ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 3430.

Band 143. 22.

Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwerebestimmungen.

Von *F. R. Helmert.*

Auf die Nothwendigkeit der Berücksichtigung der elastischen Biegsamkeit der Pendelkörper bei der Theorie der Pendelbewegung hat wohl zuerst C. S. Peirce im Jahre 1884 hingewiesen.*) Aber er betrachtet nur den Fall, dass das Pendel eine elastische Stelle hat, im Uebrigen aber starr ist. Lorenzoni hat neuerdings die Theorie von Peirce modificirt; er gelangt überdies zu einem anderen Ergebniss als letzterer.**) Ich komme zum Schlusse dieses Aufsatzes ausführlicher auf dieses Problem zurück, für welches ich wieder ein anderes Ergebniss gefunden habe. Auch weise ich die Ursache der Abweichung der Ergebnisse meiner Vorgänger nach.

Unabhängig von Peirce wurde im Königl. Preussischen Geodätischen Institut die Nothwendigkeit der Berücksichtigung der Biegsamkeit aus einem äusseren Anlass von Dr. Kühnen aufs Neue erkannt.†) Den Anlass bot ein stark abweichendes Resultat für die Länge L des mathematischen Secundenpendels, welches mit einem neuen Reversions-Meterpendel von bedeutender Biegsamkeit erhalten worden war. Es ergab $L = 994.631$ mm, während ein steifes Viertelmeterpendel nur zu 994.258 mm führte (beide Zahlen sind noch nicht völlig definitiv). Die Uebertragung der absoluten Bestimmung, welche von Oppolzer 1884 in Wien erhielt, auf Potsdam ergab nach Oberst von Sterneck ebenfalls 994.258 mm, nach Dr. Kühnen 994.255 mm. Hiernach erschien das mit dem neuen langen Pendel erzielte Resultat um 0.374 mm zu gross. Es ist mir nun in der Folge möglich gewesen, diese Zahl durch eine Theorie im Wesentlichen als Effect der elastischen Biegsamkeit des langen Pendels zu erklären, indem ich denselben zu 0.366 mm ± 0.015 mm mittl. F. berechnete.

Bei der Aufstellung der Theorie führte ich zwei Näherungen ein. Die erste besteht in der Annahme der in der technischen Mechanik bei der Theorie der Biegung angewandten Näherung, insbesondere in der Annahme der Differentialgleichung für die gebogene Längsaxe des Pendels

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{E\mathfrak{T}},$$

worin bezeichnen x die Abscisse, gemessen auf einer der gebogenen Längsaxe in der Schwingungsebene des Schwerpunktes des Pendels sehr nahe liegenden Geraden, η die Ordinate, $\mathfrak{M}$ das Biegungsmoment für den Querschnitt des Pendelkörpers an der Stelle (x, η), E den Elasticitätsmodul und $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment des eben genannten Querschnitts für eine zu den Pendelschneiden parallele Gerade durch den Schwerpunkt (x, η) des Querschnitts.

Die zweite Näherung besteht in der Berechnung des Biegungsmoments $\mathfrak{M}$ unter Vernachlässigung der sehr kleinen Verbiegungen, also in der Weise, dass dabei der Pendelkörper als starr vorausgesetzt wird.

Ueber die Zulässigkeit beider Näherungen ist kein Zweifel, da einerseits das Verhältniss der Querdimension des Pendelkörpers zur Länge gerade bei den besonders in Betracht kommenden langen Pendeln klein ist, und da andererseits die Verbiegungen kaum Hundertstelmillimeter erreichen, so dass ihr Einfluss auf $\mathfrak{M}$, welcher Glieder von der Ordnung des Quadrats der Verbiegungen erzeugt, verschwindet.

Selbstverständlich müssen die Kräfte zur Berechnung von $\mathfrak{M}$ nicht so genommen werden, als befände sich das Pendel bei einer gewissen Elongation im Ruhezustande, sondern es muss mit den »verlorenen« Kräften gerechnet werden, wie es bekanntlich auch die strenge Elasticitätstheorie thut. Wird ein festes, rechtwinkeliges Axensystem in der Schwingungsebene angenommen und sind x' und y' die Coordinaten der Projection des Massentheilchens dm auf diese Ebene, ferner X' und Y' die Componenten der Schwerebeschleunigung g, so sind die verlorenen Kräfte am Theilchen dm in beiden Axenrichtungen

$$\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) dm \quad \text{und} \quad \left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right) dm\ .$$

Während es bei Aufstellung der Gleichung für $d^2\eta : dx^2$ genügte, zur Berechnung von $\mathfrak{M}$ die am starren Pendel vorhandenen verlorenen Kräfte anzuwenden, mussten sodann bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung des elastischen Pendels die verlorenen Kräfte mit Rücksicht auf die veränderliche Verbiegung abgeleitet werden, die nun auch bei den Hebelarmen der Kräfte in Betracht kam. Die Herstellung der allgemeinen Formeln bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

Legt man die x-Axe tangential an die gebogene Längsaxe im Coordinatenanfang in der oberen Schneide, und ist α die grösste Elongation der x-Axe, $\alpha - \theta$ diejenige zur Zeit t, so wird zur Bestimmung von η für die Abscisse a:

*) Note on the effect of the flexure of a pendulum upon its period of oscillation. App. 16 Coast and Geod. Survey Report for 1884.

**) L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione. 1896.

†) Verhandlungen der elften allgemeinen Conferenz der Internationalen Erdmessung. Berlin 1896. S. 60.

$$\frac{d^2\eta_0}{da^2} = \frac{g}{E\mathfrak{T}}\int_a \frac{l-x}{l}(x-a)\,dm$$

mit
$$\eta = \eta_0 \sin(\alpha - \theta).$$

Hierin ist die Integration bis ans untere oder obere Ende des Pendelkörpers auszudehnen, je nachdem a positiv oder negativ ist. l bezeichnet die aequivalente mathematische Pendellänge.

Hat man η_0 durch zweimalige Integration hergeleitet, so erhält man weiter

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\sin(\alpha-\theta)\left(1 - \frac{1}{Mh}\int\frac{l-x}{l}\eta_0\,dm\right),$$

worin die Integration über den ganzen Pendelkörper von oben bis unten zu erstrecken ist; die aequivalente mathematische Pendellänge ist daher

$$l' = l\left(1 + \frac{i}{Mh}\right).$$

Hierbei bezeichnet i das Integral in der vorigen Klammer, M die Pendelmasse und h den Abstand des Pendelschwerpunkts von der oberen Schneide. Sind T' und T die Schwingungszeiten des elastischen und des starren Pendelkörpers, so hat man noch

$$T' = T\left(1 + \frac{i}{2Mh}\right).$$

Durch Anwendung dieser Formeln auf die Schwingung des Reversionspendels um beide Schneiden folgt für die mathematische Länge des Secundenpendels

$$L' = L\left(1 - \frac{i_1 T_1'^2 - i_2 T_2'^2}{\tau'^2 (h_1 - h_2) M}\right),$$

wobei sich die Indices 1 und 2 auf beide Lagen des Pendels beziehen und ausserdem gesetzt wurde:

$$\tau'^2 = \frac{T_1'^2 h_1 - T_2'^2 h_2}{h_1 - h_2}.$$

Für einen in einem Ende aufgehängten, röhrenförmigen Stab von der Länge Λ und dem äusseren und inneren Durchmesser d_1 und d_2 folgt hiermit

$$l' = l\left(1 + \frac{2\mu g \Lambda^3}{105 E(d_1^2 + d_2^2)}\right),$$

worin für Messing die Dichtigkeit μ etwa gleich 8.5, ferner $E:g$ für Millimetermaass gleich 10^{10} gesetzt werden kann. Bei einem Pendel von $\Lambda = 1500$ mm Länge, das nahezu 1^s schwingt, wird $T' - T = 0^s.000014$ bei $d_1 = 32$ mm, $d_2 = 31$ mm.

Für die Reversionspendel der bei Repsold üblichen Construction kann man eine Näherungsformel aufstellen, wenn man annimmt, dass der Querschnitt der Stange in Bezug auf Biegungsfestigkeit als constant betrachtet werden darf; es sei $\mathfrak{T}$ sein Trägheitsmoment, Q seine Fläche. Die sogenannten Gewichte (das schwere und leichte) denke ich mir in je einen Punkt im Abstand e von der nächsten Schneide concentrirt. Der Schneidenabstand sei Λ. Dann ist

$$L' = L\left(1 + \frac{\mu g Q}{180 E\mathfrak{T}}\cdot\frac{(\Lambda^2 - e^2)(2\Lambda + e)e}{\Lambda}\right).$$

Bei röhrenförmiger Stange ist $Q:\mathfrak{T} = 16:(d_1^2 + d_2^2)$.

Nach Maassgabe dieser Formel ist bei den älteren, steifen Meterpendeln von Repsold mit $\Lambda = 1000$, $e = 79$ bis 98, $d_1 = 41$ bis 44, $d_1 - d_2 = 2$ bis 4 mm der Unterschied $L' - L = +0.004$ mm. Dies ist ein Betrag, der nicht vernachlässigt werden darf.

Das Meterpendel des Oberstlieutenants Defforges giebt mit $\Lambda = 1000$, $e =$ ca. 170, $d_1 = 30$, $d_2 = 24$ mm für $L' - L$ den erheblich grösseren Betrag $+0.018$ mm. Da aber Defforges den Endwerth von L aus dem Unterschied der Schneidenentfernungen eines Meterpendels und eines Halbmeterpendels ableitet, vergrössert sich dieser Einfluss auf das Doppelte. Jedoch tritt wieder eine Verminderung ein wegen des entsprechenden Einflusses für das Halbmeterpendel, die aber nicht sehr bedeutend sein kann. Ich nehme daher einstweilen rund $L' - L = +0.030$ mm an.

Hiermit erklärt sich der Unterschied der absoluten Bestimmungen von Defforges und von Oppolzer, der nach von Sterneck's relativen Messungen in Paris und Wien, auf gleichen Ort reducirt, $+0.037$ mm beträgt, zu einem grossen Theil aus der elastischen Biegung der Pendel. Denn diese ergiebt allein den Betrag $+0.030 - 0.004 = +0.026$ mm. Allerdings würde zur genauen Berechnung dieses Unterschiedes eine directe Abmessung der erforderlichen Maasse an den Pendeln von Defforges unerlässlich sein.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf das neue, sehr biegsame Meterpendel des Geodätischen Instituts erforderte wegen der Veränderlichkeit des Querschnitts eine Auswerthung der Integrale durch mechanische Quadratur, wobei die ganze Länge in Elemente von 1 cm getheilt wurde. Ausserdem machte sich wegen des hohen Betrages von $L' - L$ eine experimentelle Bestimmung von E durch statische Biegungsversuche bei horizontaler Lage des Pendels erforderlich. Diese Versuche ergaben

$$E:g = (10300 \pm 45 \text{ mittl. F.})\,10^6.$$

Es fand sich für beide Lagen einzeln

bei schwerem Gewicht unten $T_1' - T_1 = +0^s.000036$
» » » oben $T_2' - T_2 = +0.000330$.

Hiermit folgt, wie schon bemerkt:

$$L' - L = +0.366 \text{ mm}.$$

In Bezug auf die Form der gebogenen Längsaxe sei noch hervorgehoben, dass bei schwerem Gewicht unten die Biegung unterhalb der Drehungsaxe wesentlich nach aussen erfolgt. Nimmt man η_0 entsprechend negativ, so ist es bei $x = +1160$ mm am unteren Ende -1.33 mm, bei $x = +1000$ mm gleich -0.95 mm, bei $x = +500$ mm gleich -0.16 mm und bei $x = -160$ mm am oberen Ende gleich $+0.05$ mm. Bei schwerem Gewicht oben sind die Beträge von η_0 der Reihe nach entsprechend $+1.88$, $+1.60$, $+0.66$ unterhalb der Drehungsaxe und $+0.33$ am oberen Ende. Hier ist also die gebogene Längsaxe ganz anders als im ersten Falle geformt.

Ueber die Einzelheiten der Theorie und numerischen Berechnung wird sich eine besondere Veröffentlichung verbreiten. Dagegen möge hier eingehender der Fall einer einzelnen elastischen Stelle im Pendelkörper behandelt werden. Die wichtigsten Bezeichnungen sind dabei nach Peirce und Lorenzoni beibehalten.

Es sei O der Durchschnittspunkt von Drehungsaxe und Schwingungsebene des Gesammtschwerpunktes, D bezeichne die unterhalb O in dieser Ebene liegende elastische Stelle; der Schwerpunkt des oberen Theils mit der Masse m_0 befinde sich auf der Linie OD im Abstand h_0 von O; der Schwerpunkt G des unteren Theils mit der Masse m sei von D um h entfernt. $m_0 \gamma_0^2$ und $m \gamma^2$ seien die Trägheitsmomente des oberen und unteren Theils um Axen durch ihre Schwerpunkte parallel zur Axe O. θ_0 sei die Elongation von OD, $\theta = \theta_0 + \varDelta$ diejenige von DG.

Es werde nun durch O eine x'-Axe in der Elongation $\theta_0 - \vartheta$ gelegt, sowie eine y'-Axe in der Elongation $\theta_0 - \vartheta + \frac{1}{2}\pi$. Ausserdem werde ein Massenelement dm_0 des oberen Theils durch die rechtwinkligen Coordinaten x_0 und y_0 auf OD als x-Axe und O als Coordinatenanfang, ein Massenelement dm des unteren Theils durch die Coordinaten x und y auf DG als x-Axe und D als Coordinatenanfang bezogen, wobei die Richtung der y-Axen derjenigen der y'-Axe entsprechend zu nehmen ist. Alsdann hat man, $OD = r$ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_0 \cos\vartheta - y_0 \sin\vartheta \\ y' &= x_0 \sin\vartheta + y_0 \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \text{ für den oberen Theil,}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos\vartheta + x\cos(\vartheta+\varDelta) - y\sin(\vartheta+\varDelta) \\ y' &= r\sin\vartheta + x\sin(\vartheta+\varDelta) + y\cos(\vartheta+\varDelta) \end{aligned}\right\} \text{ für den unteren Theil.}$$

Zweimalige Differentiation nach t mit Beachtung der Relation $d\vartheta = d\theta_0$ giebt unter schliesslicher Einführung von $\vartheta = 0$ für den oberen Theil die Beschleunigungen parallel zu den Axen der x_0 und der y_0:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -x_0\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 - y_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = -y_0\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 + x_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2};$$

für den unteren Theil folgen als Beschleunigungen parallel zu denselben Axen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= -r\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 - (x\cos\varDelta - y\sin\varDelta)\left(\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{d\varDelta}{dt}\right)^2 - (x\sin\varDelta + y\cos\varDelta)\left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{d^2\varDelta}{dt^2}\right) \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= r\,\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - (x\sin\varDelta + y\cos\varDelta)\left(\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{d\varDelta}{dt}\right)^2 + (x\cos\varDelta - y\sin\varDelta)\left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{d^2\varDelta}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

Die verlorenen Kräfte sind alsdann parallel zu den Axen der x_0 und der y_0, abgesehen vom Factor dm_0 für den oberen und vom Factor dm für den unteren Theil:

$$+g\cos\theta_0 - \frac{d^2x'}{dt^2} \quad \text{und} \quad -g\sin\theta_0 - \frac{d^2y'}{dt^2}.$$

Ihre Hebelarme in Bezug auf O sind beim Theilchen dm_0 bezw. y_0 und x_0, beim Theilchen dm bezw.

$$(x\sin\varDelta + y\cos\varDelta) \quad \text{und} \quad (r + x\cos\varDelta - y\sin\varDelta).$$

Aus der Bedingung, dass die Summe der Drehungsmomente der verlorenen Kräfte in Bezug auf O gleich Null sein muss, folgt die Bewegungsgleichung, welche sich sehr vereinfacht, wenn man nachstehende Relationen benutzt.

Für den oberen Theil des Pendels ist

$$\int y_0\, dm_0 = 0, \quad \int x_0\, dm_0 = m_0 h_0$$

und $\int (x_0^2 + y_0^2)\, dm_0 = m_0\gamma_0^2 + m_0 h_0^2 = m_0 h_0 l_0$.

Für den unteren Theil ist

$$\int y\, dm = 0, \quad \int x\, dm = m h$$

und mit $h + r = h_1$

$$\int ((r+x)^2 + y^2)\, dm = m\gamma^2 + m(h+r)^2 = m h_1 l_1.$$

Ferner sei $m\gamma^2 + m h^2 = m h l$

$$m_0 h_0 + m h_1 = MH$$

$$m_0 h_0 l_0 + m h_1 l_1 = MHL.$$

Damit wird auch

$$m h_1 l_1 = m r^2 + 2 m h r + m h l.$$

l_0, l_1 und L sind aequivalente mathematische Längen des oberen und unteren Pendeltheils, sowie des ganzen Pendels für Drehung um O; l bezieht sich auf den unteren Theil und D. H ist der Abstand des Gesammtschwerpunkts von O.

Die Bewegungsgleichung wird hiermit:

$$\begin{aligned} &(MHL - 2mhr(1-\cos\varDelta))\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + (mhl + mhr\cos\varDelta)\frac{d^2\varDelta}{dt^2} - mhr\sin\varDelta\cdot\frac{d\varDelta}{dt}\left(2\frac{d\theta_0}{dt}+\frac{d\varDelta}{dt}\right) \\ &\qquad = -gMH\sin\theta_0 - gmh(\sin(\theta_0+\varDelta) - \sin\theta_0), \end{aligned}$$

oder mit Vernachlässigung von $\varDelta^2$:

$$L\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = -g\sin\theta_0 - \frac{mh}{MH}\left((l+r)\frac{d^2\varDelta}{dt^2} + g\varDelta\cos\theta_0\right).$$

Um $\varDelta$ zu finden, muss man das Biegungsmoment der verlorenen Kräfte für D aus dem unteren oder oberen Theil des Pendels herleiten. Beide Momente sind entgegengesetzt gleich; jedoch erfordert die Berechnung für den oberen Theil die vorhergehende Auswerthung des Widerstandes der Drehungsaxe O. Ist ε ein Elasticitätscoefficient, so giebt der untere Pendeltheil:

$$\varDelta\cdot\varepsilon = -g\,m\,h\sin(\theta_0+\varDelta) - m\,h\,r\left[\sin\varDelta\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2 + \cos\varDelta\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right] - m\,h\,l\left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\frac{d^2\varDelta}{dt^2}\right),$$

oder mit Vernachlässigung von $\varDelta$ rechter Hand:

$$\varDelta\cdot\varepsilon = -m\,h\left((l+r)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+g\sin\theta_0\right).$$

Setzt man hierin $d^2\theta_0 : dt^2 = -g\sin\theta_0 : L$ und bezeichnet den Quotienten $g\,m\,h:\varepsilon$ mit ω, so folgt

$$\varDelta = \theta-\theta_0 = \omega\sin\theta_0\left(\frac{l+r}{L}-1\right).$$

$-\omega\sin\theta_0$ würde die statische Abbiegung sein, welche an Stelle von $\varDelta$ eintreten müsste, wollte man den oberen Pendeltheil in der Elongation θ_0 festhalten. Während die statische Abbiegung immer gegen die Verticale hin gerichtet (nämlich negativ) ist, ist die dynamische Abbiegung $\varDelta$ meistens positiv und von der Verticalen ab gerichtet. Denn man hat

$$\frac{l+r}{L}-1 = \frac{m\,r(l-h)+m_0\,h_0(l+r-l_0)}{m(h\,l+2\,h\,r+r^2)+m_0\,h_0\,l_0},$$

und es ist immer $l > h$ und in praktischen Fällen zugleich $l+r > l_0$, was mit positiven Werthen von r und h_0 zu einem positiven Werth des Ausdrucks führt. Ein negativer Werth von r ist zwar praktisch möglich, aber durch die Voraussetzung über die Lage von D ausgeschlossen; er bedürfte besonderer Untersuchung. Dagegen ist die Entwickelung für einen negativen Werth von h_0, mit dem zugleich l_0 negativ wird, noch brauchbar, und in diesem Falle kann der Ausdruck auch negativ werden.

Die Einführung von $\varDelta$ in die Bewegungsgleichung giebt mit zulässiger Annäherung unter Voraussetzung kleiner Werthe von θ_0 die Gleichung:

$$L\left[1+\omega\frac{m\,h}{MH}\left(\frac{l+r}{L}-1\right)^2\right]\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = -g\sin\theta_0\,.$$

Durch die Anwesenheit der elastischen Stelle geht daher die aequivalente mathematische Länge des Pendels von dem Betrage L über zu dem Betrage L':

$$L' = L\left[1+\omega\frac{m\,h}{MH}\left(\frac{l+r}{L}-1\right)^2\right],$$

$$\omega = \frac{g\,m\,h}{\varepsilon}\,.$$

Hiernach ist $L' > L$. In Uebereinstimmung damit ergab sich früher für einen in einem Ende aufgehängten elastischen Stab $l' > l$.

Es erschien mir wichtig zur Stütze meines Ergebnisses eine zweite Ableitung nach dem Hamilton'schen Princip vorzunehmen, welche im vorliegenden Falle sogar den Vorzug grösserer Einfachheit der Rechnung (bei allerdings geringerer Anschaulichkeit) vor der zuerst mitgetheilten Ableitung besitzt. Für die lebendige Kraft E (kinetische Energie) findet man leicht direct aus der Betrachtung der Drehbewegung der beiden Pendeltheile den Ausdruck:

$$E = \tfrac{1}{2}(m_0\,h_0\,l_0+m\,r^2)\,\theta_0'^2 + \tfrac{1}{2}\,m\,h\,l\,(\theta_0'+\varDelta')^2 + m\,h\,r\,\theta_0'(\theta_0'+\varDelta')\cos\varDelta\,,$$

wenn die ersten Differentialquotienten nach der Zeit t durch einen oberen Strich markirt werden. Die Potentiale der Schwerkraft und des elastischen Widerstandes sind zusammen

$$V = g\,m_0\,h_0\cos\theta_0 + g\,m\,r\cos\theta_0 + g\,m\,h\cos(\theta_0+\varDelta) - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varDelta^2\,.$$

Bildet man nun die Variation $\delta(E+V)$ in Bezug auf $\varDelta$ in der Form $R\,\delta\varDelta + S\,\delta\varDelta'$, so ergiebt sich bekanntlich die Differentialgleichung $R = dS : dt$. Es ist

$$R = -g\,m\,h\sin(\theta_0+\varDelta) - \varepsilon\varDelta - m\,h\,r\,\theta_0'(\theta_0'+\varDelta')\sin\varDelta$$

und

$$S = m\,h\,l\,(\theta_0'+\varDelta') + m\,h\,r\,\theta_0'\cos\varDelta\,.$$

Hiermit folgt die strenge Gleichung für $\varDelta\cdot\varepsilon$ genau wie früher. Dasselbe Verfahren für $\delta(E+V)$ in Bezug auf θ_0 giebt

$$R = -(g\,m_0\,h_0+g\,m\,r)\sin\theta_0 - g\,m\,h\sin(\theta_0+\varDelta)$$

$$S = (m\,h_0\,l_0+m\,r^2)\,\theta_0' + m\,h\,l\,(\theta_0'+\varDelta') + m\,h\,r\,(2\,\theta_0'+\varDelta')\cos\varDelta\,,$$

und mit $R = dS : dt$ die strenge Bewegungsgleichung wie früher. Peirce bedient sich des obigen Ausdrucks für die kinetische Energie E mit $\theta_0+\varDelta = \theta$:

$$E = (\tfrac{1}{2}\,m_0\,(h_0^2+\gamma_0^2) + \tfrac{1}{2}\,m\,r^2)\,\theta_0'^2 + m\,h\,r\cos(\theta-\theta_0)\,\theta_0'\,\theta' + \tfrac{1}{2}\,m\,(h^2+\gamma^2)\,\theta'^2\,,$$

sowie desjenigen für die potentielle Energie $U = \text{Const} - V$:

$$U = g\,m_0\,h_0\,(1-\cos\theta_0) + g\,m\,r\,(1-\cos\theta_0) + g\,m\,h\,(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,(\theta-\theta_0)^2\,.$$

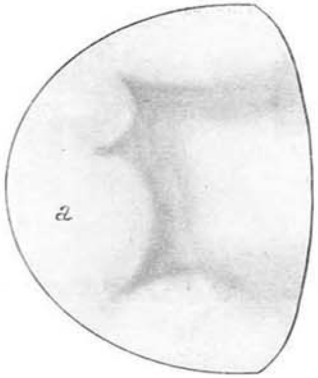


Fig. 1

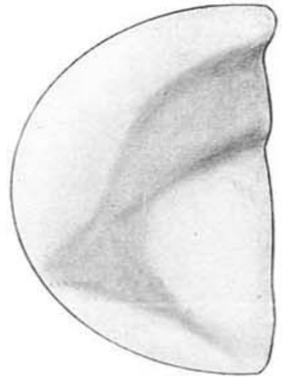


Fig. 2

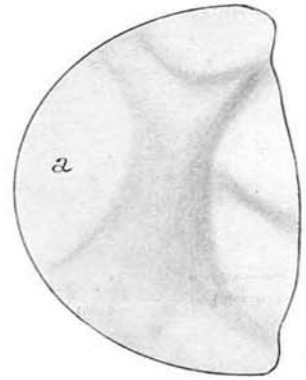


Fig. 3

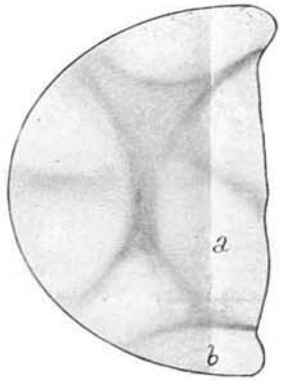


Fig. 4

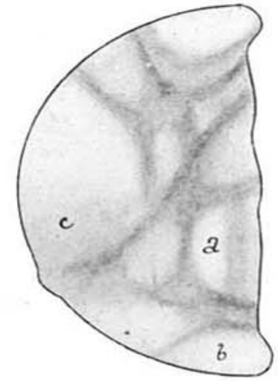


Fig. 5

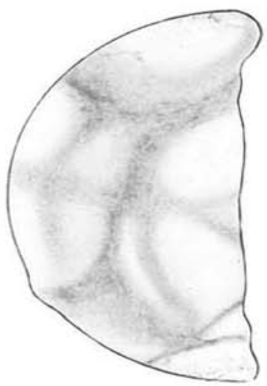


Fig. 6

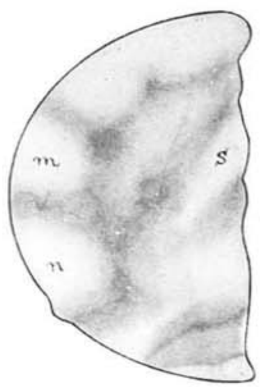


Fig. 7

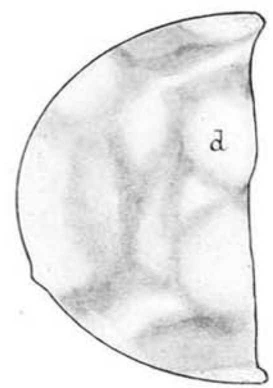


Fig. 8

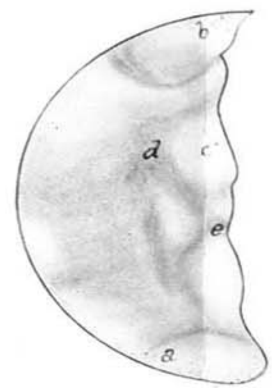


Fig. 9

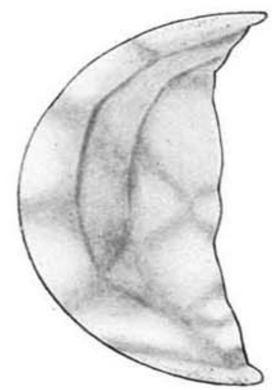


Fig. 10

S

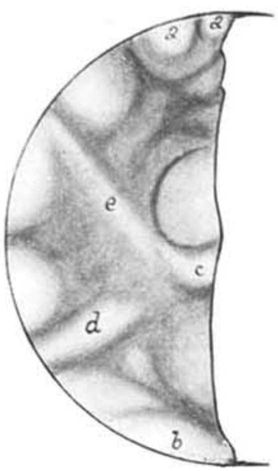


Fig. 11

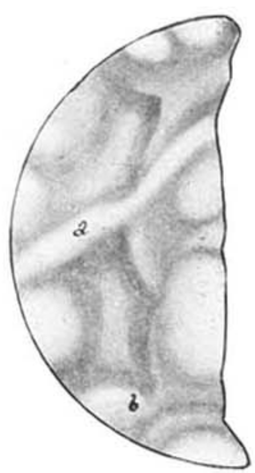


Fig. 12

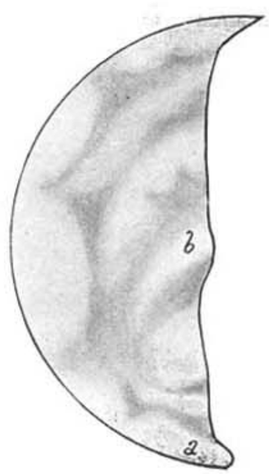


Fig. 13

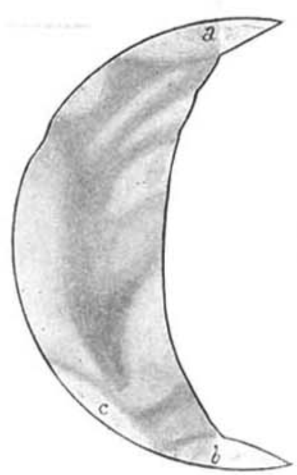
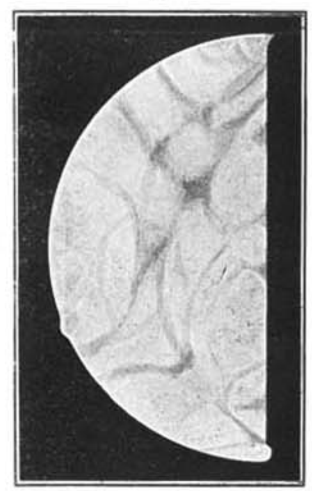


Fig. 14

W



E

N

Fig. 15

Durch eine Minimumbetrachtung leitet er zunächst mittelst Variation von U allein einen Werth für $\Delta\cdot\varepsilon$ ab, der aber nur eine statische Bedeutung haben kann, den jedoch Lorenzoni beibehält. Während dieser nun nach dem Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft die Gleichung $d(E+U):dt = 0$ bildet, leitet Peirce nach dem Hamilton'schen Princip zwei Differentialgleichungen ab, aus denen er meine Werthe von Δ und L' hätte finden müssen.

Potsdam, April 1897.

Helmert.

Ueber die Benutzung der Projectionsfactoren bei Untersuchung der systematischen Fehler heliometrischer Distanzmessungen.

Von *H. Battermann.*

Herr Dr. Cohn spricht A. N. 3411 die Ansicht aus, dass meine Bemerkungen über die Unsicherheit der Projectionsfactoren (A. N. 3406) sich nur auf die Bestimmung des Scalenwerthes, aber nicht auf die Bestimmung systematischer Fehler beziehen könnten. Diese Unsicherheit müsse als die zufälligen Messungsfehler vergrössernd angesehen werden und lasse sich nicht umgehen.

Ich glaube nun genügend darauf hingewiesen zu haben, dass die Unsicherheit der Projectionsfactoren allerdings nur in dem Falle unmerklich wird, wenn jene Factoren aus scharfen Positionswinkelmessungen an Heliometern bestimmt sind, oder wenn die Sterne des Bogens sehr nahe in einem grössten Kreise liegen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so lässt sich thatsächlich die Unsicherheit der Meridianpositionen, aus welchen die Factoren abgeleitet sind, in keiner Weise umgehen; aber die daraus hervorgehende Unsicherheit ist durchaus systematischer Natur und kann durch die Zahl der Heliometermessungen nicht verringert werden. Wenn man Anspruch darauf erhebt, dass das Resultat der Untersuchung eine reale Bedeutung haben und nicht nur ein rechnungsmässiges sein soll, so muss man entweder die Meridianpositionen selbst vermittelst der aufzustellenden Gleichungen zu verbessern suchen, und zwar im Wesentlichen die Coordinaten senkrecht zu dem betrachteten Bogen; oder, wenn hierfür das Material nicht ausreicht, sollte man den mittleren Fehler der einzelnen Gleichungen, soweit er von der Unsicherheit der Meridianpositionen herrührt, angeben. Dies betrifft in gleicher Weise Bestimmungen des Scalenwerthes und Bestimmungen systematischer Fehler.

Ich habe nun vorgeschlagen, die Projectionsfactoren ganz zu vermeiden, weil diese die Berechnung nur scheinbar erleichtern, thatsächlich vielmehr, wenn man nämlich den Einfluss der Meridianpositionen untersuchen will, compliciren und undurchsichtig machen. Ich schlug vor, die Summe der heliometrisch bestimmten Distanzen mit der Summe der aus den Meridianpositionen abgeleiteten Distanzen zu vergleichen. Thatsächlich sind natürlich beide Methoden, wenigstens bis auf kleine, meist unwesentliche Glieder, bei gehöriger Entwickelung identisch. Aber in der von mir vorgeschlagenen, übrigens nicht neuen Weise sind die Entwickelungen einfacher. Ich will dies an einem Beispiel darlegen, und wähle den Hydrabogen für Epoche 1885.0. Die Grundlagen sind in »Venusdurchgänge 1874 und 1882«, Bd. V S. 361 u. 362 angegeben.

Bezeichnet Σ Hel. die Summe der fünf heliometrisch gemessenen Distanzen $ab \ldots ef$, Σ Corr. die Summe der systematischen Correctionen, welche an diese anzubringen sind; ferner Σ Mer. die Summe der entsprechenden, aber aus den Meridianpositionen berechneten Distanzen, $\Sigma\Delta$ die Summe der Verbesserungen, welche letztere wegen Verbesserung der Meridianpositionen erfordern, so hat man die Gleichung:

$$\Sigma\,\text{Hel.} + \Sigma\,\text{Corr.} = \Sigma\,\text{Mer.} + \Sigma\Delta\,.$$

Wenn ferner für die Hauptdistanz af der aus den Meridianpositionen abgeleitete Werth mit $\text{Mer}_{(af)}$, die entsprechende Verbesserung wegen Verbesserung der Meridianpositionen mit $\Delta_{(af)}$, endlich der wahre Werth mit (af) bezeichnet wird, so ist

$$(af) = \text{Mer}_{(af)} + \Delta_{(af)}\,.$$

Durch Subtraction der ersten Gleichung von der zweiten und passende Vereinigung der Glieder erhält man

$$(af) = \Sigma\,\text{Hel.} + \Sigma\,\text{Corr.} + (\text{Mer}_{(af)} - \Sigma\,\text{Mer.}) + (\Delta_{(af)} - \Sigma\Delta)\,.$$

$\text{Mer}_{(af)} - \Sigma$ Mer. ist die »Reduction der Summe der Partialdistanzen auf die Hauptdistanz«, aber abgeleitet aus den Meridianpositionen; diese aus den Meridianpositionen leicht zu berechnende Reduction ersetzt hier die Projectionsfactoren. $\Delta_{(af)} - \Sigma\Delta$ giebt den Einfluss der Unsicherheit der Meridianpositionen an.

Für den Hydrabogen erhält man aus den citirten Angaben ohne Weiteres, wenn die Indices $1 \ldots 6$ sich auf die Sterne $a \ldots f$ beziehen, und wenn, der grösseren Homogeneität wegen, $\Delta'\alpha_1$ ($= 10\,\Delta\alpha_1$) die Verbesserung von α_1 in Einheiten von $0^s\!.1$, $\Delta\delta_1$ dagegen die Verbesserung von δ_1 in Einheiten von $1''$ bedeutet:

$$\begin{aligned}(af) = \Sigma\,\text{Hel.} + \Sigma\,\text{Corr.} - 188''\!.631 &+ 0.245\,\Delta'\alpha_1 - 0.356\,\Delta'\alpha_2 + 0.118\,\Delta'\alpha_3 - 0.291\,\Delta'\alpha_4 + 0.590\,\Delta'\alpha_5 - 0.306\,\Delta'\alpha_6 \\ &+ 0.039\,\Delta\delta_1 - 0.067\,\Delta\delta_2 + 0.029\,\Delta\delta_3 - 0.087\,\Delta\delta_4 + 0.130\,\Delta\delta_5 - 0.044\,\Delta\delta_6\end{aligned}$$

Diese Gleichung reducirt die Summe der fünf Partialdistanzen $ab \ldots ef$ auf den uns noch unbekannten Werth (af) der Hauptdistanz. Auf den gleichen Werth (af) kann man ebenso jede andere Combination von Partialdistanzen,