

# ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

## N<sup>o</sup>. 621.

Erster Versuch zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen mit dem  
Heliometer, angestellt und berechnet von Dr. *Moritz Wichmann*.

(Fortsetzung von Nr. 619).

Da man nun also den beiden Differenzialgleichungen (10), wenn die rechte Seite derselben  $= 0$  gesetzt wird, durch die Annahme  $s = g \cos \mu t + g' \sin \mu t$ ,  $s' = h \sin \mu t + h' \cos \mu t$  genügen kann, so werden die vollständigen Integrale beider Gleichungen, wenn man die beiden Werthe von  $\mu$  durch  $\mu$  und  $\mu'$  bezeichnet:

$$s = g \cos \mu t + g' \sin \mu t + f \cos \mu' t + f' \sin \mu' t \quad \text{wo } k = \frac{(1-\alpha) m' \mu}{\alpha m'^2 - \mu^2} = \frac{4\beta m'^2 - \mu^2}{(1-\beta) m' \mu}$$

$$s' = (g \sin \mu t - g' \cos \mu t)k + (f \sin \mu' t - f' \cos \mu' t)k' \quad \text{,, } k' = \frac{(1-\alpha) m' \mu'}{\alpha m'^2 - \mu'^2} = \frac{4\beta m'^2 - \mu'^2}{(1-\beta) m' \mu'}$$

Setzt man ferner:  $g = b_0 \sin B_0$ ,  $f = c_0 \sin C_0$   
 $g' = b_0 \cos B_0$ ,  $f' = c_0 \cos C_0$

so erhält man:

$$s = b_0 \sin(\mu t + B_0) + c_0 \sin(\mu' t + C_0)$$

$$s' = -b_0 k \cos(\mu t + B_0) - c_0 k' \cos(\mu' t + C_0)$$

Entwickelt man noch die Werthe von  $\mu$  und  $\mu'$  nach  $\alpha$  und  $\beta$ , und vernachlässigt die Größen von zwei Dimensionen in Beziehung auf  $\alpha$  und  $\beta$ , so folgt:

$$\mu = \sqrt{z'} = m' (1 + \frac{3}{2}\beta), \quad \mu' = m' 2\sqrt{\alpha\beta};$$

woraus folgt:

$$k = -(1 - \frac{3}{2}\beta), \quad k' = 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Man erhält dann mit Vernachlässigung der Producte von  $g$ ,  $g'$ , in  $\alpha$ ,  $\beta$ ... die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} s &= b_0 \sin(B_0 + \mu t) + c_0 \sin(C_0 + \mu' t) = b_0 \sin(B_0 + (1 + \frac{3}{2}\beta) m' t) + c_0 \sin(C_0 + 2m' \sqrt{\alpha\beta} t) \\ s' &= b_0 \cos(B_0 + \mu t) - 2c_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(C_0 + \mu' t) = b_0 \cos(B_0 + (1 + \frac{3}{2}\beta) m' t) - 2c_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(C_0 + 2m' \sqrt{\alpha\beta} t) \end{aligned} \right\} \dots (11).$$

Anmerk. Ich habe mich bei dieser Entwicklung der von *Bessel* gebrauchten Bezeichnungen bedient; die Verschiedenheit der Zeichen des von mir gefundenen Ausdrucks für  $s'$  rührt daher, dafs in der Entwicklung *Bessels* die Zeichen von  $h$  und  $h'$  umzukehren sind.

### § 12.

Durch die Integration im vorigen § sind die von dem ursprünglichen Zustande der Drehung des Mondes herrührenden Schwankungen in den Werthen von  $s$  und  $s'$  gefunden, und, auf die 4 willkürlichen Constanten  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  reducirt, als Functionen dieser und der, vom Mondkörper abhängigen Größen  $\alpha$  und  $\beta$  dargestellt. Es ist nun nöthig, die von der Anziehung der Erde herrührenden Aenderungen von  $s$  und  $s'$  aufzusuchen.

Setzt man in den Gleichungen (10) die nicht constanten Ausdrücke der rechten Seite  $= -a' \cos \alpha$ , und  $a \sin \alpha$ , und für  $\frac{M}{\rho^2}$  den Näherungswerth  $m'^2$ , so erhält man:

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + (1-\alpha) m' \frac{ds}{dt} + s' m'^2 \alpha = 3 m'^2 \alpha a' \cos \alpha,$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - (1-\beta) m' \frac{ds'}{dt} + 4 \beta s m'^2 = 3 m'^2 \beta a \sin \alpha.$$

Man genügt diesen Gleichungen durch  $s = P \sin \alpha$ ,  $s' = P' \cos \alpha$ , und erhält dadurch:

$$P' \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - (1-\alpha) m' P \frac{d\alpha_i}{dt} - m'^2 \alpha P' + 3 m'^2 \alpha a_i = 0$$

$$P \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - (1-\beta) m' P' \frac{d\alpha_i}{dt} - 4 \beta m'^2 P + 3 m'^2 \beta a_i = 0$$

woraus folgt:

$$-P = 3 m'^2 \frac{\alpha a_i (1-\beta) m' \frac{d\alpha_i}{dt} + \beta a_i \left( \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - m'^2 \alpha \right)}{\left( \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - 4 \beta m'^2 \right) \left( \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - m'^2 \alpha \right) - (1-\alpha) (1-\beta) m'^2 \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2}$$

$$-P' = 3 m'^2 \frac{\alpha a_i \left( \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - 4 \beta m'^2 \right) + \beta a_i (1-\alpha) m' \frac{d\alpha_i}{dt}}{\left( \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - 4 \beta m'^2 \right) \left( \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 - m'^2 \alpha \right) - (1-\alpha) (1-\beta) m'^2 \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2}$$

Wenn also die rechtseitigen Ausdrücke der Gleichungen (10) die Form haben:

$$3 m'^2 \alpha \sin(v-\varphi) (s \cos(v-\varphi) + i \sin v) = -3 m'^2 \alpha [a_i' \cos \alpha_i + a_{ii}' \cos \alpha_{ii} + \dots]$$

$$3 m'^2 \beta \cos(v-\varphi) (s' \sin(v-\varphi) + i \sin v) = -3 m'^2 \beta [a_i \sin \alpha_i + a_{ii} \sin \alpha_{ii} + \dots]$$

so erhalten dadurch  $s$  und  $s'$  die Form:

$$s = P \sin \alpha_i + Q \sin \alpha_{ii} + \dots; \quad s' = P' \cos \alpha_i + Q' \cos \alpha_{ii} + \dots$$

wo  $P, Q, \dots P', Q' \dots$  Formen, wie die oben entwickelten Ausdrücke von  $P, P'$  haben. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen können wir nun die Integration der beiden Differenzialgleichungen successive ausführen.

### § 13.

Betrachtet man anfangs die Bewegung des Mondes um die Erde als kreisförmig, d. h. vernachlässigt man zuerst die Ungleichheiten seiner Bewegung, so wird dadurch der Winkel  $v-\varphi$ , welcher nach § 7 diese Ungleichheiten und die kleine Libration  $u$  enthält, da  $v-\varphi = \Sigma H \sin h - u$  war,  $= 0$  und man erhält also in diesem Falle die Gleichungen:

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + (1-\alpha) m' \frac{ds}{dt} + \alpha m'^2 s' = 0$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - (1-\beta) m' \frac{ds'}{dt} + 4 \beta m'^2 s = -3 m'^2 \beta (i \sin v)$$

Es ist aber  $-i \sin v$  nach § 6 nahezu die Breite des Mondes, wofür wir wieder sehr nahe  $i \sin(m-n)$  setzen können, wenn  $m$ , wie früher, die mittlere Länge des Mondes,  $n$  die seines aufst. Knotens bedeutet. Man hat also den Ausdruck der rechten Seite der zweiten Gleichung  $= 3 m'^2 \beta i \sin(m-n)$ . Um also hieraus die Werthe von  $P$  und  $P'$  in den Werthen von  $s$  und  $s'$  zu finden, hat man in den Formeln für  $P$  und  $P'$   $a_i' = 0$ ,  $a_i = i$ ,  $\alpha_i = (m-n)$  zu setzen. Es ist dann  $\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{d(m-n)}{dt} = m' - \frac{dn}{dt}$ ; das Glied  $\frac{dn}{dt}$  ist beträchtlich kleiner als  $m'$ , wegen der viel langsameren Bewegung der Knoten des Mondes. Setzt man  $\left( \frac{d(m-n)}{dt} \right)^2 = 1 + \tau = \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2$ , so kann man den Nenner der Ausdrücke von  $P$  und  $P'$  schreiben:

$$m'^4 (\tau - 3\beta\tau - \alpha\beta\tau - 3\beta(1-\alpha) + \tau^2) = m'^4 (1-\alpha) \left[ \left( \frac{1-\beta}{1-\alpha} + \beta \right) \tau - 3\beta \right] - 3\beta\tau + \tau^2$$

$$\text{Es ist aber: } A(1-\alpha) = B(1-\beta); \quad \frac{1-\beta}{1-\alpha} = \frac{A}{B}; \quad \beta = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}; \quad \text{also } \frac{1-\beta}{1-\alpha} + \beta = \frac{C}{B}.$$

Man erhält also mit Weglassung der beiden letzten sehr kleinen Glieder den Nenner  $= m'^4 (1-\alpha) \left( \frac{C}{B} \tau - 3\beta \right)$ , und demnach die Ausdrücke:

$$P = - \frac{3 i (1 + \tau - \alpha) \beta}{(1-\alpha) \left( \frac{C}{B} \tau - 3\beta \right)}; \quad P' = - \frac{3 \beta i (1-\alpha) \left( 1 + \frac{\tau}{2} \right)}{(1-\alpha) \left( \frac{C}{B} \tau - 3\beta \right)}$$

Es ist also sehr nahe:

$$P = P' = - \left( \frac{\frac{3\beta i}{C}}{\frac{C}{B} - 3\beta} \right) = - \left( \frac{3i(C-A)}{Cr - 3(C-A)} \right)$$

Setzt man der Kürze halber:

$$-p_o = \frac{3(C-A)}{Cr - 3(C-A)}, \text{ so ist } P = P' = p_o i$$

Also

$$s = \mathfrak{J} \sin \varphi = P \sin(m-n) = p_o i \sin(m-n)$$

$$s' = \mathfrak{J} \cos \varphi = P \cos(m-n) = p_o i \cos(m-n)$$

und, in Verbindung mit den Formeln (11)

$$\left. \begin{aligned} s &= b_o \sin(B_o + \mu t) + c_o \sin(C_o + \mu' t) + p_o i \sin(m-n) \\ s' &= b_o \cos(B_o + \mu t) - 2c_o \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(C_o + \mu' t) + p_o i \cos(m-n) \end{aligned} \right\} \dots (12).$$

#### § 14.

Die Formeln  $s = p_o i \sin(m-n)$  und  $s' = p_o i \cos(m-n)$  zeigen, daß, wenn der Mond sich gleichförmig in einem Kreise um die Erde bewegte, und keine von dem ursprünglichen Zustande herrührende Schwankungen vorhanden wären,  $\mathfrak{J} = \sqrt{s^2 + s'^2} = p_o i$ , also constant, und  $\tan \varphi = \frac{s}{s'} = \tan(m-n)$  sein müsste, also  $\varphi = m-n$ , oder  $m-n+180^\circ$ , je nachdem  $p_o$  positiv oder negativ ist. Im

ersten Falle fällt der niedersteigende Knoten des Mondäquator mit dem niedersteigenden, im zweiten mit dem aufsteigenden der Bahn zusammen. Den Beobachtungen zufolge findet nun das letztere Statt, es ist also  $p_o$  negativ, mithin  $C > A$ , woraus folgt, daß  $C$  das größte der 3 Trägheitsmomente des Mondes sein muß.

Sind aber die vom Anfang der Drehung herrührenden Schwankungen, mithin die Constanten  $b_o$  und  $c_o$  nicht  $= 0$ , so ist der mittlere Werth der Neigung  $\mathfrak{J} = \sqrt{p_o^2 i^2 + b_o^2 + \frac{c_o^2}{2} \left(1 + 4\frac{\beta}{\alpha}\right)}$ . Ferner ist dann:

$$\mathfrak{J} \sin(\varphi - (m-n)) = b_o \sin(B_o + \mu t + m-n) + c_o (\sin(C_o + \mu' t) \cos(m-n) + 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(C_o + \mu' t) \sin(m-n))$$

$$\mathfrak{J} \cos(\varphi - (m-n)) = p_o i + b_o \cos(B_o + \mu t + m-n) + c_o (\sin(C_o + \mu' t) \sin(m-n) - 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(C_o + \mu' t) \cos(m-n))$$

$$\text{Setzt man also: } c_i = c_o \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right); \quad c_n = c_o \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

$$\text{so wird } \tan(\varphi - (m-n)) = \frac{b_o \sin(B_o + \mu t - m + n) + c_i \sin(C_o + \mu' t + m-n) + c_n \sin(C_o + \mu' t - m + n)}{p_o i + b_o \cos(B_o + \mu t - m + n) - c_i \cos(C_o + \mu' t + m-n) + c_n \cos(C_o + \mu' t - m + n)}$$

Soll also die Differenz  $\varphi - (m-n)$  niemals  $90^\circ$  betragen, so darf der Nenner dieses Ausdruckes nie  $= 0$  werden, mithin muß  $p_o i > b_o + c_o$  sein, ohne Rücksicht auf die Zeichen von  $b_o$  und  $c_o$ . Da die Beobachtungen bisher jene Differenz als unmerklich erwiesen haben, so ist  $p_o i$  wahrscheinlich beträchtlich größer als  $b_o$  und  $c_o$ .

Aus dem Vorhergehenden geht also hervor, daß die beiden Knotenlinien nicht nur für den Anfang der Bewegung nahe zusammen fielen, sondern auch, daß sie beständig nahe bei einander bleiben müssen; ferner, daß die Neigung des Mondäquator gegen die Ekliptik sehr nahe constant, und  $-p_o i$  ein sehr genäherter Werth der mittleren Gröfse derselben sein muß, so wie, daß die beiden Phänomene, die Unveränderlichkeit der Neigung und das Zusammenfallen der

Knotenlinien der Bahn und des Aequator, mit einander eng verbunden sind, und aus derselben Ursache hervorgehen.

#### § 15.

Es bleibt uns nun noch übrig, die Störungen der eben aufgestellten Gesetze zu entwickeln, welche von der elliptischen Bewegung des Mondes um die Erde herrühren. Die dadurch in den Ausdrücken von  $s$  und  $s'$  entstehenden Glieder sind in Beziehung auf die Neigung und Excentricität der Mondbahn, und Neigung des Mondäquator von der zweiten Ordnung. *Lagrange* vernachlässigte sie deshalb; *Poisson* gab zuerst die Formeln dafür ohne Entwicklung (Conn. des Temps 1821), und *Laplace* entwickelte sie später im 5<sup>ten</sup>

Bande der Mécan. Céleste, jedoch nur ganz kurz. Ich werde sie deshalb hier ausführlicher ableiten.

Zu diesem Zwecke wollen wir wieder die rechte Seite der Gleichungen 9 betrachten. Der Winkel  $(v-\varphi)$  enthält die Ungleichheiten des Mondes in Länge, unter denen die beträchtlichste, die Mittelpunkts-Gleichung, bekanntlich die Form  $2\varepsilon \sin(m-\pi)$  hat, wenn man das Quadrat der Excentricität  $\varepsilon$

vernachlässigt. Wir können demnach  $\sin(v-\varphi) = 2\varepsilon \sin(m-\pi)$ ,  $\cos(v-\varphi) = 1$  setzen. Es ist ferner  $v$ , die Länge der Erde vom Monde gesehn, gezählt vom niedersteigenden Knoten des Aequator, wenn man diesen als mit dem aufsteigenden der Bahn zusammenfallend ansieht,  $= m + \Sigma H \sin h - n + 180^\circ = m + 2\varepsilon \sin(m-\pi) - n + 180^\circ$ . Es ist also:

$$\begin{aligned} \sin v &= -\sin(m-n) - \cos(n-n) 2\varepsilon \sin(m-\pi) \\ (\mathfrak{J}+i) \sin v &= -(\mathfrak{J}+i) \sin(m-n) - 2\varepsilon (\mathfrak{J}+i) \cos(m-n) \sin(m-\pi). \end{aligned}$$

Ferner ist nach § 7  $\frac{M}{\rho^3} = m'^2 (1 + 3\varepsilon \cos(m-\pi))$ . Man erhält also bei Vernachlässigung der Glieder, welche in Beziehung auf  $\varepsilon$  und  $(\mathfrak{J}+i)$  die zweite Dimension überschreiten,

$$\begin{aligned} -3\alpha \frac{M}{\rho^3} \sin(v-\varphi) \sin v (\mathfrak{J}+i) &= 3\alpha m'^2 (\mathfrak{J}+i) \varepsilon 2 \sin(m-\pi) \sin(m-n) \\ -3\beta \frac{M}{\rho^3} \cos(v-\varphi) \sin v (\mathfrak{J}+i) &= 3\beta m'^2 (\mathfrak{J}+i) [\sin(m-n) + 2\varepsilon \cos(m-n) \sin(m-\pi) + 3\varepsilon \sin(m-n) \cos(m-\pi)] \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite der zweiten Gleichung ist schon bei der Integration in § 13 vorgekommen; es rührt von der Breite des Mondes her, unter deren Ungleichheiten noch eine von der Form  $\frac{1}{2} k \varepsilon i \sin(\pi-n)$ \*) vorhanden ist, welche also hier nicht weggelassen werden darf. Ferner ist

$$\begin{aligned} \sin(m-\pi) \sin(m-n) &= \frac{1}{2} \cos(\pi-n) - \frac{1}{2} \cos[2m-(\pi+n)] \\ \cos(m-\pi) \sin(m-n) &= \frac{1}{2} \sin(\pi-n) + \frac{1}{2} \sin[2m-(\pi+n)] \end{aligned}$$

Behalten wir also auf der rechten Seite der Differenzialgleichungen nur die Glieder bei, welche in Beziehung auf  $(\mathfrak{J}+i)$  und  $\varepsilon$  von der zweiten Ordnung sind, so werden jene Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s'}{dt^2} + (1-\alpha) m' \frac{ds}{dt} + s' \alpha m'^2 &= 3\alpha m'^2 (\mathfrak{J}+i) \varepsilon [\cos(\pi-n) - \cos(2m-\pi-n)] \\ \frac{d^2 s}{dt^2} - (1-\beta) m' \frac{ds'}{dt} + s \beta m'^2 &= 3\beta m'^2 (\mathfrak{J}+i) \varepsilon [\frac{1}{2} \sin(\pi-n) + \frac{1}{2} \sin(2m-\pi-n)] + 3\beta m'^2 \frac{1}{2} k \varepsilon i \sin(\pi-n) \end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichungen haben wieder ganz die nämliche Form, wie die in § 12 betrachteten; setzen wir also in den dort entwickelten Ausdrücken von  $P$  und  $P'$ ,  $\alpha' = (\mathfrak{J}+i)\varepsilon$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon(\mathfrak{J}+i(1+k))$ , und  $\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{d(\pi-n)}{dt} = m'k$ , so erhält man:

$$-P = \frac{3\alpha\alpha'(1-\beta)k + 3\beta\alpha(k^2-\alpha)}{(k^2-\beta)(k^2-\alpha) - (1-\alpha-\beta+\alpha\beta)k^2}; \quad -P' = \frac{3\alpha\alpha'(k^2-\beta) + \beta\alpha(1-\alpha)k}{(k^2-\beta)(k^2-\alpha) - (1-\alpha-\beta+\alpha\beta)k^2}.$$

Für den vorliegenden Fall ist aber  $k$ , wegen der sehr langsamen Aenderung des Mondknotens und des Perigäum der Bahn in Verhältniß zur Bewegung des Mondes  $m'$ , eine sehr kleine Gröfse, so dafs man ihr Quadrat und ihre Producte in  $\alpha$  und  $\beta$ , desgleichen auch  $\alpha\beta$ , ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, vernachlässigen kann. Man erhält dann:

$$P = \frac{3\alpha\alpha'k}{k^2} = \frac{3\alpha(\mathfrak{J}+i)\varepsilon}{k}; \quad P' = \frac{3\beta\alpha k}{k^2} = \frac{3\beta(\mathfrak{J}+i+ik)\varepsilon}{k}$$

Für die von dem Winkel  $(2m-\pi-n)$  abhängigen Glieder in  $s$  und  $s'$  würden  $P$  und  $P'$  so klein werden, dafs man sie sogleich ganz fortlassen kann; denn in diesem Falle ist  $\frac{d(2m-\pi-n)}{m}$  sehr nahe  $= 2$ , also viel zu grofs, um den Werthen von  $P$  und  $P'$  eine, hier beträchtliche Gröfse geben zu können.

Es sind demnach mit Rücksicht auf die Formeln (12), die vollständigen Ausdrücke von  $s$  und  $s'$ , wie wir sie jetzt gefunden haben, folgende:

$$\left. \begin{aligned} s &= b_0 \sin(B_0 + \mu t) + c_0 \sin(C_0 + \mu' t) + p_0 i \sin(m-n) + 3\alpha \frac{(\mathfrak{J}+i)\varepsilon}{k} \sin(\pi-n) \\ s' &= b_0 \cos(B_0 + \mu t) - 2c_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(C_0 + \mu' t) + p_0 i \cos(m-n) + 3\beta \frac{(\mathfrak{J}+i+ik)\varepsilon}{2k} \cos(\pi-n) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

\*) Conn. des Temps 1821 p. 224.

Dies sind die vollständigen Formeln von  $s$  und  $s'$ , wie die Theorie sie geliefert hat; es bleibt nur noch übrig, sie numerisch zu entwickeln, was ich jetzt thun werde.

## § 16.

Wir haben in § 13 gesehen, daß  $-p_0 i = \frac{3(C-A)i}{Cr-3(C-A)}$  ein sehr genäherter Werth der mittleren Neigung des Mond-äquator ist. Da nun *Nicollet's* Rechnungen den letzteren  $= 1^\circ 28' 45'' = 5325''$  ergaben, und die Neigung der Mondbahn  $i = 5^\circ 8' 44'' = 18524''$  ist, so folgt daraus:

$$-p_0 = \frac{3(C-A)}{Cr-3(C-A)} = \frac{\mathfrak{J}}{i} = \frac{I}{i} = \frac{5325}{18524} = 0,28746$$

hieraus ergibt sich:  $3\left(\frac{C-A}{C}\right) = \tau\left(\frac{p_0}{p_0-1}\right) = \tau \cdot 0,2233$ , und da  $\tau = \left(\frac{d(m-n)}{dm}\right)^2 - 1$ , und  $\frac{dn}{dm} = -0,004022$ , also  $\tau = +0,008044$ , so erhält man:  $3\left(\frac{C-A}{C}\right) = 0,001796$ ,  $\left(\frac{C-A}{C}\right) = 0,000599$ .

Setzt man  $\frac{C-A}{C} = e$ ,  $\frac{C-B}{C} = e'$  also  $A = C(1-e)$ ,  $B = C(1-e')$ , so folgt, wenn  $\frac{C-A}{B} = \beta$ ,  $\frac{C-B}{A} = \alpha$ ,  $e = \beta - \beta\alpha - \beta^2\alpha - \dots$ ;  $e' = \alpha - \beta\alpha - \beta\alpha^2 - \dots$ .

Vernachlässigt man also die Glieder zweiter und höherer Dimensionen in Beziehung auf  $\alpha$  und  $\beta$ , so hat man  $\beta = e = 0,000599$ ; setzt man alsdann  $\alpha = \beta f = ef = e'$ , wo also  $f$  eine positive Zahl,  $< 1$  ist, da  $C-A > C-B$ , so ist  $\gamma = \beta(1-f)$ .

Es ist ferner für die von  $(\pi-n)$  abhängigen Glieder in  $s$  und  $s'$ ,  $k = \frac{d(\pi-n)}{dm} = +0,012474$ , und da  $\varepsilon = 0,05486$ , so ist  $3\beta \frac{e i}{k} = 146''3$ . In der zur Breite des Mondes gehörigen Ungleichheit  $\frac{1}{2} k \varepsilon i \sin(m-\pi)$  ist  $k = +0,0391$ ; also  $(\mathfrak{J}+i) = i(1-p_0) = i \cdot 1,2875$ ;  $\mathfrak{J}+i+ik = i(1+k-p_0) = i \cdot 1,3266$ . Die beiden letzten Glieder der Ausdrücke von  $s$  und  $s'$  werden dann:

$$\begin{aligned} & -5325'' \sin(m-n) + 188''4 f \sin(\pi-n) \\ & -5325'' \cos(m-n) + 97,0 \cos(\pi-n) \end{aligned}$$

Es ist ferner  $\mu = (1+\frac{3}{2}\beta)m' = m' (1,000898)$ , also, da  $m' = 47434''9$ , so ist  $\mu = 47477''5$ ,  $\mu' = 2m'\beta\sqrt{f} = 56''8\sqrt{f}$ . Setzt man ebenso in dem Ausdrucke von  $u$  (Formel 8) für  $\gamma$  den eben gegebenen Werth,  $\gamma = \beta(1-f)$ , so folgt für  $a_s \sin(A_0 + rt)$   $r = 2010''2 \cdot \sqrt{1-f}$ . Man erhält also für  $u$ ,  $s$ ,  $s'$  folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_s \sin(A_0 + t \cdot 2010''2 \sqrt{1-f}) + \frac{311''7(1-f)}{1+0,4727f} \sin(anom. \odot) - 41''5(1-f) \sin(m-\pi) \\ s &= -5325'' \sin(m-n) + 188''4 f \sin(\pi-n) + b_s \sin(B_0 + t \cdot 47477''5) + c_s \sin(C_0 + t \cdot 56''8 \sqrt{f}) \\ s' &= -5325'' \sin(m-n) + 97,0 \cos(\pi-n) + b_s \cos(B_0 + t \cdot 47477,5) - 2c_s \sqrt{\frac{1}{f}} \cos(C_0 + t \cdot 56''8 \sqrt{f}) \end{aligned} \right\} \dots (14).$$

## § 17.

Es bleibt nun noch übrig, aus diesen Formeln die Ausdrücke für die in § 3 eingeführten Größen  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$  abzuleiten, und durch Substitution derselben in (3) diejenigen Formeln aufzustellen, welche die Mittel zur Vergleichung von Beobachtungen mit der Theorie darbieten. Es ist nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} s &= \mathfrak{J} \sin \varphi = (I + \omega'') \sin(m-n+180+\omega') = -(I + \omega'') \sin(m-n+\omega') \\ s' &= \mathfrak{J} \cos \varphi = (I + \omega'') \cos(m-n+180+\omega') = -(I + \omega'') \cos(m-n+\omega') \\ u &= \omega + \omega' \end{aligned}$$

Vernachlässigt man also die Glieder zweiter Ordnung in Beziehung auf  $\omega$  und  $\omega'$ , so folgt:

$$\begin{aligned} (I + \omega'') \cos \omega' &= I + \omega'' = -s \sin(m-n) - s' \cos(m-n) \\ (I + \omega'') \sin \omega' &= (I + \omega'') \omega' = -s \cos(m-n) + s' \sin(m-n) = I\omega' \text{ oder auch } = \sin I\omega' \end{aligned}$$

Da nun  $I = 5325''$  gesetzt ist, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \omega'' &= -188''4 f \sin(m-n) \sin(\pi-n) - 97''0 \cos(m-n) \cos(\pi-n) - b_0 \cos(m-n-B_0-\mu t) \\ &\quad - c_0 \sin(m-n) \sin(\mu t + C_0) + \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \cos(m-n) \cos(C_0 + \mu t) \\ \sin I \omega' &= -188''4 f \cos(m-n) \sin(\pi-n) + 97''0 \sin(m-n) \cos(\pi-n) + b_0 \sin(m-n-B_0-\mu t) \\ &\quad - c_0 \cos(m-n) \sin(C_0 + \mu t) - \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \sin(m-n) \cos(C_0 + \mu t) \\ \omega &= u - \omega' = \frac{311,7(1-f)}{1+0,4727f} \sin \odot - 41''5(1-f) \sin(m-\pi) + a_0 \sin(A_0 + rt) - \omega' \end{aligned} \right\} \dots (15).$$

Um  $\omega'$  allein in Secunden ausgedrückt zu erhalten, müsste man also rechts mit  $\frac{1}{\sin I} = 38,74$  multipliciren. Nach § 3. ist nun der Einfluss der Libration auf die selenocentrische Breite eines Punktes der Oberfläche  $-(b) \omega' - (c) \omega'' = -\cos(l-n) \sin I \omega' - \sin(l-n) \omega'' = +188''4 f \cos(m-l) \sin(\pi-n) - 97''0 \sin(m-l) \cos(\pi-n) + b_0 \sin(B_0 + \mu t + l-m) + c_0 \cos(m-l) \sin(C_0 + \mu t) + \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \sin(m-l) \cos(C_0 + \mu t)$

Ebenso der Einfluss auf die selenocentrische Länge  $= (a) \omega' + (d) \omega'' + \cos b \omega = ((a) - \cos b) \omega' + \cos b u + (d) \omega''$ ; es ist aber  $(a) = \cos I \cos b - \sin I \sin b \sin(l-n)$ , also mit Vernachlässigung von  $I^2$  ist  $((a) - \cos b) = -\sin b \sin I \sin(l-n)$  und da  $(d) = \sin b \cos(l-n)$ , so ist,  $\cos b u + ((a) - \cos b) \omega' + (d) \omega'' = \cos b u - \sin b (\sin(l-n) \sin I \omega' - \cos(l-n) \omega'') = \cos b u - \sin b [188''4 f \sin(m-l) \sin(\pi-n) + 97''0 \cos(m-l) \cos(\pi-n) + b_0 \cos(B_0 + \mu t + l-m) + c_0 \sin(C_0 + \mu t) \sin(m-l) - \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \cos(C_0 + \mu t) \cos(m-l)]$

Man erhält demnach für die Formeln (3) folgende vollständige Ausdrücke: \*)

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \Delta b &= -97''0 \sin(m-l) \cos(\pi-n) + [\cos I \cos b - \sin I \sin b \sin(l-n)] \frac{d\beta}{\cos \beta} - \sin I \cos(l-n) d\lambda - \sin(l-n) dI \\ &\quad + 188,4 f \cos(m-l) \sin(\pi-n) + b_0 \sin(B_0 + \mu t) - m + l + c_0 \cos(m-l) \sin(C_0 + \mu t) + \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \sin(m-l) \cos(C_0 + \mu t) \\ \cos b \Delta l &= -97''0 \cos(m-l) \cos(\pi-n) \sin b + \sin I \cos(l-n) \frac{d\beta}{\cos \beta} + (\cos I \cos b - \sin I \sin b \sin(l-n)) d\lambda + \sin b \cos(l-n) dI \\ &\quad + \cos b \left[ \frac{311,7(1-f)}{1+0,4727f} \sin \odot - 41''5(1-f) \sin(m-\pi) + a_0 \sin(A_0 + rt) \right] \\ &\quad + \sin b [-188,4 f \sin(m-l) \sin(\pi-n) - b_0 \cos(B_0 + \mu t) - m + l - c_0 \sin(m-l) \sin(C_0 + \mu t) + \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \cos(m-l) \cos(C_0 + \mu t)] \end{aligned} \right.$$

in welchen Formeln  $\mu = 47477''5$ ,  $\mu' = 56''8 \sqrt{f}$ , und  $r = 2010''2 \sqrt{1-f}$  ist.

Anmerk. Diese Formeln weichen, außer den schon erwähnten Verschiedenheiten der Zeichen einiger Glieder, von *Bessels* Formeln, wenn auch nur wenig, ab. Dieser Unterschied rührt daher, daß die von *Bessel* aufgestellte Gleichung:  $\sin I(N-n+180^\circ) = s \cos(m-n) - s' \sin(m-n)$  (Astr. Nachr. Nr. 376 pag. 267) nur richtig ist, wenn man  $u = 0$ , oder  $\omega = -\omega'$  setzt. (Siehe *Poissons* Abhandlung Conn. des Temps 1821 pag. 227).

### § 18.

Es wird nicht überflüssig sein, noch einige Bemerkungen hinzuzufügen. Die Größe  $\omega'$ , und mithin auch  $\omega$ , können wegen der Kleinheit von  $I$  eine beträchtlichere Größe erlangen; es wird z. B. das Glied in  $\omega'$   $97''0 \sin(m-n) \cos(\pi-n) \operatorname{cosec} I = 3759''6 \sin(m-n) \cos(\pi-n)$ , so daß  $\omega'$  jedenfalls mehr als einen Grad betragen kann; ebenso  $\omega$ . Aber die Summe derselben  $u = \omega + \omega'$ , die eigentliche Libration in Länge, ist deshalb doch stets sehr gering, weil die Größe, welche  $\omega$  und  $\omega'$  erreichen können, von der Kleinheit des Winkels  $I$  herrührt, da die Aenderung desselben,  $\omega''$ , in  $\omega$  das Glied  $\frac{\tan(m-n)}{\sin I} \omega''$ , in  $\omega'$  das Glied  $-\frac{\tan(m-n)}{\sin I} \omega''$  erzeugt, welche also aus der Libration  $u$  verschwinden müssen, da sie nicht durch die Natur der Rotation, sondern nur durch die Beziehung derselben auf die Ekliptik hervorgerufen sind.

Für die Anwendung der Berechnung des selenocentrischen Ortes eines dem Mondäquator sehr nahe liegenden Fleckens lassen sich noch einfachere Formeln aufstellen. Es ist nämlich den Formeln (1) gemäß:

\*)  $\beta$  bedeutet hier wieder wie in § 2 die selenographische Breite von  $O$ .

$$\begin{aligned}\cos b \cos(l-n-\omega) &= -\cos\beta \cos(\lambda+m-n+\omega') \\ \cos b \sin(l-n-\omega) &= \sin\beta \sin(I+\omega'') - \cos\beta \cos(I+\omega'') \sin(\lambda+m-n+\omega') \\ \cos b &= \sin\beta \cos(I+\omega'') + \cos\beta \sin(I+\omega'') \sin(\lambda+m-n+\omega')\end{aligned}$$

Vernachlässigt man  $I^2$  und die Glieder zweiter Ordnung in Beziehung auf  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$ , so folgt:

$$\begin{aligned}\cos b \cos(l-\omega) &= -\cos\beta \cos(\lambda+m+\omega') - \sin n \sin\beta (I+\omega'') \\ \cos b \sin(l-\omega) &= -\cos\beta \sin(\lambda+m+\omega') + \cos n \sin\beta (I+\omega'') \\ \sin b &= \sin\beta + \cos\beta \sin(\lambda+m-n+\omega') (I+\omega'').\end{aligned}$$

Mithin, wenn  $\beta$  nicht groß ist, erhält man:

$$\begin{aligned}l &= m + \lambda + 180^\circ - \cos(\lambda+m-n) \tan\beta I + u - \cos(\lambda+m-n) \tan\beta \omega'' + \sin(\lambda+m-n) \tan\beta I \omega' \\ b &= \beta + \cos\beta \sin(\lambda+m-n) I + \cos\beta \sin(\lambda+m-n) \omega'' + \cos\beta \cos(\lambda+m-n) I \omega'\end{aligned}$$

Also mit Rücksicht auf die Formeln (15) erhält man:

$$\begin{aligned}l &= m + \lambda + 180^\circ - \cos(\lambda+m-n) \tan\beta I + u - \tan\beta [188''4 f \sin\lambda \sin(\pi-n) - 97''0 \cos\lambda \cos(\pi-n) - b_0 \cos(B_0 + \mu t + \lambda) \\ &\quad \dots\dots\dots + c_0 \sin\lambda \sin(C_0 + \mu' t) + \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \cos\lambda \cos(C_0 + \mu' t)] \\ b &= \beta + \cos\beta \sin(\lambda+m-n) I + \cos\beta [-188''4 f \cos\lambda \sin(\pi-n) - 97''0 \sin\lambda \cos(\pi-n) - b_0 \sin(B_0 + \mu t + \lambda) \\ &\quad \dots\dots\dots - c_0 \cos\lambda \sin(C_0 + \mu' t) + \frac{2c_0}{\sqrt{f}} \sin\lambda \cos(C_0 + \mu' t)]\end{aligned} \quad (17).$$

Diese Formeln können stets zur Berechnung des selenocentrischen Ortes angewandt werden, so lange die Breite  $\beta$  nicht beträchtlich ist. Man sieht, daß die darin enthaltenen, von der physischen Libration herrührenden Glieder im Wesentlichen mit den in den Formeln (16) enthaltenen übereinstimmen, wenn man in jenen  $m-l = 180 - \lambda$ , oder  $l-m = 180 + \lambda$  setzt, also  $\sin(m-l) = \sin\lambda$ ,  $\cos(m-l) = -\cos\lambda$ .

#### § 19.

Die Kenntniß der physischen Libration reducirt sich also auf die Kenntniß der 7 Constanten  $a_0$ ,  $A_0$ ,  $b_0$ ,  $B_0$ ,  $c_0$ ,  $C_0$  und  $f$ . Ist man im Stande, aus gemachten Beobachtungen die entsprechenden Werthe von  $l$  und  $b$  eines Punktes der Mondoberfläche abzuleiten, so wird man diese mit den, unter Annahme der Richtigkeit der *Cassinischen* Hypothese, aus genäherten Werthen von  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $I$  berechneten mittleren selenocentrischen Oertern vergleichen können. Die sich zeigenden Abweichungen müssen dann theils der Wirkung der physischen Libration, theils den, den Werthen von  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $I$ , hinzuzufügenden Correctionen  $d\lambda$ ,  $d\beta$ ,  $dI$ , theils den Beobachtungs-

fehlern zugeschrieben werden. Jede Beobachtung liefert dann eine Längen- und eine Breitenbedingungs-Gleichung, so daß man aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen die 10 unbekannten Größen  $d\beta$ ,  $d\lambda$ ,  $dI$ ,  $a_0$ ,  $A_0$ ,  $b_0$ ,  $B_0$ ,  $c_0$ ,  $C_0$ ,  $f$  nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen im Stande ist. Umfassen die Beobachtungen einen nicht großen Zeitraum, so kann man die Constanten  $c$  und  $C$  anfangs ganz ausschließen, da wegen der Kleinheit von  $\mu' = 56''8 \sqrt{f}$  die Periode der dieselben enthaltenden Glieder sehr lang, mindestens 63 Jahr, ist, so daß der Einfluß derselben nur die Werthe von  $d\lambda$  und  $d\beta$  mit der Zeit ändert.

#### § 20.

Nachdem ich nun die Theorie der Libration im Vorhergehenden vollständig zusammengestellt habe, will ich, bevor ich meine eigenen Beobachtungen und Rechnungen vorlege, kurz anführen, wie weit man bisher durch Beobachtungen der Theorie zu folgen gesucht hat. Der schon oben erwähnte Versuch von *Nicollet* (Conn. des Temps 1821 und 1823) ist, meines Wissens der einzige bisher angestellte. Seine Resultate beruhen auf 174 theils von *Arago* und *Bouvard*, theils von ihm selbst an einer parallactischen Maschine gemachten Beobachtungen des Fleckens Manilius. Jede derselben giebt 2 Gleichungen, welche, in die von mir gebrauchten Bezeichnungen übertragen, folgende sind.

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \sin b + \cos b \sin(l-n) I + P \Delta h \\ \lambda &= l - m - 180 - \tan\beta \cos(l-n) I + u + P' \Delta h\end{aligned}$$

$\Delta h$  bezeichnet eine Correction des von ihm zur Reduction der Beobachtungen gebrauchten Mondhalbmessers, deren Coefficienten  $P$ ,  $P'$ , er durch doppelte Reduction mit verschiedenen Werthen des Halbmessers bestimmte;  $u$  setzte *Nicollet*  $= \mu \sin(\text{anom. } \odot)$ ; er vernachlässigte also alle von der physischen Libration herrührenden Glieder, bis auf das größte im Ausdruck von  $u$ . Aus den 348 auf diese Art erhaltenen Gleichungen fand *Nicollet*:  $I = 1^\circ 28' 45''$ ,  $\mu = 4' 49'' 7$ . Aus der letzten Zahl folgt nach § 9

$$\frac{B-A}{C} = 0,000564, \text{ und, in Verbindung mit } \frac{C-A}{C} = 0,000599, \text{ folgt } \frac{C-B}{C} = 0,000035$$

also  $f$  etwa  $= \frac{1}{18}$ . Vergleicht man aber die, aus jeder einzelnen Beobachtung hervorgehenden Werthe von  $\lambda$  und  $\beta$  mit dem letzten wahrscheinlichsten, so findet man die Abweichun-

gen derselben, welche nicht selten 20' übersteigen, so beträchtlich, daß man der kleinen GröÙe  $\mu$ , welche  $< 5'$ , unmöglich einige Sicherheit zuschreiben kann.

#### § 21.

Ich gehe nun zu dem zweiten Theil über, in welchem ich meine Beobachtungen und die daraus gezogenen Resultate vorlegen will.

Die diesem Versuch zur Bestimmung der physischen Libration zu Grunde liegenden Beobachtungen sind 50 von mir, das Jahr 1845 umfassende, mit dem Heliometer der Königsberger Sternwarte angestellt. Da diese von einer früheren, von *Schlüter* angestellten, größeren Reihe von Beobachtungen durch einen längeren Zeitraum getrennt waren, und da, wie aus der vorangehenden Theorie ersichtlich, die Annäherung an die Wahrheit hier nur successive geschehen kann, es auch nicht einmal rathsam schien, alle bisher gemachten Beobachtungen zu einem Resultate zu vereinigen, vielmehr zuerst einen Theil derselben wo möglich zu erschöpfen, so wählte ich zu diesem ersten Schritt die von mir gemachten Beobachtungen, theils aus Vorliebe, die man stets für die eigenen Beobachtungen hegt, theils weil das Verfolgen derselben bis zum Resultate, und die damit verbundene Einsicht in alle wesentlichen Forderungen, denen sie genügen sollen, die besten Mittel und Wege zur Vervollkommenung derselben, durch Aufdecken ihrer Mängel, liefert. Die Aufgabe, die ich mir demnach bei vorliegender Arbeit stellte, war, aus meinen Beobachtungen auf dem, von *Bessel* gezeichneten

Wege, Werthe für die, die physische Libration bedingenden Constanten abzuleiten; um dabei jede nicht gehörig begründete Willkühr zu vermeiden, habe ich keine der in jenem Zeitraume gemachten vollständigen Beobachtungen ausgeschlossen, sondern jede derselben als ein isolirtes für sich bestehendes Ganze bis zum Resultate auf gleiche Art fortgeführt, und aus allen, ohne auf den scheinbar größeren oder geringeren Werth der einzelnen Beobachtungen Rücksicht zu nehmen, die wahrscheinlichsten Werthe jener Constanten bestimmt. Obgleich dadurch die Sicherheit der für jene gefundenen Zahlenwerthe beeinträchtigt werden kann, so war doch eine Prüfung des Weges, auf welchem man zum Resultat gelangt, welche durch eine möglichst allgemeine Behandlung aller Beobachtungen am besten erreicht werden konnte, für diese, den späteren Arbeiten als Grundlage oder Vorarbeit dienende Untersuchung mindestens eben so wichtig, als die Auffindung der Werthe der Constanten selbst, da es für die weitere Befolgung dieser Methode nothwendig ist, ein Urtheil über die Gränze der Unsicherheit der Beobachtungen und deren Tauglichkeit zur Bestimmung der Libration, so wie über die Schwierigkeiten zu erlangen, welche sich hier der Lösung des Problems überhaupt von verschiedenen Seiten entgegenstellen.

(Fortsetzung folgt).

#### B e f ö r d e r u n g.

Herr Director *Koller*, der bisher der Sternwarte in Kremsmünster vorstand, ist am 30<sup>ten</sup> October nach Wien als Director der philosophischen Studien, Präses der philosophischen Facultät der Wiener Universität, und Referent über die philosophischen Studien-Anstalten des Kaiserreichs bei der obersten Studien-Hofstelle mit dem Titel und Range eines wirklichen K. K. Regierungsrathes berufen. Wer das Glück hat

den Herrn Regierungsrath näher zu kennen, wird mit lebhafter Freude diese hohe und einflußreiche Stelle durch einen Gelehrten besetzt sehen, bei dem Kopf und Herz sich um den Vorrang streiten.

Sein würdiger Nachfolger an der Sternwarte des Stifts ist Herr Professor *Reslhuber*.

S.