,\,\tau)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, c_{k.r}\cdot e^{(2k+n)\pi iv+(2r+1)na\pi i},$$

$$c_{k,r}=(-1)^{r+1}\cdot i\cdot q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-(k-nr)^2}\cdot a_{k-nr}.$$

So haben wir eine gemeinsame Form gefunden und können jetzt ohne weiteres annehmen, dass n gerade oder ungerade ist. Wir setzen es als gerade voraus.

Jetzt möge mit:

$$\frac{\Theta_1'}{2\pi\cdot\vartheta_0(na,\,n\tau)}$$

multiplicirt werden, wobei gesetzt ist:

$$\Theta_1'=\left[\frac{\partial\vartheta_1(nv,\,n\tau)}{\partial(nv)}\right]_{v=0}.$$

Es ergiebt sich:

$$(3)\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\Theta_1'\cdot\vartheta_1(nv+na,\,n\tau)}{4\pi^2\cdot\vartheta_0(v,\tau)\cdot\vartheta_0(na,\,n\tau)}=-\,i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, A_{k,r}\cdot e^{(2k+n)\pi iv+(2r+1)na\pi i},$$

$$A_{k.r}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m(-1)^m\, q^{n\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-(k-nm)^2-n(r-m)^2}\cdot a_{k-nm}\cdot a'_{r-m},$$

$$a_s'=\sum_{0}^{\infty}{}_\mu\,(-1)^\mu\, q^{n\left(s+\mu+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Die Formen gestalten sich übersichtlicher, wenn wir einen anderen Summationsbuchstaben einführen. Wir setzen:

$$2k+n=(2r+1)(n-1)+2l+1$$

oder:

$$k=r(n-1)+l.$$

Dann wird:

$$(4)\quad \frac{\vartheta_1'\cdot\Theta_1'\cdot\vartheta_1(nv+na,n\tau)}{4\pi^2\cdot\vartheta_0(v,\tau\cdot\vartheta_0)(na,n\tau)} = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} B_{l,r}\cdot e^{(2l+1)\pi i v+(2r+1)\pi i((n-1)v+na)},$$

$$B_{l,r} = (-1)^r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot q^{n\left(m+r+\frac{1}{2}\right)^2-(l-r-nm)^2-nm^2}\cdot a_{l-r-nm}\cdot a_m'.$$

Der Ausdruck, welchen wir hiermit für den allgemeinen Coefficienten gefunden haben, ist wiederum wenig übersichtlich. Es soll versucht werden, ihn in einer einfacheren Form darzustellen.

Es folgen mit leichter Mühe die Recursionsformeln:

$$B_{l,r+1} = q^{2r(n-1)+2l+2n-1}\cdot B_{l,r}$$
$$+(-1)^{r+1}\cdot q^{n(r+1)^2+\frac{5n}{4}-\frac{3}{4}+r(n-1)+l}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot q^{2n(r+1)m}\cdot a_m',$$

$$(5)\quad B_{l+n,r} = q^{n(2r+1)}\cdot B_{l,r}+(-1)^{l+1}\cdot q^{3rn+\frac{3n}{2}+nr^2-r^2}\cdot F_{l,r},$$

$$F_{l,r} = q^{-l^2+2rl}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m\cdot q^{-n(n-1)m^2+2nm(l+1)}\cdot a_{nm}.$$

Nehmen wir daher an, dass r positiv und von Null verschieden ist, so folgt:

$$(6)\qquad B_{l,-r} = (-1)^l q^{-n\left(\frac{2r-1}{2}\right)+(n-1)r^2}\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu} q^{n\mu(2r-1)}\cdot F_{l+n\mu,-r}.$$

An Stelle der einen Function F, die wir im vorigen Paragraphen fanden, treten hier also deren unendlich viele. Es ist nun aber nicht schwer nachzuweisen, dass sich diese unendlich vielen Functionen sämmtlich auf deren $n-1$ zurückführen lassen.

In der That, aus der Definitionsgleichung der Functionen F folgt unmittelbar die Recursionsformel:

$$(7)\qquad F_{l+n-1,-r} = -q^{-2rn+3n+2l+2r-1}\cdot F_{l,-r},$$

und zwar gilt diese Formel für positive und negative r.

Allgemein wird:

$$(8)\quad F_{l+\mu(n-1),-r} = (-1)^\mu\cdot q^{\mu(-2rn+3n+2l+2r-1)+\mu(\mu-1)(n-1)}\cdot F_{l,-r}.$$

Diese Formel lehrt, dass durch $n-1$ auf einander folgende Summen:

$$F_{l,-r},\ F_{l+1,-r},\ \ldots,\ F_{l+n-2,-r}$$

sich die übrigen unmittelbar darstellen lassen.

Unsere Grössen $B_{l,-r}$ nehmen nun zunächst die Form an:

$$B_{l,-r} = (-1)^l\cdot q^{-\frac{n(2r-1)}{2}+(n-1)r^2}\cdot\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}(-1)^\mu\cdot q^{\mu(2r+2l+n)+\mu^2(n+1)}\cdot F_{l+\mu,-r}.$$

Hieraus folgt, dass wir schreiben können:

(9) $B_{l,-r} = F_{l,-r} \cdot D_0 + F_{l+1,-r} \cdot D_1 + \cdots + F_{l+n-2,-r} \cdot D_{n-2}$.

In dieser Formel hat D_k die Bedeutung:

$$D_k = (-1)^{l+k} \cdot q^{-\left(\frac{2r-1}{2}\right) n + r^2(n-1) + k(n+2l+2r) + k^2(n+1)} \cdot \sum_{m}^{\infty}{}_{0}\, q^{(n-1)n^2m^2 + n \cdot m(n+2l+2kn+1)}. \tag{10}$$

Die Grössen $B_{l,r}$ bei denen r positiv oder Null ist, folgen dann aus der Gleichung

$$B_{l,r} = -B_{-l-1,-r-1}. \tag{11}$$

Hiermit sind wir auch im allgemeinen Falle ans Ziel gelangt und es wird sich jetzt noch lediglich darum handeln, die verschiedenen Methoden mit einander in Verbindung zu setzen und an Beispielen ihre Bedeutung auseinanderzusetzen.

Den 29. April 1888.