Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Die folgenden Blätter enthalten einige Ergänzungen zu den Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, die ich im 58. Bande dieser Annalen veröffentlicht habe. Ich zitiere diese Abhandlung mit U. und behalte die dort benutzten Bezeichnungen bei.

§ 1.

Hilfssätze über trigonometrische Funktionen.

Aus der elementaren Formel

$$\sum_{\nu}^{1,n} \cos \nu x = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

folgt durch Integration

$$S_n = \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \frac{x}{2}$$

$$= \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx + \int_0^x F(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx - \frac{x}{2},$$

wobei die Größe

$$F(x) = \frac{x - 2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}},$$

auch wenn man $x = 0$ setzt, endlich ist und, solange x nicht den Wert 2π erreicht, endlich bleibt; die Ableitung $F'(x)$ hat dieselben Eigenschaften. Man findet daher, indem man partiell integriert,

$$\int_0^x F(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = -\left.\frac{F(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}\right|_0^x + \int_0^x \frac{F'(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}\,dx;$$

diese Größe nähert ich offenbar der Grenze Null an, wenn n über alle Grenzen wächst. Da ferner

$$\int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\,du$$

gesetzt werden kann, und das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$

einen endlichen Wert hat, so bleiben in dem für S_n aufgestellten Ausdruck alle Glieder dem absoluten Werte nach unter festen, endlichen, von n unabhängigen Grenzen, solange x auf ein Intervall beschränkt bleibt, das zwischen -2π und $+2\pi$ liegt, ohne diese Größen selbst zu erreichen; dasselbe gilt daher von der Größe S_n unter der Voraussetzung

$$2\pi - c \geqq x \geqq -2\pi + c_1,$$

wenn wir von jetzt an durch $c, c_1, \cdots$ positive Konstante bezeichnen, die beliebig klein gewählt werden können.

Da nun aber die Werte von S_n auf den Strecken von $2\pi - c$ bis 2π und von $-2\pi + c_1$ bis -2π entgegengesetzt denen sind, die auf den Strecken von 0 bis c und von 0 bis $-c_1$ angenommen werden, so liegt S_n, wenn x ein festes, beliebig begrenztes reelles Intervall durchläuft, zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen.

Dies Resultat überträgt sich sofort auf die Reihe

$$T_n = \sum_\nu^{1,n} \frac{(-1)^\nu \sin \nu x}{\nu},$$

die aus $-S_n$ hervorgeht, indem man x durch $\pi - x$ ersetzt, und ebenso auf den Ausdruck

$$\frac{1}{2}(S_n - T_n) = \sum_\nu^{0,n} \frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1};$$

endlich von diesem, indem man $\frac{x}{2}$ für x setzt, auf die Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n} \frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x}{\nu+\frac{1}{2}}.$$

Eine zweite Eigenschaft der betrachteten Reihen ergibt sich, wenn man voraussetzt

$$c_1 \leqq x \leqq 2\pi - c.$$

Dann konvergiert nämlich der in der Summe S_n vorkommende Ausdruck

$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\, du$$

gleichmäßig gegen seine Grenze $\frac{\pi}{2}$, der er für alle bezeichneten Werte von x so nahe liegt wie man will, sobald n hinreichend groß geworden ist. Ähnliches gilt von dem Integral

$$\int_0^x F(x) \sin nx\, dx,$$

das sich, wie die oben durchgeführte partielle Integration zeigt, der Grenze Null gleichmäßig bezüglich der Variablen x annähert, wenn diese eine Strecke durchläuft, auf der $F(x)$ zwischen festen, endlichen Grenzen bleibt. Hiermit ist gezeigt, daß auch die Summe S_n auf der Strecke von $x = c_1$ bis $x = 2\pi - c$, wenn $n = \infty$ wird, gleichmäßig gegen ihre Grenze konvergiert; diese hat den Wert

$$S_\infty = \frac{\pi - x}{2}.$$

Da ferner die für x geforderte Ungleichung ergibt

$$\pi - c_1 \geqq \pi - x \geqq -\pi + c,$$

so hat die Reihe T_n die soeben für S_n abgeleitete Eigenschaft bei der Annahme

$$\pi - c_1 \geqq x \geqq -\pi + c,$$

und die oben angegebene Beziehung zwischen S_n und T_n führt zu dem Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} T_n = T_\infty = -\frac{x}{2}.$$

Die beiden Reihen

$$S_\infty = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \qquad T_\infty = \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-1)^\nu \sin \nu x}{\nu}$$

konvergieren also auf der Strecke

$$c \leqq x \leqq \pi - c_1$$

gleichmäßig, ebenso die Differenz $S_\infty - T_\infty$. Ersetzt man in dieser x durch $\frac{x}{2}$, so sieht man, daß die Reihe

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x}{\nu + \frac{1}{2}}$$

auf der Strecke

$$2c \leqq x \leqq 2\pi - 2c_1$$

gleichmäßig konvergiert. Da nun die Größen c und c_1 ihrer Definition nach in gewissen Grenzen unbestimmt sind, kann man auch sagen, daß beide Summen

$$S_n = \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \qquad \sum_{\nu}^{0,n} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x}{\nu + \frac{1}{2}}$$

auf der Strecke

$$c \leqq x \leqq 2\pi - c_1$$

bei unbegrenzt wachsenden Werten von n gleichmäßig gegen endliche Grenzen konvergieren.

§ 2.

Das Analogon des Dirichletschen Integrals und der allgemeine Integralsatz von du Bois-Reymond.

Wenn die Funktion $\varphi(z)$ auf der Strecke J stetig und von beschränkter Schwankung ist, und die Beziehung

$$0 < \xi < \eta \leqq Z$$

gilt, so besteht (U. §§ 14, 16) die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(\xi) M_\nu \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\varphi(\xi),$$

wobei

$$M_\nu = \frac{1}{\int_0^Z U_\nu^2(\alpha)\, d\alpha}$$

gesetzt ist; wenn ferner h endlich ist, so hat man die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(0) M_\nu \int_0^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha = \varphi(0).$$

Von diesen Formeln gebrauchen wir nur den speziellen Fall

$$\varphi(z) \equiv 1,$$

in dem sich übrigens der Beweis nicht wesentlich einfacher gestalten dürfte als bei der allgemeineren Voraussetzung. Wir erhalten so bei Benutzung der Bezeichnung

$$\Phi(\alpha, n) = \sum_{\nu}^{1,n} M_\nu \, U_\nu(\xi) \, U_\nu(\alpha)$$

die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_\xi^\eta \Phi(\alpha, n) \, d\alpha = \frac{1}{2};$$

ferner wenn h endlich und $\xi = 0$ ist,

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\eta \Phi(\alpha, n) \, d\alpha = 1.$$

Eine weitere Eigenschaft des Ausdrucks $\Phi(\alpha, n)$ liefert uns der Umstand, daß (U. §§ 13, 15) die Größe

$$U_\nu(\xi) \, M_\nu \int_\xi^\eta U_\nu(\alpha) \, \varphi(\alpha) \, d\alpha$$

in eine der folgenden vier Formen gesetzt werden kann:

$$\cos \frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z} \, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\sin \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \sin \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z} \, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\cos \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \cos \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z} \, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

$$\sin \frac{\nu\pi\xi}{Z} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha) \sin \frac{\nu\pi\alpha}{Z} \, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2};$$

dabei liegt die Größe Ψ zwischen endlichen von ξ, η und ν unabhängigen Grenzen, und die erste Form gilt, wenn h und H beide endlich sind, die zweite, wenn h allein endlich ist, die dritte, wenn H unendlich und h endlich ist, die vierte, wenn h und H unendlich sind. Die neben dem Integral erscheinenden Glieder haben zwar zunächst die Gestalt $\Psi : \varrho^2$, wobei ϱ die für die einzelnen Normalfunktionen U_ν charakteristischen Werte des in der Differentialgleichung dieser Funktionen auftretenden

Parameters durchläuft; man kann aber ν statt ϱ schreiben, da das Verhältnis $\varrho : \nu$ in allen Fällen gegen eine endliche Grenze konvergiert (U. § 11).

Setzt man speziell

$$\varphi(\alpha) \equiv 1,$$

so zeigen die angeführten Ausdrücke, daß das Integral

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \sum_{\nu}^{1,n} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int\limits_{\xi}^{\eta} U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

in zwei Teile zerlegt werden kann, von denen der eine die Form

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

hat, der andere aber eine der folgenden Summen ist:

$$\sum_{\nu}^{1,n} \cos\frac{\nu\pi\xi}{Z} \int\limits_{\xi}^{\eta} \cos\frac{\nu\alpha\pi}{Z}\, d\alpha$$

$$= \quad \frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu}\left[\sin\frac{\nu\pi}{Z}(\eta+\xi) - \sin\frac{2\nu\pi\xi}{Z} + \sin\frac{\nu\pi(\eta-\xi)}{Z}\right],$$

$$\sum_{\nu}^{1,n} \sin\frac{\nu\pi\xi}{Z} \int\limits_{\xi}^{\eta} \sin\frac{\nu\alpha\pi}{Z}\, d\alpha$$

$$= -\frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu}\left[\sin\frac{\nu\pi(\eta+\xi)}{\nu} - \sin\frac{2\nu\pi\xi}{Z} - \sin\frac{\nu\pi(\eta-\xi)}{Z}\right],$$

$$\sum_{\nu}^{1,n} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} \int\limits_{\xi}^{\eta} \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha$$

$$= \quad \frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta+\xi)}{Z} - \sin 2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} + \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta-\xi)}{Z}\right],$$

$$\sum_{\nu}^{1,n} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} \int\limits_{\xi}^{\eta} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha$$

$$= -\frac{Z}{2\pi} \sum_{\nu}^{1,n} \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta+\xi)}{Z} - \sin 2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\xi}{Z} - \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\eta-\xi)}{Z}\right].$$

Diese Größen liegen erstens nach § 1 zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen, wenn η und ξ beliebige Intervalle, etwa beide die Strecke von 0 bis Z durchlaufen. Ist ferner ξ ein beliebiger fester Wert, für den die Beziehung

$$0 \leqq \xi < Z$$

gilt, und η innerhalb des Intervalls J mit Einschluß seiner oberen Grenze so veränderlich, daß $\eta - \xi$ oberhalb einer beliebig kleinen positiven Konstanten c bleibt, so liegen die Größen

$$\frac{\pi(\eta+\xi)}{Z}, \quad \frac{\pi(\eta-\xi)}{Z}$$

zwischen festen Grenzen von der Form c_1 und $2\pi - c_2$. Dasselbe gilt von diesen Größen sowie von $\frac{2\pi\xi}{Z}$, wenn ξ auf irgend einem Teil der Strecke J, der von den Enden um endliche Stücke entfernt bleibt, veränderlich ist und für $\eta - \xi$ die bisherige Voraussetzung beibehalten wird. Nach § 1 konvergieren daher die obigen, bis zu $n = \infty$ ausgedehnten Reihen bezüglich der Größe η, wenn ξ fest ist, und bezüglich beider Größen ξ und η, wenn beide in der angegebenen Weise variieren, gleichmäßig gegen endliche Grenzwerte.

Diese Eigenschaften übertragen sich nun sofort auf das Integral

$$\int_\xi^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

da in ihm außer einer der betrachteten trigonometrischen Reihen nur noch eine Summe

$$\sum_\nu^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

vorkommt, in der die Größen Ψ zwischen endlichen von ν, ξ und η unabhängigen Grenzen liegen, die also, wenn $n = \infty$ wird, bezüglich beider Größen ξ und η gleichmäßig konvergiert. Der Grenzwert, dem das Integral zustrebt, ist nach den oben angeführten Formeln $+\frac{1}{2}$, wenn ξ oberhalb einer positiven Grenze verbleibt, dagegen $+1$, wenn h endlich und $\xi = 0$ ist.

Die hiermit bewiesenen Eigenschaften des Ausdruckes $\Phi(\alpha, n)$ *gestatten nun nach der Darstellung von C. Jordan* (Cours d'analyse II, Nr. 224), *den allgemeinen Integralsatz von du Bois-Reymond anzuwenden**), und zu folgern, daß, wenn $\varphi(\alpha)$ im Intervall J eine Funktion von beschränkter Schwankung und ξ positiv ist, die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \frac{1}{2}\, \varphi(\xi + 0) \tag{1}$$

---

*) s. a. Dini, Serie di Fourier (Pisa, 1880).

gilt. Diese Formel wird nämlich a. a. O. unter folgender Voraussetzung abgeleitet: das Integral

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

bleibe bei beliebigen Werten von n zwischen endlichen Grenzen und konvergiere gleichmäßig gegen einen festen Grenzwert, wenn η eine Strecke durchläuft, deren obere Grenze beliebig oberhalb der Größe ξ fixiert ist, während die untere Grenze dem Werte ξ von oben her beliebig nahe kommen darf; das ist aber ein Teil oben bewiesenen Eigenschaften von $\Phi(\alpha, n)$.

Die erhaltene Gleichung (1) kann offenbar in der Form

$$\sum_{\nu}^{1, \infty} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\, \varphi(\xi + 0)$$

geschrieben werden, und verallgemeinert den Satz, der in der Theorie der Fourierschen Reihen mittels des du Bois-Reymondschen Satzes abgeleitet wird, indem man

$$\Phi(\alpha, n) = \frac{\sin n\alpha}{\alpha}$$

setzt; das Integral in der Formel (1) ist das Analogon des Dirichletschen Integrals.

Wenn h endlich ist, so kann man auch $\xi = 0$ setzen und hat dann die schon einmal angeführte Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_{0}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = 1\,,$$

so daß jetzt die modifizierte Formel

$$\lim_{n=\infty} \int_{0}^{\eta} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \varphi(+0) \tag{2}$$

resultiert.

Endlich kann man η auch vom Werte ξ aus, wenn dieser positiv ist, nach unten gehen lassen und erhält dann

$$\lim_{n=\infty} \int_{\eta}^{\xi} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \frac{1}{2}\, \varphi(\xi - 0); \tag{3}$$

wenn H endlich ist, kann man auch $\xi = Z$ setzen und findet

$$\lim_{n=\infty} \int_{\eta}^{Z} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \varphi(Z - 0). \tag{4}$$

Man erhält diese Resultate aus den früheren direkt dadurch, daß man überall für z und α als neue Variable $Z - z$ und $Z - \alpha$ einführt.

Jetzt ist es leicht, zu den gewöhnlichen Darstellungsformeln überzugehen; da nämlich η in der Formel (1) auch den Wert Z, in der Formel (3) auch den Wert Null annehmen darf, *so folgt für einen zwischen* 0 *und* Z *liegenden Wert* ξ *die Gleichung*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu U_\nu(\xi) \int_0^Z U_\nu(\alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}[\varphi(\xi + 0) + \varphi(\xi - 0)]$$

unter der einzigen Voraussetzung, $\varphi(\alpha)$ *habe auf der Strecke* J *beschränkte Schwankung. Speziell ergeben die Beziehungen* (2) *und* (4), *wenn* h *endlich ist,*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu U_\nu(0) \int_0^Z U_\nu(\alpha)\, \varphi(\alpha) = \varphi(+0),$$

und wenn H *endlich ist,*

$$\sum_{\nu}^{1,\infty} M_\nu U_\nu(Z) \int_0^Z U_\nu(\alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha = \varphi(Z - 0).$$

Ein wesentlicher Vorzug dieser Resultate gegenüber den früher erhaltenen besteht darin, daß $\varphi(z)$ eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung sein darf, während früher vorausgesetzt werden mußte, daß die Anzahl der Unstetigkeiten endlich sei.

Das dem Dirichletschen analoge Integral hat hier, wie man sieht, eine andere Stellung als bei den trigonometrischen Reihen, insofern bei diesen der Grenzwert des Dirichletschen Integrals direkt gefunden und zur Summierung der Reihe benutzt wird, während bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie der Sturm-Liouvilleschen Entwicklungen erst die Formel

$$\frac{1}{2}\varphi(\xi) = \sum_{\nu}^{1,\infty} U_\nu(\xi) M_\nu \int_0^\xi U_\nu(\alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

mindestens für den Fall, daß $\varphi(\alpha)$ eine Konstante ist, abgeleitet sein muß, ehe man den Grenzwert des in Rede stehenden Integrals finden kann, der dann zu dem jetzt erhaltenen allgemeineren Resultat führt.

§ 3.

Die gleichmäßige Konvergenz der nach Normalfunktionen fortschreitenden Reihe.

Auch für die gleichmäßige Konvergenz der erhaltenen Darstellung einer willkürlichen Funktion kann jetzt leicht ein Kriterium abgeleitet werden, indem man davon ausgeht, daß auch bei variablen Werten von ξ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

unter den in § 2 für ξ und η aufgestellten Ungleichheitsbedingungen gleichmäßig bezüglich beider Größen angestrebt wird. Versteht man nämlich zunächst unter $\varphi(\alpha)$ eine auf der Strecke von ξ bis η monotone stetige Funktion, und setzt

$$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(\xi),$$

so gilt die Gleichung

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \varphi(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha + \int_{\xi}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha.$$

Ist ferner $\xi + \lambda$ irgend ein willkürlich gewählter Wert zwischen ξ und η, und sind μ, μ_1 unbekannte Mittelwerte der Strecken von ξ bis $\xi + \lambda$ und von $\xi + \lambda$ bis η, so ergibt sich nach dem zweiten Mittelwertsatze, da $\psi(\xi)$ verschwindet,

$$\int_{\xi+\lambda}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \psi(\xi+\lambda) \int_{\xi+\lambda}^{\mu_1} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha + \psi(\eta) \int_{\mu_1}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

$$\int_{\xi}^{\xi+\lambda} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \psi(\xi+\lambda) \int_{\mu}^{\xi+\lambda} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

und hieraus folgt

$$\int_{\xi}^{\eta} \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha = \psi(\xi+\lambda) \left[\int_{\xi}^{\mu_1} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha - \int_{\xi}^{\mu} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha \right]$$

$$+ \psi(\eta) \left[\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha - \int_{\xi}^{\mu_1} \Phi(\alpha, n)\, d\alpha \right].$$

Läßt man nun ξ den im § 2 gestellten Forderungen gemäß in einem Intervall von η_0 bis η_1 variieren, dessen Grenzen im Innern von J liegen, fixiert für η den Wert $\eta_1 + c_1$, der auch $= Z$ werden darf, und nimmt an, $\varphi(\alpha)$ sei von η_0 bis $\eta_1 + c_1$ stetig und monoton, so kann man λ derart wählen, daß $|\psi(\xi + \lambda)|$ stets unter der vorgeschriebenen positiven Größe ε

liegt. Jetzt bleibt die Differenz $\mu_1 - \xi$ über der Grenze λ; die mit $\psi(\eta)$ in der letzten Gleichung multiplizierten Integrale konvergieren also zufolge der erwähnten Eigenschaft des Integrals

$$\int_\xi^\eta \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

gleichmäßig gegen die Grenze $\frac{1}{2}$, ihre Differenz also gleichmäßig gegen die Grenze Null. Da ferner die Faktoren von $\psi(\xi + \lambda)$ zwischen endlichen, von ξ und η unabhängigen Grenzen liegen, so folgt, daß die Größe

$$\int_\xi^\eta \psi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha$$

bei allen betrachteten Werten von ξ und η unter einer vorgeschriebenen Grenze liegt, sobald für n ein hinreichend großer Wert genommen wird. Der obige Ausdruck für

$$\int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\, \Phi(\alpha, n)\, d\alpha,$$

auf dessen rechter Seite auch der Faktor von $\varphi(\xi)$ gleichmäßig gegen seine Grenze $\frac{1}{2}$ konvergiert, bewegt sich also in derselben Weise gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$, und damit ist gezeigt, daß unter den jetzt geltenden Voraussetzungen die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_\xi^\eta \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

gleichmäßig bezüglich der Größe ξ gegen die Grenze $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$ konvergiert. Dies Resultat, das zunächst für monotone Funktionen $\varphi(\alpha)$ gilt, überträgt sich offenbar sofort auf den Fall einer beliebigen von η_0 bis $\eta_1 + c_1$ stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, die ja stets als Differenz zweier stetiger und monotoner Funktionen dargestellt werden kann.

Wendet man die durchgeführte Entwicklung auf den Fall an, daß $\eta < \xi$, indem man wie in § 2 die Größen $Z - z$ und $Z - \alpha$ für z und α einführt und $\eta = \eta_0 - c_0$ setzt; bedenkt man ferner, daß η die Grenze Z erreichen darf, wenn $\eta > \xi$, und die Grenze 0, wenn $\xi > \eta$, so sieht man, daß *die Reihe*

$$R = \sum_\nu^{1,\infty} U_\nu(\xi)\, M_\nu \int_{\eta_0 - c_0}^{\eta_1 + c_1} \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

gleichmäßig gegen den Wert $\varphi(\xi)$ *konvergiert, wenn*

$$0 \leqq \eta_0 - c_0 < \eta_0 < \eta_1 < \xi_1 + c_1 \leqq Z, \qquad \eta_0 \leqq \xi \leqq \eta_1$$

ist, und $\varphi(z)$ *von* $\eta_0 - c_0$ *bis* $\eta_1 + c_1$ *eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung ist;* dabei können die positiven Konstanten c_0 und c_1 wie immer beliebig klein sein.

Die Reihe R wird nun in die Sturm-Liouvillesche Reihe $\sum A_\nu U_\nu$ übergeführt, indem man die Reihen

$$P = \sum U_\nu(\xi) M_\nu \int\limits_0^{\eta_0 - c_0} \varphi(\alpha) U_\nu(\alpha)\, d\alpha\,, \qquad Q = \sum U_\nu(\xi) M_\nu \int\limits_{\eta_1 + c_1}^{Z} \varphi(\alpha) U_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

hinzuaddiert; wenn es also gelingt, diese als gleichmäßig konvergent auf der Strecke von $\xi = \eta_0$ bis $\xi = \eta_1$ nachzuweisen, so ist dasselbe Resultat für die Sturm-Liouvillesche Reihe gesichert. Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß nach § 2 die Summe der ersten n Glieder der Reihe P in der Form

$$\sum_\nu^{1,n} \cos \frac{\nu\pi\xi}{Z} \int\limits_0^{\eta_0 - c_0} \varphi(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \sum_\nu^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

geschrieben werden kann oder in einer der Formen, die aus dieser hervorgehen, indem man cos durch sin und ν durch $\nu + \frac{1}{2}$ ersetzt, während die Größen Ψ stets zwischen endlichen, von ν und ξ unabhängigen Grenzen liegen. Man findet daher, indem man die elementaren Formeln

$$\sum_\nu^{1,n} \cos \nu x = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2},$$

$$\sum_\nu^{0,n} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x = \frac{\sin(n+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

anwendet, die bezeichnete n-gliedrige Summe bis auf Glieder, die bei unbegrenzt wachsenden Werten von n eine gleichmäßig konvergente Summe geben, linear ausgedrückt durch das Integral

$$\int\limits_0^{\eta_0 - c_0} \varphi(\alpha) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi(\alpha+\xi)}{Z}}{2 \sin \frac{\pi(\alpha+\xi)}{2Z}}\, d\alpha$$

und die Integrale, die aus diesem hervorgehen, indem man $n + \frac{1}{2}$ durch $n + 1$ und $\alpha + \xi$ durch $\alpha - \xi$ ersetzt. In den vier so erhaltenen Ausdrücken bleiben die Nenner $\sin\frac{\pi(\alpha+\xi)}{2Z}$ und $\sin\frac{\pi(\alpha-\xi)}{2Z}$, wenn ξ die Strecke von η_0 bis η_1 und α das Integrationsintervall durchläuft, dem absoluten Betrage nach oberhalb einer festen positiven Grenze; man kann daher die erhaltenen Integrale in Aggregate von Gliedern der Form

$$p_n\int_0^{\eta_0-c_0}\Theta_1(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha,\qquad q_n\int_0^{\eta_0-c_0}\Theta_2(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z}\,d\alpha$$

verwandeln, in denen p_n, q_n, $\Theta_1(\alpha)$, $\Theta_2(\alpha)$ zwischen endlichen, von n und ξ unabhängigen Grenzen liegen, die Funktionen $\Theta(\alpha)$ von n unabhängig und ebenso wie $\varphi(\alpha)$ von beschränkter Schwankung sind. Diese Ausdrücke konvergieren aber (U. § 4) bei wachsenden Werten von n gleichmäßig bezüglich der Variablen ξ gegen die Grenze Null, da sie in eine solche Form $\Psi : n$ gebracht werden können, daß Ψ zwischen endlichen, von n und ξ unabhängigen Grenzen liegt.

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe P nachgewiesen unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\alpha)$ in dem Intervall J von beschränkter Schwankung sei, während Unstetigkeiten auf der Strecke von 0 bis η_0-c_0 keineswegs ausgeschlossen sind. Da nun entsprechendes von der neben P eingeführten Reihe Q gilt, so folgt, *daß auch die Reihe*

$$P+Q+R=\sum_{\nu}^{1,\infty}A_\nu U_\nu=\sum_{\nu}^{1,\infty}U_\nu(\xi)M_\nu\int_0^Z U_\nu(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

d. h. die gewöhnliche Sturm-Liouvillesche Reihe, bezüglich aller Werte von ξ, *die die Ungleichung*

$$0<\eta_0\leqq\xi\leqq\eta_1<Z$$

erfüllen, gleichmäßig gegen den Wert $\varphi(\xi)$ *konvergiert, sobald die Funktion* $\varphi(z)$ *auf der ganzen Strecke* J *von beschränkter Schwankung, außerdem aber auf der Strecke von* η_0-c_0 *bis* η_1+c_1 *stetig ist, wobei* c_0 *und* c_1 *beliebig kleine positive Werte sind.*

Speziell sei $\varphi(z)$ auf der ganzen Strecke J stetig und von beschränkter Schwankung; dann konvergiert die Reihe

$$F(z)=\sum_{\nu}^{1,\infty}A_\nu U_\nu$$

gleichmäßig auf jeder Strecke von c_1 bis $Z-c_2$. Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wann das Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz bis in die Enden der Strecke J hinein ausgedehnt werden kann. Dies ist, wie man leicht sieht, z. B. bezüglich der Stelle $z = 0$ erlaubt, wenn $F(z)$ auch an dieser Stelle noch stetig ist. Setzt man nämlich

$$S_n(z) = \sum_{\nu}^{1,n} A_\nu U_\nu, \qquad F(z) = S_n(z) + R_n(z),$$

und ist ε eine beliebig klein gegebene positive Konstante, so kann man, da die Reihe $F(0)$ konvergiert, die Zahl n so wählen, daß

$$|R_n(0)| < \varepsilon;$$

sodann kann man c_1 so bestimmen, daß auf der Strecke

$$0 \leqq z \leqq c_1$$

die Ungleichungen

$$|F(z) - F(0)| < \varepsilon, \qquad |S_n(z) - S(0)| < \varepsilon$$

gelten; hieraus folgt

$$|R_n(z) - R_n(0)| < 2\varepsilon,$$

also

$$|R_n(z)| < 3\varepsilon,$$

womit die gleichmäßige Konvergenz für die Strecke von 0 bis c_1 mit Einschluß der Grenzen erwiesen ist. Eine ähnliche Betrachtung gilt offenbar für die bis zur Stelle $z = Z$ hinaufreichenden Strecken; die Reihe konvergiert also gleichmäßig auf Strecken, zu denen einer der Endpunkte des Intervalls J hinzugerechnet wird, wenn $F(z)$ in diesem Endpunkte stetig bleibt.

Wenn h endlich ist, wissen wir, daß die Gleichung

$$\varphi(z) = F(z)$$

auch an der Stelle $z = 0$ gilt; hier darf also stets das Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz den Punkt $z = 0$ mit umfassen. Dasselbe gilt aber auch im Falle $h = \infty$, wenn $\varphi(0) = 0$, da dann immer

$$U_\nu(0) = 0, \quad F(0) = 0.$$

Analog konvergiert die Reihe gleichmäßig bis in die Stelle $z = Z$ hinein, wenn entweder H endlich ist oder $\varphi(Z) = 0$.

§ 4.

Der Fall, daß die Konstanten h und H nicht beide endlich sind.

Wenn $h = \infty$ ist, haben alle Normalfunktionen die feste Nullstelle $x = 0$ oder $z = 0$; ebenso verschwinden sie alle an der Stelle $x = X$ oder $z = Z$, wenn $H = \infty$. Die Entwicklung einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung nach Normalfunktionen kann in diesen Fällen ebenso leicht wie bei endlichen Werten von h und H abgeleitet werden

(U. §§ 13, 15), wenn die darzustellende Funktion an jeder allen Normalfunktionen gemeinsamen Nullstelle $x = 0$ oder $x = X$ ebenfalls verschwindet. Andernfalls mußten in der bisherigen Darstellung jene tiefer liegenden Betrachtungen (U. § 14) herangezogen werden, die bei endlichen Werten von h und H erst zur Darstellung unstetiger Funktionen gebraucht werden. So wenig nun die letzteren Entwicklungen für den vollständigen Ausbau der ganzen Theorie entbehrt werden können, erscheint es doch sehr erwünscht, die Darstellung willkürlicher Funktionen, die an den Enden des Intervalls J nicht zu verschwinden brauchen, unter engeren, für die meisten Anwendungen ausreichenden Voraussetzungen mit geringeren Mitteln zu erledigen, etwa so wie es bei endlichen Werten von h und H schon geschehen ist (U. § 12). Dazu führt die folgende von den Hilfssätzen des § 1 ausgehende Untersuchung.

Es sei zunächst $h = H = \infty$, und werde wie gewöhnlich die Reihe

$$\sum A_\nu U_\nu$$

gebildet, in der

$$M_\nu A_\nu = \int_0^Z \varphi(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha, \qquad M_\nu = \frac{1}{\int_0^Z U_\nu^2(\alpha)\, d\alpha}$$

gesetzt wird. Dann gilt (U. § 16) die Gleichung

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{Z} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} \int_0^Z \varphi(\alpha) \sin \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

und Ψ liegt zwischen endlichen, von z und ν unabhängigen Grenzen, so daß die Reihe

$$\sum_\nu \frac{\Psi}{\nu^2}$$

im ganzen Intervall J gleichmäßig konvergiert. Den ersten Teil des Ausdrucks $A_\nu U_\nu$ formen wir durch partielle Integration um, indem wir annehmen, die Funktion $\varphi(z)$ habe eine abteilungsweise stetige erste Ableitung von beschränkter Schwankung; dann ergibt sich

$$A_\nu U_\nu = -\frac{2}{\pi\nu} \sin\frac{\nu\pi z}{Z}[(-1)^\nu \varphi(Z) - \varphi(0)] + \frac{2}{\pi\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} \int_0^Z \varphi'(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z}\, d\alpha + \frac{\Psi}{\nu^2}.$$

Das Integral auf der rechten Seite kann aber (U. § 4) in der Form $\frac{\Psi}{\nu}$ geschrieben werden; faßt man demgemäß das mit dem Integralzeichen behaftete Glied mit dem letzten zusammen, so erhält man die Gleichung

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{\pi\nu} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} [\varphi(0) - (-1)^\nu \varphi(Z)] + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

in der Ψ nicht denselben Wert, wohl aber dieselben Eigenschaften hat wie bisher. Die Reihe $\Sigma A_\nu U_\nu$ konvergiert daher auf jeder Strecke des Intervalls gleichmäßig, wo dies von den Summen

$$\sum_\nu \frac{1}{\nu} \sin \frac{\nu \pi z}{Z}, \quad \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin \frac{\nu \pi z}{Z}$$

gilt, also nach § 1 auf jeder Strecke, die durch eine Bedingung

$$c < \frac{\pi z}{Z} < \pi - c_0$$

oder auch, was dasselbe besagt, durch eine Bedingung

$$c_1 < z < Z - c_2$$

definiert wird, wobei c_1, c_2 beliebig kleine Größen zwischen 0 und Z sind.

Eine weitere Eigenschaft dieser Reihen ist nach § 1 folgende. Wenn man bei einem beliebigen, etwa dem n^{ten} Gliede abbricht, und das Argument $\frac{\pi z}{Z}$ läuft von 0 bis c oder von $\pi - c_0$ bis π, die Größe z also von 0 bis c_1 oder von $Z - c_2$ bis Z, so bleiben die Werte der Reihen zwischen endlichen, von n unabhängigen Grenzen. Da nun auch Summen wie

$$\sum_\nu^{1,n} \frac{\Psi}{\nu^2}$$

diese Eigenschaft besitzen, so sieht man, daß die Summen

$$\sum_\nu^{1,n} A_\nu U_\nu,$$

wenn man eine der Beziehungen

$$0 \leqq z \leqq c_1, \quad Z - c_2 \leqq z \leqq Z$$

festsetzt, ebenfalls zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen bleiben, während sie im allgemeinen offenbar nicht gleichmäßig konvergieren, wenn n ins Unendliche wächst.

Aus den erhaltenen Resultaten läßt sich die bemerkenswerte Folgerung ziehen, daß die Reihe

$$\sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu U_m$$

auf der ganzen Strecke J mit Einschluß ihrer Grenzen gleichmäßig konvergiert. Da nämlich U_m in den Stellen $z = 0$ und $z = Z$ verschwindet und zwischen beiden überall stetig ist, kann man die Größen c_1 und c_2 so wählen, daß auf den Strecken

$$0 \leqq z \leqq c_1, \quad Z - c_2 \leqq z \leqq Z$$

der Wert $|U_m|$ unter einer beliebig klein gegebenen positiven Größe ε liegt. Dann kann man nach den obigen Entwicklungen eine Ungleichung

$$\left| U_m \sum_{\nu}^{1,n} A_\nu U_\nu \right| < g\varepsilon$$

aufstellen, in der g eine von n unabhängige positive Konstante ist; aus ihr folgt

$$\left| U_m \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu U_\nu \right| \leqq g\varepsilon,$$

und hieraus wiederum

$$\left| U_m \sum_{\nu}^{n+1,\infty} A_\nu U_\nu \right| \leqq 2g\varepsilon$$

bei beliebigen Werten von n. Jetzt kann n so bestimmt werden, daß auch auf der Strecke

$$c_1 \leqq z \leqq Z - c_2,$$

längs deren die Reihe $\sum_\nu A_\nu U_\nu$ gleichmäßig konvergiert, die Ungleichung

$$\left| U_m \sum_{\nu}^{n+1,\infty} A_\nu U_\nu \right| \leqq 2g\varepsilon$$

gilt, die so für die ganze Strecke J bei geeigneter Wahl von n gesichert ist und, da ε beliebig klein genommen werden kann, besagt, daß die Reihe

$$\sum_\nu U_m U_\nu A_\nu$$

in der Tat auf der Strecke J gleichmäßig konvergiert, also gliedweise integriert werden darf.

Setzt man daher

$$F(z) = \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu U_\nu,$$

und benutzt die fundamentale Beziehung

$$\int_0^Z U_m(\alpha)\, U_n(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

so erhält man die Gleichungen

$$\int_0^Z F(\alpha)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = A_m \int_0^Z U_m^2(\alpha)\, d\alpha = U_m A_m$$

oder

$$\int_0^Z \big(F(\alpha) - \varphi(\alpha)\big)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Nun ist die Funktion $F(z)$ auf der Strecke von c_1 bis $Z - c_2$ stetig; ihr Verhalten in der Nähe der Stellen $z = 0$ und $z = Z$ ergibt sich aber aus der oben abgeleiteten Formel

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{\nu\pi} \sin\frac{\nu\pi z}{Z}[\varphi(0) - (-1)^\nu \varphi(Z)] + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

in der die Größen Ψ stetige Funktionen von z sind, so daß die Reihe

$$D = \sum_\nu \frac{\Psi}{\nu^2},$$

auf der Strecke J bezüglich der Größe z gleichmäßig konvergiert, an den Stellen $z = 0$ und $z = Z$ also gegen bestimmte endliche Grenzen konvergiert, die wir γ und Γ nennen wollen; dabei gilt offenbar die Gleichung

$$\begin{aligned} D &= \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu - \sum_\nu^{1,\infty} \frac{2}{\nu\pi} \sin\frac{\nu\pi z}{Z}[\varphi(0) - (-1)^\nu \varphi(Z)] \\ &= F(z) - \frac{2\varphi(0)}{\pi}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{1}{\nu}\sin\frac{\nu\pi z}{Z} + \frac{2\varphi(Z)}{\pi}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\sin\frac{\nu\pi z}{Z}. \end{aligned}$$

Hier können die in § 1 angegebenen Werte von S_∞ und T_∞ angewandt werden und ergeben die Formeln

$$\lim_{z=+0}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{1}{\nu}\sin\frac{\nu\pi z}{Z} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{z=Z-0}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{1}{\nu}\sin\frac{\nu\pi z}{Z} = 0,$$

$$\lim_{z=+0}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\sin\frac{\nu\pi z}{Z} = 0, \qquad \lim_{z=Z-0}\sum_\nu^{1,\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\sin\frac{\nu\pi z}{Z} = -\frac{\pi}{2};$$

also folgt aus der abgeleiteten Eigenschaft der Differenz D

$$F(+0) = \lim_{z=+0} F(z) = \varphi(0) + \gamma,$$

$$F(Z-0) = \lim_{z=Z-0} F(z) = \varphi(Z) + \Gamma,$$

womit, da offenbar $F(0)$ und $F(Z)$ verschwinden, die Unstetigkeit der Größe $F(z)$ evident wird. Wenn wir neben ihr eine Größe $\overline{F}(z)$ einführen, die mit ihr an allen von $z = 0$ und $z = Z$ verschiedenen Stellen übereinstimmt, an den Grenzen aber durch die Gleichungen

$$\overline{F}(0) = \varphi(0) + \gamma, \quad \overline{F}(Z) = \varphi(Z) + \Gamma$$

definiert ist, so ist $\overline{F}(z)$ im ganzen Intervall J stetig, und die oben erhaltene Gleichung

$$\int_0^Z \big(F(\alpha)-\varphi(\alpha)\big)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = 0$$

ergibt

$$\int_0^Z \big(\overline{F}(\alpha)-\varphi(\alpha)\big)\, U_m(\alpha)\, d\alpha = 0$$

da der Wert des ersteren Integrals dadurch, daß man den Integranden an zwei Stellen um endliche Beträge ändert, nicht beeinflußt wird.

Aus der letzten Gleichung aber kann, da $\overline{F}(\alpha) - \varphi(\alpha)$ eine stetige Funktion von α ist, geschlossen werden (U. § 11)

$$\overline{F}(z) = \varphi(z),$$

und hieraus folgt beiläufig, daß die Größen γ und Γ verschwinden. *Die Gleichung*

$$\varphi(z) = \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu U_\nu = F(z)$$

besteht also auf der Strecke J mit Ausnahme der Endpunkte, in denen $F(z)$ verschwindet, $\varphi(z)$ aber im allgemeinen von Null verschieden ist. Diese Gleichung gibt die Entwicklung einer willkürlichen, nur gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfenen Funktion nach den Normalfunktionen, die dem Falle $h = H = \infty$ entsprechen.

Endlich übersieht man leicht, daß die ganze bisherige Argumentation mit einer gewissen Vereinfachung gültig bleibt für den Fall, daß H endlich und $h = \infty$ ist; auf diesen läßt sich der umgekehrte Fall, daß H allein unendlich wird, dadurch zurückführen, daß man $Z - z$ als unabhängige Variable einführt. Im ersten dieser Fälle kann man (U. § 16) die folgende Gleichung ansetzen:

$$A_\nu U_\nu = \frac{2}{Z} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z} \int_0^Z \varphi(\alpha) \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z} + \frac{\Psi}{\nu^2}.$$

Hieraus folgt durch partielle Integration

$$A_\nu U_\nu = \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z}\left[\varphi(0) + \int_0^Z \varphi'(\alpha) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi\alpha}{Z}\, d\alpha\right] + \frac{\Psi}{\nu^2},$$

oder, indem man den Wert der Größe Ψ ändert, ihren definitionsmäßigen Charakter aber bestehen läßt,

$$A_\nu U_\nu = \frac{2\varphi(0)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{\nu^2}.$$

Summiert man über v, und benutzt die in § 1 abgeleiteten Eigenschaften der Summe

$$\sum_{v}^{0,n} \frac{\sin\left(v+\frac{1}{2}\right)x}{v+\frac{1}{2}},$$

so findet man, daß die Reihe

$$\sum_{v}^{1,\infty} A_v U_v$$

auf jeder Strecke

$$c_1 \leqq z \leqq Z$$

gleichmäßig konvergiert, und daß die Summen

$$\sum_{v}^{1,n} A_v U_v,$$

wenn z das Intervall von 0 bis c_1 durchläuft, zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen bleiben. Daraus schließt man, da auch jetzt die Normalfunktionen an der Stelle $z=0$ verschwinden, wie oben, daß die Reihe

$$\sum_{v}^{1,\infty} A\, U_v U_m$$

auf der ganzen Strecke J mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig konvergiert, und hieraus ergibt sich in noch etwas einfacherer Weise als oben das entsprechende Resultat, daß die Gleichung

$$\varphi(z) = \sum_{v}^{1,\infty} A_v U_v$$

auf der Strecke J gilt mit Ausschluß der Stelle $z=0$.

§ 5.

Angenäherte Darstellung beliebiger stetiger Funktionen durch endliche Summen von Normalfunktionen.

Es sei $\varphi(z)$ eine Funktion, von der nichts weiter vorausgesetzt wird, als daß sie im Intervall J stetig ist. Deutet man z als Abszisse, y als Ordinate in einem ebenen Koordinatensystem, so kann man die Kurve

$$y = \varphi(z)$$

durch ein Polygon approximieren, das mit der Abszissenachse jeden der Punkte $z=0$ und $z=Z$ gemein habe, der eine feste Nullstelle der Normalfunktionen ist. Analytisch ausgedrückt: sei $\varphi_0(x)$ eine Funktion, die als Kurve $y = \varphi_0(z)$ ein Polygon liefert, die also auf der Strecke J stetig und von beschränkter Schwankung ist; wenn $h = \infty$, sei

$$\varphi_0(0) = 0;$$

wenn $H = \infty$, sei

$$\varphi_0(Z) = 0.$$

Dann kann $\varphi_0(z)$ offenbar so gewählt werden, daß, wenn ε und ε_1 beliebig kleine positive, h und H endliche Größen sind, die Ungleichung

$$|\varphi_0(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$$

auf der Strecke J gilt, während, wenn eine der Größen h, H unendlich wird, diese Ungleichung auf der Strecke J gilt nach Abzug einer bei $z = 0$ oder $Z = 0$ beginnenden Strecke, die beliebig klein, etwa kleiner als ε_1 genommen werden kann.

Nun kann $\varphi_0(z)$ nach den früher bewiesenen Sätzen in eine auf der ganzen Strecke J gleichmäßig konvergente Reihe

$$\varphi_0(z) = \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu^0 U_\nu$$

entwickelt werden, wobei

$$A_\nu^0 = M_\nu \int_0^Z \varphi_0(\alpha)\, U_\nu(\alpha)\, d\alpha.$$

Man kann daher n so wählen, daß auf dieser ganzen Strecke die Ungleichung

$$\left|\varphi_0(z) - \sum_{\nu}^{1,n} A_\nu^0 U_\nu\right| < \varepsilon$$

gilt. Hieraus folgt auf Grund der obigen Beziehung zwischen $\varphi(z)$ und $\varphi_0(z)$ sofort die Ungleichung

$$\left|\varphi(z) - \sum_{\nu}^{1,n} A_\nu^0 U_\nu\right| < 2\varepsilon$$

für die Strecke J, von der aber, wenn h und H nicht beide endlich sind, an den Enden Strecken, die kleiner als ε_1 sind, ausgeschlossen bleiben. Man übersieht leicht, daß im Falle $h = \infty$ das erhaltene Resultat bis in die Stelle $z = 0$ hinein gültig bleibt, wenn $\varphi(0)$ verschwindet, da in diesem Falle $\varphi_0(z)$ d. h. das der Kurve $y = \varphi(z)$ sich anschmiegende Polygon so gewählt werden kann, daß die Ungleichung

$$|\varphi(z) - \varphi_0(z)| < \varepsilon$$

bis in die Stelle $z = 0$ hinein gilt, und entsprechendes gilt, wenn

$$H = \infty, \qquad \varphi(Z) = 0.$$

Man kann daher eine beliebige auf der Strecke J stetige Funktion $\varphi(z)$ mit vorgeschriebenem Grade der Annäherung durch eine endliche Summe

$$\sum_{\nu}^{1,n} A_\nu^0 U_\nu$$

darstellen, und zwar gilt diese Darstellung in allen Fällen für die Strecke J nach Abzug je eines beliebig kleinen, in den Stellen $z = 0$ und $z = Z$ beginnenden Teilintervalls. Sind speziell h und H endlich, so brauchen keine Teilintervalle von J ausgenommen zu werden, ebensowenig, wenn $\varphi(0)$ im Falle $h = \infty$ und $\varphi(Z)$ im Falle $H = \infty$ verschwindet.