Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme.

(Von Herrn *E. E. Kummer* zu Berlin.)

Die Systeme grader Linien, welche den ganzen Raum oder einen Theil des Raumes so ausfüllen, dafs durch jeden Punkt ein Strahl oder eine gewisse Anzahl discreter Strahlen geht, sind in ihrer ganzen Allgemeinheit bisher noch wenig untersucht worden. Man hat sich in der geometrischen Betrachtung der Strahlensysteme hauptsächlich auf diejenige besondere Art beschränkt, wo alle Strahlen als Normalen einer und derselben Fläche auftreten, deren Theorie mit der Lehre von der Krümmung der Flächen in der engsten Beziehung steht, und deren ausgezeichnetste Eigenschaften von *Monge* gefunden worden sind, welcher sie in mehreren Capiteln seiner *Application de l'Analyse à la Géométrie* entwickelt hat. Da die Systeme von Strahlen im Raume für die Optik eine grofse Bedeutung haben, so ist die Theorie derselben auch im physikalischen Interesse mehrfach behandelt worden; von dieser Seite her ist man aber ebenfalls nicht viel über die Systeme der Normalen einer Fläche hinausgekommen. Es hat hier merkwürdigerweise grade einer der schönsten Sätze der Optik die Ausbildung der allgemeinen Theorie gehindert, nämlich der von *Malus* gefundene und von *Dupin* verallgemeinerte Satz: dafs die von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen, nachdem sie eine beliebige Anzahl von Reflexionen an beliebig gestalteten Spiegeln, und von Refractionen beim Durchgange durch beliebig begränzte Medien anderer brechender Kraft erlitten haben, stets die Eigenschaft behalten, Normalen einer Fläche zu sein. Nur beim Durchgange des Lichtes durch Krystalle geht den irregulären Strahlen diese Eigenschaft verloren; diese bilden Systeme von Strahlen, die nicht auf einer Fläche normal stehen können, welche wegen dieser Entstehungsweise irreguläre Strahlensysteme genannt worden sind. Obgleich die Krystalle auch nur besondere Arten derselben hervorbringen, so haben sie doch zur Betrachtung der allgemeinsten Strahlensysteme den Anstofs gegeben. Diese sind, so viel mir bekannt ist, zuerst von *Hamilton* in den *Transactions of the Royal Irish Academy,* Bd. XVI behandelt worden in einem Supplemente zu seiner grofsen Abhandlung: ***Theory of systems of Rays,*** in welcher selbst sie noch nicht vorkommen, weil diese Abhandlung, den Zwecken der Optik dienend, nur die regulären Systeme und deren Veränderungen durch Reflexionen und Refractionen, von den irregulären Systemen aber nur diejenigen betrachtet, welche beim Durchgange des Lichts durch Krystalle entstehen. In dem erwähnten ersten Supplemente zu dieser Abhandlung geht ***Hamilton*** ebenfalls von physikalischen Principien, namentlich von dem Principe der kleinsten Wirkung aus, aber er verfolgt in derselben als Hauptzweck: die geometrischen Eigenschaften der allgemeinen Strahlensysteme der Optik aus der einen Grundformel zu entwickeln, welche dieses Princip gewährt. Er hat auf diesem Wege eine Reihe ausgezeichneter Eigenschaften der allgemeinen gradlinigen Strahlensysteme gefunden, welche jedoch nur wenig bekannt zu sein scheinen, da in mehreren späteren mathematischen Aufsätzen über verwandte Gegenstände keine Rücksicht darauf genommen wird. Diese von ***Hamilton*** zuerst behandelte Theorie der allgemeinen gradlinigen Strahlensysteme, durch eine neue Begründung, der analytischen Geometrie des Raumes anzueignen und sie zugleich in mehreren wesentlichen Punkten zu vervollständigen, soll der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung sein.

§. 1.

Vorbereitende Formeln und Bezeichnungen.

Eine jede grade Linie des Strahlensystems soll bestimmt werden durch einen Punkt, durch welchen sie hindurchgeht, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z seien, und durch die Winkel, welche sie mit den drei Coordinatenaxen bildet, deren Cosinus durch ξ, η, ζ bezeichnet werden. Das Gesetz, welches die graden Linien zu einem Systeme verbindet, wird dadurch gegeben, dafs die sechs Bestimmungsstücke derselben: $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ als continuirliche Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u und v bestimmt werden. Die Punkte x, y, z liegen alsdann auf einer bestimmten Fläche, und die Strahlen des Systems werden alle als von den einzelnen Punkten dieser Fläche ausgehend betrachtet. Ein jeder Punkt in einem Strahle wird durch seine Entfernung vom Ausgangspunkte des Strahls bestimmt, also durch seine auf diesem Strahl gemessene Abscisse, welche mit r bezeichnet werden soll.

Betrachtet man zwei verschiedene Strahlen des Systems, den einen, dessen Ausgangspunkt und Richtung durch die Gröfsen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ bestimmt sind und einen zweiten, für welchen diese Gröfsen die Werthe $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, $\xi+\Delta\xi$, $\eta+\Delta\eta$, $\zeta+\Delta\zeta$ haben, wo Δx, Δy u. s. w. endliche Differenzen bezeichnen, so wird das Verhältnifs beider Strahlen gegen einander durch folgende Stücke bestimmt: erstens durch den Winkel ε, den sie mit einander machen, zweitens durch die Länge p der auf beiden zugleich senkrecht stehenden Linie, d. i. durch den kürzesten Abstand derselben, drittens durch die Richtung dieses Perpendikels, also durch die Cosinus der Winkel, welche dasselbe mit den drei Coordinatenaxen macht, welche $\varkappa$, λ, μ heifsen sollen, und viertens durch die Abscisse r desjenigen Punktes im ersten Strahle, in welchem dieser seinen kürzesten Abstand vom zweiten Strahle hat. Diese vier Stücke werden, wie in den Elementen der analytischen Geometrie gezeigt wird, auf folgende Weise durch die Ausgangspunkte und die Richtungen der beiden Strahlen bestimmt:

$$(1.)\qquad \cos\varepsilon = \xi(\xi+\Delta\xi)+\eta(\eta+\Delta\eta)+\zeta(\zeta+\Delta\zeta),$$

$$(2.)\qquad \sin^2\varepsilon = (\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta)^2+(\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta)^2+(\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi)^2,$$

$$(3.)\qquad p\sin\varepsilon = (\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta)\Delta x+(\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta)\Delta y+(\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi)\Delta z,$$

$$(4.)\qquad \varkappa = \frac{\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta}{\sin\varepsilon},\qquad \lambda = \frac{\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta}{\sin\varepsilon},\qquad \mu = \frac{\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi}{\sin\varepsilon},$$

$$(5.)\qquad p = \varkappa\Delta x+\lambda\Delta y+\mu\Delta z,$$

$$(6.)\qquad r\sin\varepsilon = (\mu(\eta+\Delta\eta)-\lambda(\zeta+\Delta\zeta))\Delta x+(\varkappa(\zeta+\Delta\zeta)-\mu(\xi+\Delta\xi))\Delta y$$
$$+(\lambda(\xi+\Delta\xi)-\varkappa(\eta+\Delta\eta))\Delta z.$$

Vermittelst der beiden Gleichungen

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1,$$
$$(\xi+\Delta\xi)^2+(\eta+\Delta\eta)^2+(\zeta+\Delta\zeta)^2 = 1,$$

aus welchen man die Gleichung

$$(7.)\qquad \xi\Delta\xi+\eta\Delta\eta+\zeta\Delta\zeta = -\tfrac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)$$

erhält, kann man die Ausdrücke des $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ und r auch in folgende Formen setzen:

$$(8.)\qquad \cos\varepsilon = 1-\tfrac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2),$$

$$(9.)\qquad \sin^2\varepsilon = \Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2-\tfrac{1}{4}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)^2,$$

$$(10.)\qquad r\sin^2\varepsilon = -(\Delta x\,\Delta\xi+\Delta y\,\Delta\eta+\Delta z\,\Delta\zeta)+$$
$$\tfrac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)(\Delta x(\xi+\Delta\xi)+\Delta y(\eta+\Delta\eta)+\Delta z(\zeta+\Delta\zeta)).$$

Betrachtet man ferner den Abstand der beiden graden Linien in irgend einem beliebigen Punkte, welcher durch die Länge einer Linie gemessen wird, die vom zweiten Strahle nach dem ersten so gezogen wird, dafs sie auf diesem senkrecht steht, und nennt die Länge dieser Linie q, die Abscisse des Punktes, in welchem sie auf dem ersten Strahle senkrecht steht, R und die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Coordinatenaxen bildet, $\varkappa'$, λ', μ', so giebt die analytische Geometrie für diese Gröfsen folgende Ausdrücke:

$$(11.)\quad \begin{cases} q\varkappa' = \Delta x - R\xi + \dfrac{(R-P)(\xi+\Delta\xi)}{\cos\varepsilon}, \\ q\lambda' = \Delta y - R\eta + \dfrac{(R-P)(\eta+\Delta\eta)}{\cos\varepsilon}, \\ q\mu' = \Delta z - R\zeta + \dfrac{(R-P)(\zeta+\Delta\zeta)}{\cos\varepsilon}, \end{cases}$$

in welchen der Kürze halber

$$P = \xi\Delta x + \eta\Delta y + \zeta\Delta z$$

gesetzt ist.

Wenn man den zweiten Strahl dem ersten unendlich nahe rücken läfst, so dafs die Differenzen Δx, Δy, Δz, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ in die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ übergehen, so werden die Abstände p und q und der Winkel ε unendlich klein und sollen durch dp, dq und $d\varepsilon$ bezeichnet werden; die unendlich kleinen Gröfsen der höheren Ordnungen verschwinden alsdann gegen die der niederen Ordnungen, und man erhält:

$$(12.)\quad d\varepsilon^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

$$(13.)\quad \varkappa = \frac{\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta}{d\varepsilon}, \qquad \lambda = \frac{\zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta}{d\varepsilon}, \qquad \mu = \frac{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}{d\varepsilon},$$

$$(14.)\quad dp = \varkappa\, dx + \lambda\, dy + \mu\, dz,$$

$$(15.)\quad r = -\frac{dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta}{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

$$(16.)\quad \begin{cases} \varkappa' dq = dx + R d\xi - \xi(\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz), \\ \lambda' dq = dy + R d\eta - \eta(\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz), \\ \mu' dq = dz + R d\zeta - \zeta(\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz). \end{cases}$$

Weil x, y, z, ξ, η, ζ Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen u und v sind, so müssen die Differentiale derselben durch die nach u und v genommenen partiellen Differentialquotienten und durch die Differentiale du und dv ausgedrückt werden. Hierbei sollen für die ersten partiellen Differentialquotienten und für die aus denselben zusammengesetzten Ausdrücke dieselben Bezeichnungen gewählt werden, welche *Gaufs* in der Abhandlung

Disquisitiones generales circa superficies curvas angewendet hat, nämlich:

$$(17.)\quad dx = a\,du + a'dv,\quad dy = b\,du + b'dv,\quad dz = c\,du + c'dv,$$

$$(18.)\quad bc' - b'c = A,\quad ca' - c'a = B,\quad ab' - a'b = C,$$

$$(19.)\quad a^2 + b^2 + c^2 = E,\quad aa' + bb' + cc' = F,\quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G.$$

Ferner sollen für die partiellen Differentialquotienten der Gröfsen ξ, η, ζ und für die aus denselben zusammengesetzten Ausdrücke folgende analoge Bezeichnungen angewendet werden:

$$(20.)\quad d\xi = \mathrm{a}\,du + \mathrm{a}'dv,\quad d\eta = \mathrm{b}\,du + \mathrm{b}'dv,\quad d\zeta = \mathrm{c}\,du + \mathrm{c}'dv,$$

$$(21.)\quad \mathrm{bc}' - \mathrm{b}'\mathrm{c} = \mathrm{A},\quad \mathrm{ca}' - \mathrm{c}'\mathrm{a} = \mathrm{B},\quad \mathrm{ab}' - \mathrm{a}'\mathrm{b} = \mathrm{C},$$

$$(22.)\quad \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = \mathrm{E},\quad \mathrm{aa}' + \mathrm{bb}' + \mathrm{cc}' = \mathrm{F},\quad \mathrm{a}'^2 + \mathrm{b}'^2 + \mathrm{c}'^2 = \mathrm{G},$$

und aufserdem

$$(23.)\quad \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \Delta^2.$$

Ferner sollen noch folgende vier aus den partiellen Differentialquotienten von x, y, z und von ξ, η, ζ zusammengesetzte Ausdrücke durch einfache Buchstaben bezeichnet werden:

$$(24.)\quad \begin{cases} a\mathrm{a} + b\mathrm{b} + c\mathrm{c} = \mathrm{e}, \\ a'\mathrm{a} + b'\mathrm{b} + c'\mathrm{c} = \mathrm{f}, \\ a\mathrm{a}' + b\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' = \mathrm{f}', \\ a'\mathrm{a}' + b'\mathrm{b}' + c'\mathrm{c}' = \mathrm{g}. \end{cases}$$

Der Quotient der Differentiale der beiden unabhängigen Veränderlichen du und dv soll einfach durch t bezeichnet werden, also

$$(25.)\quad \frac{dv}{du} = t.$$

Aus der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

welche durch partielle Differentiation nach u und v die Gleichungen

$$(26.)\quad \begin{cases} \xi\mathrm{a} + \eta\mathrm{b} + \zeta\mathrm{c} = 0, \\ \xi\mathrm{a}' + \eta\mathrm{b}' + \zeta\mathrm{c}' = 0, \end{cases}$$

giebt, erhält man auch folgende Ausdrücke von ξ, η, ζ durch ihre partiellen Differentialquotienten

$$(27.)\quad \xi = \frac{\mathrm{A}}{\Delta},\quad \eta = \frac{\mathrm{B}}{\Delta},\quad \zeta = \frac{\mathrm{C}}{\Delta},$$

welche mit grofsem Vortheil angewendet werden, welche aber in dem besonderen Falle unbestimmt sind, wo $\Delta = 0$ ist. Die Bedingung $\Delta = 0$, aus welcher $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ folgt, findet nur für eine specielle Art von Strahlensystemen Statt, welche in ihrer Behandlung einige leichte Modificationen der allgemeinen Methode erfordern, die aber in dem Folgenden nicht besonders ausgeführt werden sollen, weil diese Strahlensysteme auch als Gränzfälle der allgemeinen aufgefafst werden können.

§. 2.

Die Gränzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls von den unendlich nahen Strahlen.

Der Ausdruck (15.) der Abscisse desjenigen Punktes des ersten Strahls, in welchem er seinen kürzesten Abstand von dem unendlich nahen Strahle hat, giebt, wenn die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die partiellen Differentialquotienten und durch die Differentiale du und dv der unabhängigen Variabeln ausgedrückt werden, nach den festgesetzten Zeichen:

$$(1.)\qquad r = -\frac{\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t+\mathrm{g}t^2}{E+2Ft+Gt^2}.$$

Für einen bestimmten Werth des $t = \frac{dv}{du}$ giebt dieser Ausdruck der Abscisse r den kürzesten Abstand des ersten Strahls von *einem* bestimmten unendlich nahen Strahle; die betreffenden Werthe des r für alle unendlich nahen Strahlen rings um einen Strahl herum erhält man, wenn man dem t nach einander alle möglichen Werthe von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ giebt. Der Nenner dieses Ausdrucks kann für keinen dieser Werthe des t gleich Null werden, weil $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$ niemals negativ ist und weil der specielle Fall ausgeschlossen wird, wo $EG - F^2$ gleich Null ist. Die Werthe des r können also niemals unendlich grofs werden und müssen darum stets in bestimmten endlichen Gränzen enthalten sein, welche durch ein Maximum und ein Minimum des r gegeben werden. Man hat daher folgenden Satz:

Die kürzesten Abstände eines Strahls von allen ihn umgebenden unendlich nahen Strahlen liegen in einem durch zwei bestimmte Punkte begränzten Theile dieses Strahls.

Der nach t genommene Differentialquotient des r, gleich Null gesetzt, ergiebt für die Werthe des t, welche den beiden Gränzpunkten der kürzesten Abstände des Strahls von den unendlich nahen Strahlen entsprechen, folgende Gleichung:

$$(2.)\qquad (E+2Ft+Gt^2)(\mathrm{f}+\mathrm{f}'+2\mathrm{g}t)-(\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t+\mathrm{g}t^2)(2F+2Gt) = 0,$$

oder vereinfacht:

$$(3.)\qquad (E+Ft)(\tfrac{1}{2}(f+f')+gt)-(F+Gt)(e+\tfrac{1}{2}(f+f')t) = 0,$$

und nach Potenzen von t geordnet:

$$(4.)\qquad (gF-\tfrac{1}{2}(f+f')G)t^2-(eG-gE)t+(\tfrac{1}{2}(f+f')E-eF) = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, welche, wie oben gezeigt worden ist, stets real sein müssen, seien t_1 und t_2, so hat man:

$$(5.)\qquad t_1+t_2=\frac{eG-gE}{gF-\frac{1}{2}(f+f')G},\qquad t_1t_2=\frac{\frac{1}{2}(f+f')E-eF}{gF-\frac{1}{2}(f+f')G},$$

woraus sich die beiden bemerkenswerthen Gleichungen

$$(6.)\qquad E+F(t_1+t_2)+Gt_1t_2 = 0,$$

$$(7.)\qquad e+\tfrac{1}{2}(f+f')(t_1+t_2)+gt_1t_2 = 0$$

ergeben, denen noch folgende, aus diesen leicht abzuleitende Gleichungen hinzugefügt werden mögen:

$$(8.)\qquad E+2Ft_1+Gt_1^2 = (t_1-t_2)(F+Gt_1),$$

$$(9.)\qquad E+2Ft_2+Gt_2^2 = (t_2-t_1)(F+Gt_2),$$

$$(10.)\qquad (F+Gt_1)(F+Gt_2) = -\varDelta^2,$$

$$(11.)\qquad (E+2Ft_1+Gt_1^2)(E+2Ft_2+Gt_2^2) = \varDelta^2(t_2-t_1)^2.$$

Bezeichnet man nun die beiden äufsersten Werthe der Abscisse r, welche den Werthen des $t=t_1$ und $t=t_2$ angehören, durch r_1 und r_2, so hat man:

$$(12.)\qquad r_1 = -\frac{e+(f+f')t_1+gt_1^2}{E+2Ft_1+Gt_1^2},$$

$$(13.)\qquad r_2 = -\frac{e+(f+f')t_2+gt_2^2}{E+2Ft_2+Gt_2^2},$$

welche Ausdrücke vermöge der Gleichungen (2.) und (3.) folgende einfachere Formen annehmen:

$$(14.)\qquad r_1=-\frac{e+\frac{1}{2}(f+f')t_1}{E+Ft_1}=-\frac{\frac{1}{2}(f+f')+gt_1}{F+Gt_1},$$

$$(15.)\qquad r_2=-\frac{e+\frac{1}{2}(f+f')t_2}{E+Ft_2}=-\frac{\frac{1}{2}(f+f')+gt_2}{F+Gt_2}.$$

Eliminirt man t_1 oder t_2 aus diesen Gleichungen, so erhält man folgende quadratische Gleichung, deren stets reale Wurzeln r_1 und r_2 die Abscissen der Gränzpunkte der kürzesten Abstände eines jeden Strahls von allen unendlich nahen Strahlen sind:

$$(16.)\qquad (EG-F^2)r^2+(gE-(f+f')F+eG)r+eg-\tfrac{1}{4}(f+f')^2 = 0,$$

aus welcher folgt:

$$(17.)\qquad r_1+r_2 = -\frac{\mathrm{gE}-(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathrm{F}+\mathrm{eG}}{\varDelta^2},\qquad r_1 r_2 = \frac{\mathrm{eg}-\frac{1}{4}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')^2}{\varDelta^2}.$$

Die Ausdehnung des Intervalls, in welchem die kürzesten Abstände eines Strahls von allen ihm unendlich nahen Strahlen liegen, ist gleich dem Unterschiede der Abscissen der beiden Gränzpunkte desselben, also gleich r_2-r_1. Bezeichnet man diese Länge mit $2d$ und die Abscisse des Mittelpunkts dieser beiden Gränzpunkte mit m, so hat man:

$$(18.)\qquad d = \frac{r_2-r_1}{2},\qquad m = \frac{r_2+r_1}{2}.$$

§. 3.

Die Richtungen der kürzesten Abstände und die Hauptebenen.

Es sollen nun auch die Richtungen in Betracht gezogen werden, welche die kürzesten Abstände eines Strahls von seinen unendlich nahen Strahlen haben, welche durch die oben mit $\varkappa$, λ, μ bezeichneten Cosinus der Winkel bestimmt sind, die sie mit den drei Coordinatenaxen machen. Ersetzt man in den bei (13.) §. 1 gegebenen Ausdrücken dieser Gröfsen die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die partiellen Differentialquotienten und die Differentiale der unabhängigen Variabeln du und dv, deren Quotient mit t bezeichnet wird, so erhält man:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{\eta\mathrm{c}-\zeta\mathrm{b}+(\eta\mathrm{c}'-\zeta\mathrm{b}')t}{\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}}, \\ \lambda = \dfrac{\zeta\mathrm{a}-\xi\mathrm{c}+(\zeta\mathrm{a}'-\xi\mathrm{c}')t}{\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}}, \\ \mu = \dfrac{\xi\mathrm{b}-\eta\mathrm{a}+(\xi\mathrm{b}'-\eta\mathrm{a}')t}{\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}}. \end{cases}$$

Nimmt man nun für ξ, η, ζ die oben bei (27.) §. 1 gegebenen Ausdrücke:

$$\xi = \frac{\mathrm{A}}{\varDelta},\qquad \eta = \frac{\mathrm{B}}{\varDelta},\qquad \zeta = \frac{\mathrm{C}}{\varDelta},$$

und beachtet, dafs

$$\begin{aligned} \mathrm{Bc}-\mathrm{Cb} &= \mathrm{a}'\mathrm{E}-\mathrm{aF}, & \mathrm{Bc}'-\mathrm{Cb}' &= \mathrm{a}'\mathrm{F}-\mathrm{aG}, \\ \mathrm{Ca}-\mathrm{Ac} &= \mathrm{b}'\mathrm{E}-\mathrm{bF}, & \mathrm{Ca}'-\mathrm{Ac}' &= \mathrm{b}'\mathrm{F}-\mathrm{bG}, \\ \mathrm{Ab}-\mathrm{Ba} &= \mathrm{c}'\mathrm{E}-\mathrm{cF}, & \mathrm{Ab}'-\mathrm{Ba}' &= \mathrm{c}'\mathrm{F}-\mathrm{cG} \end{aligned}$$

ist, so erhält man:

$$(2.)\quad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{a'(E+Ft)-a(F+Gt)}{\varDelta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \\[2mm] \lambda = \dfrac{b'(E+Ft)-b(F+Gt)}{\varDelta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \\[2mm] \mu = \dfrac{c'(E+Ft)-c(F+Gt)}{\varDelta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}. \end{cases}$$

Betrachtet man nun ins Besondere die Richtungen derjenigen beiden kürzesten Abstände, welche in den beiden Gränzpunkten Statt haben, also für $t = t_1$ und $t = t_2$, für welche die besonderen Werthe von $\varkappa$, λ, μ durch $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 und $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 bezeichnet werden sollen, so erhält man vermöge der Gleichung (6.) §. 2, welche zeigt, dafs $E+Ft_1 = -t_2(F+Gt_1)$ ist, zunächst folgende Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = -\dfrac{(a+a't_2)(F+Gt_1)}{\varDelta V_1}, \\[2mm] \lambda_1 = -\dfrac{(b+b't_2)(F+Gt_1)}{\varDelta V_1}, \\[2mm] \mu_1 = -\dfrac{(c+c't_2)(F+Gt_1)}{\varDelta V_1}, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen

$$\sqrt{E+2Ft_1+Gt_1^2} = V_1$$

gesetzt ist. Bezeichnet man in ähnlicher Weise die entsprechende Wurzelgröfse

$$\sqrt{E+2Ft_2+Gt_2^2} = V_2,$$

so hat man nach (11.) und (8.) §. 2

$$(4.)\quad V_1V_2 = \varDelta(t_2-t_1), \qquad \frac{\varDelta V_1}{F+Gt_1} = V_2, \qquad \frac{\varDelta V_2}{F+Gt_2} = -V_1,$$

und demnach:

$$(5.)\quad \varkappa_1 = -\frac{a+a't_2}{V_2}, \qquad \lambda_1 = -\frac{b+b't_2}{V_2}, \qquad \mu_1 = -\frac{c+c't_2}{V_2},$$

woraus man die Werthe von $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 durch Vertauschung von t_2 und t_1 erhält, bei welcher V_2 in $-V_1$ übergeht:

$$(6.)\quad \varkappa_2 = \frac{a+a't_1}{V_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{b+b't_1}{V_1}, \qquad \mu_2 = \frac{c+c't_1}{V_1}.$$

Der Cosinus des Winkels, welchen die Richtungen der kürzesten Abstände eines Strahls von den unendlich nahen Strahlen in den beiden Gränzpunkten mit einander machen, hat den Werth:

$$\varkappa_1\varkappa_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2 = -\frac{(a+a't_2)(a+a't_1)+(b+b't_2)(b+b't_1)+(c+c't_2)(c+c't_1)}{V_1V_2},$$

welcher nach Ausführung der Multiplication in den einzelnen Theilen

$$\varkappa_1\varkappa_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2 = -\frac{\mathrm{E}+2\mathrm{F}(t_1+t_2)+\mathrm{G}t_1t_2}{V_1V_2}$$

giebt, also, vermöge der Gleichung (6.) §. 2, gleich Null ist, woraus folgt, dafs dieser Winkel ein rechter ist. Man hat also folgenden Satz:

Die kürzesten Abstände eines Strahls von denjenigen unendlich nahen Strahlen, für welche dieselben in den beiden Gränzpunkten liegen, sind senkrecht gegen einander gerichtet.

Diejenigen durch einen Strahl gehenden zwei Ebenen, welche auf den Richtungen der kürzesten Abstände in den beiden Gränzpunkten senkrecht stehen, sollen die ***Hauptebenen*** dieses Strahls genannt werden. Diese beiden Hauptebenen, welche nach dem soeben bewiesenen Satze auf einander senkrecht stehen, oder die auf denselben senkrecht stehenden Richtungen der kürzesten Abstände in den beiden Gränzpunkten werden am passendsten als diejenigen gewählt, von denen aus die um einen Strahl rings herum liegenden, auf demselben senkrechten Richtungen durch Winkel gemessen werden.

Es sei ω der Winkel, welchen die Richtung des kürzesten Abstandes des ersten Strahls von einem beliebigen unendlich nahen Strahle mit der Richtung des kürzesten Abstandes in dem einen Gränzpunkte bildet, dessen Abscisse gleich r_1 ist, oder was dasselbe ist, der Neigungswinkel dieser Richtung mit der zweiten Hauptebene des Strahls, so hat man:

$$(7.)\qquad \cos\omega = \varkappa_1\varkappa+\lambda_1\lambda+\mu_1\mu,$$

und wenn die bei (2.) und (6.) gegebenen Ausdrücke von $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 eingesetzt werden:

$$(8.)\qquad \cos\omega = -\frac{\mathrm{E}+\mathrm{F}t_1+t(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)}{V_1\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}},$$

oder vermöge der Gleichung (6.) §. 2

$$(9.)\qquad \cos\omega = \frac{(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)(t_2-t)}{V_1\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}}.$$

Hieraus erhält man:

$$(10.)\qquad \sin\omega = \frac{\varDelta(t-t_1)}{V_1\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}},$$

$$(11.)\qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{\varDelta(t-t_1)}{(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)(t_2-t)},$$

und folglich

$$(12.)\qquad t = \frac{\varDelta t_1\cos\omega+(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)t_2\sin\omega}{\varDelta\cos\omega+(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)\sin\omega},$$

mittelst welcher Formel man den Quotienten $t = \frac{dv}{du}$ überall durch den Winkel ω ersetzen kann, der die geometrische Beziehung eines benachbarten Strahls zu dem ersten Strahle unmittelbarer ausdrückt als jener Quotient. Führt man diese Substitution aus in dem Ausdrucke

$$r = -\frac{\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t+\mathrm{g}t^2}{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}$$

der Abscisse desjenigen Punktes eines gegebenen Strahls, in welchem einer der unendlich nahen Strahlen den kürzesten Abstand von ihm hat, so erhält man zunächst

$$(13.)\qquad \mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2 = \frac{\Delta^2 V_1^2}{(\Delta\cos\omega+(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)\sin\omega)^2},$$

ferner erhält man

$$(14.)\qquad \mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t+\mathrm{g}t^2$$
$$= \frac{\Delta^2(\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_1+\mathrm{g}t_1^2)\cos^2\omega+(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)(\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_2+\mathrm{g}t_2^2)\sin^2\omega}{(\Delta\cos\omega+(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)\sin\omega)^2}.$$

Durch Division dieser beiden Ausdrücke, wenn man noch von der Formel (4.) Gebrauch macht, nach welcher $\Delta^2 V_1^2 = (\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)^2 V_2^2$ ist, hat man

$$(15.)\qquad r = -\frac{\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_1+\mathrm{g}t_1^2}{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t_1+\mathrm{G}t_1^2}\cos^2\omega - \frac{\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_2+\mathrm{g}t_2^2}{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t_2+\mathrm{G}t_2^2}\sin^2\omega,$$

und vermöge der bei (12.) und (13.) §. 2 gegebenen Ausdrücke von r_1 und r_2:

$$(16.)\qquad r = r_1\cos^2\omega + r_2\sin^2\omega.$$

Diese elegante Formel, welche eine sehr einfache Beziehung der Gränzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls zu dem kürzesten Abstande eines beliebigen unendlich nahen Strahls ausdrückt, hat *Hamilton* in dem schon oben angeführten Supplemente zu seiner Abhandlung *On the Theory of Systems of Rays* gefunden, in welcher er die Punkte, in denen zwei unendlich nahe Strahlen ihren kürzesten Abstand haben, unter dem Namen *„virtual foci“* behandelt; auch hat er daselbst die Gränzpunkte der kürzesten Abstände und die beiden auf einander senkrecht stehenden Hauptebenen eines jeden Strahls zuerst nachgewiesen.

§. 4.

Die Brennpunkte der Strahlen, die Mittelpunkte derselben und die Fokalebenen.

Für die Gröfse des kürzesten Abstandes dp zweier unendlich nahen Strahlen und für den unendlich kleinen Winkel $d\varepsilon$, unter welchem diese Strahlen gegen einander geneigt sind, findet man aus den oben bei (12.) und (14.)

§. 1 gegebenen Ausdrücken, durch Einführung der partiellen Differentialquotienten und der Differentiale du und dv der beiden unabhängigen Variabeln anstatt der Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und durch Anwendung der gefundenen Werthe der Gröfsen $\varkappa$, λ, μ, folgende Ausdrücke:

$$(1.)\qquad d\varepsilon = du\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2},$$

$$(2.)\qquad dp = \frac{du((\mathrm{f}'+\mathrm{g}t)(\mathrm{E}+\mathrm{F}t)-(\mathrm{e}+\mathrm{f}t)(\mathrm{F}+\mathrm{G}t))}{\varDelta\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}},$$

also

$$(3.)\qquad \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{(\mathrm{f}'+\mathrm{g}t)(\mathrm{E}+\mathrm{F}t)-(\mathrm{e}+\mathrm{f}t)(\mathrm{F}+\mathrm{G}t)}{\varDelta(\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2)}.$$

Hieraus folgt, dafs für diejenigen Werthe des t, welche der Gleichung

$$(4.)\qquad (\mathrm{f}'+\mathrm{g}t)(\mathrm{E}+\mathrm{F}t)-(\mathrm{e}+\mathrm{f}t)(\mathrm{F}+\mathrm{G}t) = 0$$

genügen, der Strahl von den betreffenden unendlich nahen Strahlen geschnitten wird, das heifst, dafs der kürzeste Abstand des Strahls, welcher im allgemeinen eine unendlich kleine Gröfse der ersten Ordnung ist, für diese besonderen Werthe des t, also für die denselben zugehörenden unendlich nahen Strahlen, eine unendlich kleine Gröfse einer höheren Ordnung ist. Diese Bedingungsgleichung entwickelt, giebt:

$$(5.)\qquad (\mathrm{gF}-\mathrm{fG})t^2+(\mathrm{gE}-(\mathrm{f}-\mathrm{f}')\mathrm{F}-\mathrm{eG})t+\mathrm{f}'\mathrm{E}-\mathrm{eF} = 0,$$

und wenn die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung mit τ_1 und τ_2 bezeichnet werden, so ist

$$(6.)\qquad \tau_1+\tau_2 = \frac{-\mathrm{gE}+(\mathrm{f}-\mathrm{f}')\mathrm{F}+\mathrm{eG}}{\mathrm{gF}-\mathrm{fG}},\qquad \tau_1\tau_2 = \frac{\mathrm{f}'\mathrm{E}-\mathrm{eF}}{\mathrm{gF}-\mathrm{fG}}.$$

Diese quadratische Gleichung hat nicht die ausgezeichnete Eigenschaft der oben behandelten, dafs ihre Wurzeln τ_1 und τ_2 stets real sind; dieselben werden vielmehr real oder imaginär je nach der Beschaffenheit der Gesetze, welche die graden Linien im Raume zu einem Systeme verbinden. Man hat demnach zwei besondere Gattungen von Strahlensystemen zu unterscheiden, nämlich solche, in welchen jeder Strahl von zwei unendlich nahen Strahlen geschnitten wird, und solche, in denen ein Schneiden unendlich naher Strahlen überhaupt nicht Statt findet. Als dritte Gattung von Strahlensystemen kommen noch diejenigen hinzu, in welchen gewisse Theile des Systems der ersten, andere der zweiten Gattung angehören.

Diejenigen beiden Punkte in einem Strahle, in welchen er von den unendlich nahen Strahlen geschnitten wird, werden die ***Brennpunkte*** dieses

Strahls genannt. Dieselben sind als reale Punkte nur dann vorhanden, wenn τ_1 und τ_2 real sind.

Die Abscissen der beiden Brennpunkte findet man aus dem allgemeinen Ausdrucke der Abscisse des Punktes, in welchem der Strahl seinen kürzesten Abstand von einem unendlich nahen Strahle hat, welcher oben (1.) §. 2 gefunden worden ist, wenn man in demselben dem t die beiden bestimmten Werthe τ_1 und τ_2 giebt. Bezeichnet man die denselben entsprechenden Abscissen der Brennpunkte mit ϱ_1 und ϱ_2, so hat man

$$(7.)\quad \begin{cases} \varrho_1 = -\dfrac{e+(f+f')\tau_1+g\tau_1^2}{E+2F\tau_1+G\tau_1^2}, \\ \varrho_2 = -\dfrac{e+(f+f')\tau_2+g\tau_2^2}{E+2F\tau_2+G\tau_2^2}, \end{cases}$$

welche Ausdrücke vermöge der quadratischen Gleichung (4.), deren Wurzeln τ_1 und τ_2 sind, folgende einfachere Formen erhalten:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho_1 = -\dfrac{e+f\tau_1}{E+F\tau_1} = -\dfrac{f'+g\tau_1}{F+G\tau_1}, \\ \varrho_2 = -\dfrac{e+f\tau_2}{E+F\tau_2} = -\dfrac{f'+g\tau_2}{F+G\tau_2}. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen τ_1 oder τ_2, so erhält man folgende quadratische Gleichung, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 sind:

$$(9.)\quad (EG-F^2)r^2+(gE-(f+f')F+eG)r+eg-ff' = 0,$$

man hat daher

$$(10.)\quad \varrho_1+\varrho_2 = -\frac{gE-(f+f')F+eG}{\varDelta^2}, \quad \varrho_1\varrho_2 = \frac{eg-ff'}{\varDelta^2}.$$

Vergleicht man diese quadratische Gleichung, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 die Abscissen der beiden Brennpunkte sind, mit derjenigen, deren Wurzeln r_1 und r_2 die Abscissen der Gränzpunkte der kürzesten Abstände sind, so hat man

$$(11.)\quad \varrho_1+\varrho_2 = r_1+r_2,$$

$$(12.)\quad \varrho_1\varrho_2 = r_1 r_2+\frac{(f-f')^2}{4\varDelta^2}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt folgenden Satz:

Der Mittelpunkt der beiden Brennpunkte eines jeden Strahls fällt mit dem Mittelpunkte der beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände zusammen.

Dieser gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Brennpunkte und der beiden Gränzpunkte soll der *Mittelpunkt des Strahls* genannt werden.

Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte sei gleich δ, also

$$(13.)\qquad \delta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2}.$$

Die vier Gröfsen r_1, r_2, ϱ_1, ϱ_2 können durch die drei Gröfsen m, d und δ ausgedrückt werden; man erhält nämlich aus der Gleichung (11.) und aus den beiden Gleichungen (18.) §. 2:

$$(14.)\qquad \begin{cases} r_2 = m + d, & r_1 = m - d, \\ \varrho_2 = m + \delta, & \varrho_1 = m - \delta. \end{cases}$$

Die Gleichung (12.) giebt demnach

$$(15.)\qquad d^2 - \delta^2 = \frac{(\mathfrak{f} - \mathfrak{f}')^2}{4\Delta^2},$$

woraus folgt, *dafs der Abstand der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkte niemals gröfser ist, als der Abstand der beiden Gränzpunkte der kürzesten Entfernungen vom Mittelpunkte,* dafs also die Brennpunkte stets nur zwischen den Gränzpunkten der kürzesten Abstände liegen oder höchstens mit denselben zusammenfallen können.

Die beiden Ebenen, welche durch einen Strahl und durch je einen der beiden unendlich nahen Strahlen gehen, welche diesen Strahl schneiden, sollen die ***Fokalebenen*** dieses Strahls genannt werden.

Die Fokalebenen sind nur dann als reale Ebenen vorhanden, wenn die Brennpunkte real sind, die Lage derselben gegen einander und gegen die Hauptebenen wird am einfachsten aus der Gleichung $r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega$ bestimmt, welche

$$(16.)\qquad \cos^2\omega = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \qquad \sin^2\omega = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$$

giebt. Nimmt man nämlich $r = \varrho_1$, so wird ω der Winkel, welchen die erste Fokalebene mit der ersten Hauptebene macht, nimmt man $r = \varrho_2$, so wird ω der Winkel der zweiten Fokalebene mit der ersten Hauptebene. Bezeichnet man diese beiden Winkel mit ω_1 und ω_2, so giebt der Unterschied $\omega_2 - \omega_1$ den Winkel, den die beiden Fokalebenen mit einander machen, welcher mit γ bezeichnet werden soll. Man hat daher:

$$(17.)\qquad \begin{cases} \cos^2\omega_1 = \dfrac{r_2 - \varrho_1}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_1 = \dfrac{\varrho_1 - r_1}{r_2 - r_1}, \\[2ex] \cos^2\omega_2 = \dfrac{r_2 - \varrho_2}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_2 = \dfrac{\varrho_2 - r_1}{r_2 - r_1}, \end{cases}$$

und, wenn man nach den Gleichungen (14.) die Abscissen der Brennpunkte und Gränzpunkte durch die drei Gröfsen m, d, δ ausdrückt, so erhält man

$$(18.)\quad \begin{cases} \cos\omega_1 = \sin\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{2d}}, \\ \sin\omega_1 = \cos\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{2d}}. \end{cases}$$

Weil demnach $\omega_1 = \frac{1}{2}\pi - \omega_2$ ist, und wegen der senkrechten Lage der beiden Hauptebenen gegen einander der Winkel der zweiten Fokalebene mit der zweiten Hauptebene gleich $\frac{1}{2}\pi - \omega_2$, also gleich dem Winkel ω_1 der ersten Fokalebene mit der ersten Hauptebene ist, so folgt:

Die beiden Fokalebenen eines jeden Strahls liegen symmetrisch gegen die beiden Hauptebenen desselben, in der Art, dafs die Halbirungsebenen des Winkels der beiden Fokalebenen dieselben sind, als die Halbirungsebenen des rechten Winkels, welchen die beiden Hauptebenen bilden.

Für den Winkel $\gamma = \omega_2 - \omega_1$ der beiden Fokalebenen hat man, wegen $\omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{2}\pi$:

$$(19.)\quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2}\pi - 2\omega_1 = 2\omega_2 - \frac{1}{2}\pi, \\ \omega_1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma, \quad \omega_2 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\gamma, \end{cases}$$

also $\sin\gamma = \cos 2\omega_1 = \cos^2\omega_1 - \sin^2\omega_1$ und $\cos\gamma = \sin 2\omega_1 = 2\sin\omega_1\cos\omega_1$; die Gleichungen (18.) geben daher:

$$(20.)\quad \sin\gamma = \frac{\delta}{d}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2}}{d}.$$

§. 5.

Die mit einem jeden Strahlensysteme zusammenhängenden Flächen.

Die fünf bestimmten Punkte in einem jeden Strahle des Systems, nämlich die beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände, die beiden Brennpunkte und der Mittelpunkt, haben zu ihren geometrischen Orten für alle Strahlen des Systems fünf Flächen, welche durch das Strahlensystem vollkommen bestimmt sind und mit demselben in den engsten Beziehungen stehen.

Die beiden Flächen, in denen die Gränzpunkte der kürzesten Abstände liegen, stellen sich analytisch gewöhnlich nur als eine einzige Fläche dar, insofern sie beide durch eine und dieselbe Gleichung repräsentirt werden, sie können darum auch als zwei verschiedene Theile oder Schalen einer Fläche angesehen werden; da es aber durchaus nöthig ist dieselben von einander zu unterscheiden, so sollen sie in dem Folgenden überall als zwei Flächen angesehen und mit F_1 und F_2 bezeichnet werden. ***Diese beiden Flächen theilen den ganzen Raum in der Art ab, dafs zwischen denselben die***

kürzesten Abstände aller unendlich nahen Strahlen des ganzen Systems liegen, aufserhalb derselben aber keine.

Geht man von irgend einem Strahle des Systems zu demjenigen unendlich nahen Strahle über, dessen kürzester Abstand von demselben in der Fläche F_1 liegt, von diesem wieder zu dem nächsten, dessen kürzester Abstand von jenem in F_1 liegt, und so fort, so bilden alle diese auf einander folgenden Strahlen zusammen eine gradlinige Fläche O_1, deren Durchschnittscurve a_1 mit der Fläche F_1 diejenige Curve der gradlinigen Fläche O_1 ist, in welcher die kürzesten Abstände je zweier auf einander folgenden graden Linien derselben liegen. Dieselbe gradlinige Fläche O_1 schneidet auch aus der Fläche F_2 eine bestimmte Curve b_2 aus. Macht man dasselbe in Beziehung auf die Fläche F_2, so erhält man eine gradlinige Fläche O_2, für welche die kürzesten Abstände je zweier unendlich nahen graden Linien auf F_2 in einer Curve a_2 liegen, und die gradlinige Fläche O_2 schneidet auch aus F_1 eine bestimmte Curve b_1 aus. Weil alles dieses für einen jeden Strahl des Systems gilt, von dem man ausgehen will, so hat man eine ganze Schaar von gradlinigen Flächen O_1, deren Curven der kürzesten Abstände je zweier unendlich nahen graden Linien eine Schaar von Curven a_1 auf der Fläche F_1 ergeben, und welche aus der Fläche F_2 eine Schaar von Curven b_2 ausschneiden. Ebenso hat man eine zweite Schaar von gradlinigen Flächen O_2, welche auf F_2 ihre Curven a_2 der kürzesten Abstände der unendlich nahen graden Linien haben, und welche aus F_1 eine Schaar von Curven b_1 ausschneiden.

Wenn x', y', z' die Coordinaten des ersten Gränzpunktes der kürzesten Abstände für den von dem Punkte x, y, z ausgehenden Strahl sind, so hat man

$$x' = x + r_1\xi, \qquad y' = y + r_1\eta, \qquad z' = z + r_1\zeta$$

als Gleichungen der Fläche F_1, in der Form, dafs die Coordinaten eines jeden Punktes dieser Fläche als Functionen der beiden unabhängigen Variabeln u und v ausgedrückt sind. In derselben Weise hat man

$$x' = x + r_2\xi, \qquad y' = y + r_2\eta, \qquad z' = z + r_2\zeta$$

als Gleichungen der Fläche F_2. Um die Schaaren der gradlinigen Oberflächen O_1 und O_2 zu finden, mufs man die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = t_1, \qquad \frac{dv}{du} = t_2$$

integriren. Wenn die vollständigen, eine willkürliche Constante enthaltenden Integrale derselben gefunden sind, und man eliminirt mittelst einer dieser beiden Integralgleichungen aus den beiden Gleichungen

$$\frac{x'-x}{\xi} = \frac{y'-y}{\eta} = \frac{z'-z}{\zeta}$$

eines jeden Strahls die Gröfsen u und v, so erhält man eine Gleichung für die Coordinaten x', y', z', welche eine willkürliche Constante enthält und die ganze Schaar der gradlinigen Flächen O_1 oder O_2 darstellt, je nachdem die eine oder die andere Integralgleichung angewendet worden ist. Die beiden Schaaren der Curven a_1 und b_1 auf F_1, und a_2 und b_2 auf F_2 erhält man unmittelbar, indem man mit den drei Gleichungen einer dieser beiden Flächen eine dieser beiden Integralgleichungen verbindet.

Die beiden Flächen, in welchen die Brennpunkte eines jeden Strahls liegen, welche die ***Brennflächen des Strahlensystems*** genannt werden und hier mit Φ_1 und Φ_2 kurz bezeichnet werden sollen, existiren als reale Flächen nur dann, wenn die Strahlen reale Brennpunkte und die beiden Wurzeln τ_1 und τ_2 der quadratischen Gleichung (5.) §. 4. reale Werthe haben.

Geht man von einem beliebigen Strahle aus zu demjenigen unendlich nahen Strahle fort, welcher jenen in dem auf Φ_1 liegenden Brennpunkte schneidet, von diesem weiter zu dem folgenden, welcher ihn in dem auf Φ_1 liegenden Brennpunkte schneidet, und so fort: so erhält man eine Reihe von Strahlen, deren jeder den vorhergehenden in einem Punkte der Fläche Φ_1 schneidet, welche also zusammen eine abwickelbare Fläche bilden, deren Wendungskurve auf der Fläche Φ_1 liegt, und welche auch aus der Fläche Φ_2 eine bestimmte Curve ausschneidet. Diese abwickelbare Fläche soll mit Ω_1, ihre Wendungscurve mit α_1 und ihre Durchschnittscurve mit der Fläche Φ_2 mit β_2 bezeichnet werden. Weil man hierbei von einem jeden beliebigen Strahle des Systems ausgehen kann, so erhält man eine ganze Schaar von abwickelbaren Flächen Ω_1, deren Wendungspunkte auf der Fläche Φ_1 eine Schaar von Curven α_1 bilden, und welche auf der Fläche Φ_2 eine Schaar von Curven β_2 bestimmen. Ebenso erhält man, von den auf der Fläche Φ_2 liegenden Brennpunkten der Strahlen ausgehend, eine zweite Schaar abwickelbarer Flächen Ω_2, deren Wendungscurven α_2 eine auf der Fläche Φ_2 liegende Schaar von Curven sind, und welche auf der Fläche Φ_1 eine Schaar von Curven β_1 bestimmen. Also:

Ein jedes System von Strahlen, welches reale Brennflächen hat, läfst sich auf zwei verschiedene Weisen zu einer Schaar abwickelbarer Flächen zusammenfassen, deren Wendungscurven zu ihren geometrischen Orten die beiden Brennflächen haben.

Weil die Wendungscurven α_1 der abwickelbaren Flächen Ω_1 als solche von allen in Ω_1 liegenden Strahlen berührt werden, und weil sie auf der Fläche Φ_1 liegen, so folgt, dafs alle Strahlen einer jeden abwickelbaren Fläche Ω_1, also überhaupt alle Strahlen des Systems, die Fläche Φ_1 berühren. Ebenso folgt auch, dafs alle Strahlen des Systems die andere Brennfläche Φ_2 berühren müssen. Man hat daher folgenden Satz:

Alle Strahlen eines Systems mit realen Brennflächen sind gemeinschaftliche Tangenten der beiden Brennflächen.

Als eine unmittelbare Folge dieses Satzes verdient auch folgender Satz erwähnt zu werden:

Ein jedes Strahlensystem mit realen Brennflächen kann als System aller gemeinschaftlichen Tangenten zweier Flächen oder auch als System aller Doppeltangenten einer und derselben Fläche geometrisch definirt werden.

Man kann auch, um ein System vollständig zu bestimmen, nur die eine seiner beiden Brennflächen, z. B. Φ_1, und zugleich die Schaar der Curven α_1 auf derselben als gegeben ansehen, also:

Ein jedes Strahlensystem mit realen Brennflächen kann als das System aller Tangenten einer auf einer Fläche liegenden Schaar von Curven geometrisch definirt werden.

Weil die in einer abwickelbaren Fläche Ω_1 liegenden Strahlen alle auch die Fläche Φ_2 berühren, so folgt, dafs die Curve β_2, welche sie mit derselben gemein haben, eine Berührungscurve beider Flächen sein mufs. Ebenso folgt, dafs jede abwickelbare Fläche Ω_2 die Fläche Φ_1 in einer ganzen Curve berührt, d. h. einhüllt. Also:

Eine jede der beiden Brennflächen wird von einer der beiden Schaaren abwickelbarer Flächen eingehüllt, in welche alle Strahlen des Systems sich zusammenfassen lassen.

Da nach einem bekannten Satze die erzeugenden graden Linien einer abwickelbaren Fläche, welche eine andere Fläche in einer ganzen Curve berührt, die conjugirten Tangenten zu den Tangenten dieser Curve sind, so folgt:

Die beiden Schaaren von Curven, welche durch die beiden Schaaren von abwickelbaren Flächen auf den Brennflächen eines Strahlensystems bestimmt werden, schneiden sich auf jeder der beiden Brennflächen in conjugirten Richtungen.

Wenn die beiden Brennflächen Φ_1 und Φ_2 sich schneiden, so ist eine jede Tangente der Durchschnittscurve einer der Strahlen des Systems und folglich eine Tangente einer der Curven α_1; die Durchschnittscurve und diese Curve α_1 haben also eine gemeinschaftliche Tangente und zwar in demselben Berührungspunkte; die Durchschnittscurve wird also von der Curve α_1 berührt, und weil dasselbe für alle verschiedenen Tangenten der Durchschnittscurve Statt hat, so folgt, dafs die Durchschnittscurve von allen Curven der Schaar α_1 berührt wird. Ebenso folgt, dafs die Durchschnittscurve auch von allen Curven der Schaar α_2 auf Φ_2 berührt wird. Man hat daher folgenden Satz:

Die Durchschnittscurve der beiden Brennflächen ist die einhüllende Curve oder Gränzcurve für alle auf den beiden Brennflächen liegenden Wendungscurven der abwickelbaren Flächen, in welche die Strahlen des Systems zusammengefafst werden können.

Die Gleichungen der beiden Brennflächen erhält man in derselben Weise, wie oben die Gleichungen der Gränzflächen der kürzesten Abstände, mit Hülfe der Abscissen der Brennpunkte ϱ_1 und ϱ_2, nämlich:

$$x' = x + \varrho_1 \xi, \quad y' = y + \varrho_1 \eta, \quad z' = z + \varrho_1 \zeta$$

und

$$x' = x + \varrho_2 \xi, \quad y' = y + \varrho_2 \eta, \quad z' = z + \varrho_2 \zeta.$$

Die beiden Schaaren der abwickelbaren Flächen Ω_1 und Ω_2 und die Schaaren der Curven α_1, β_1 auf Φ_1 und α_2, β_2 auf Φ_2 erhält man durch die vollständige Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = \tau_1, \qquad \frac{dv}{du} = \tau_2,$$

in derselben Weise wie dies oben für die Flächen O_1 und O_2 und die Systeme der Curven a_1, b_1 auf F_1 und a_2, b_2 auf F_2 gezeigt worden ist.

Was nun endlich diejenige stets reale Fläche betrifft, auf welcher die Mittelpunkte aller Strahlen des Systems liegen, welche deshalb die ***Mittelfläche*** des Strahlensystems genannt werden soll, so ist dieselbe besonders in der Beziehung von Wichtigkeit, dafs sie am passendsten für diejenige Fläche gewählt werden kann, von welcher alle Strahlen des Systems als ausgehend betrachtet werden. Rechnet man nämlich die Abscissen der Punkte in den einzelnen Strahlen von der Mittelfläche aus, so hat man

$$r_1 = -r_2, \quad \varrho_1 = -\varrho_2, \quad \mathrm{g}E - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')F + \mathrm{e}G = 0,$$

wodurch eine nicht unbeträchtliche Vereinfachung herbeigeführt wird.

Die Gleichungen der Mittelfläche erhält man aus dem Ausdrucke der Abscisse des Mittelpunkts

$$m = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{gE - (f+f')F + eG}{2\Delta^2},$$

nämlich

$$x' = x + m\xi, \quad y' = y + m\eta, \quad z' = z + m\zeta.$$

Alle diese mit den Strahlensystemen eng verbundenen Flächen, die Gränzflächen der kürzesten Abstände, die Brennflächen und die Mittelfläche können in besonderen Fällen zu Linien oder selbst zu Punkten entarten, auch können gewisse von diesen Flächen im Unendlichen verschwinden oder auch sich so mit einander vereinigen, dafs sie sich decken. Zu den verschiedenen speciellen Arten der Strahlensysteme, welche in dieser Weise als Gränzfälle der allgemeinen auftreten, gehören auch die Systeme der Normalen einer Fläche, für welche die beiden Brennflächen mit den Gränzflächen der kürzesten Abstände zusammenfallen. Von dem Verhältnisse dieser besonderen Art der Strahlensysteme zu den allgemeinen soll später ausführlicher gehandelt werden. Aufserdem verdient hier diejenige Art der Strahlensysteme eine besondere Erwähnung, für welche $\Delta = 0$ und darum $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ist, welche von der allgemeinen Untersuchung ausgeschlossen werden mufsten, weil die Ausdrücke für ξ, η, ζ durch die partiellen Differentialquotienten (27.) §. 1 für dieselben unbestimmte Werthe ergeben. Für diese besondere Art der Strahlensysteme verschwinden die Gränzflächen der kürzesten Abstände beide im Unendlichen, ebenso verschwindet auch die Mittelfläche im Unendlichen, von den beiden Brennflächen aber geht nur eine im Unendlichen verloren, während die andere eine endliche bestimmte Fläche bleibt. Von den beiden Schaaren abwickelbarer Flächen, in welche die Strahlen eines solchen Systems zusammengefafst werden können, enthält die eine, deren Wendungscurven auf der unendlich entfernten Brennfläche liegen, nur Cylinderflächen. Ein solches System kann, wie sich hieraus ergiebt, geometrisch dargestellt werden als das System aller derjenigen Tangenten einer Fläche, welche den Tangenten irgend einer auf derselben gegebenen Curve parallel sind.

§. 6.

Das Dichtigkeitsmaafs.

Betrachtet man die drei Gröfsen ξ, η, ζ, welche der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

genügen, als die rechtwinkligen Coordinaten einer Kugel, deren Radius gleich Eins ist, so hat man zu jedem Strahle des Systems einen entsprechenden Punkt auf der Kugelfläche und zu jeder continuirlichen Reihenfolge von Strahlen eine entsprechende continuirliche Curve auf der Kugelfläche. Legt man nun durch irgend einen Punkt eines Strahls eine auf demselben senkrechte Ebene und zieht in dieser Ebene eine Curve, so entspricht der Schaar von Strahlen, welche durch diese Curve hindurchgehen, eine Curve auf der Kugel. Nimmt man jene ebene Curve so, dafs ihre einzelnen Punkte sich nur unendlich wenig von dem Fufspunkte des ersten Strahls entfernen, auf welchem die Ebene der Curve senkrecht steht, und dafs sie einen um diesen Punkt herumliegenden unendlich kleinen Flächenraum umschliefst, so erhält man als die entsprechende Curve auf der Kugel ebenfalls eine geschlossene Curve mit unendlich kleinem Flächenraume. Das Verhältnifs dieser beiden unendlich kleinen Flächenräume, welches in dem Falle, wo das Strahlensystem ein System von Normalen einer Fläche und die senkrechte Ebene eine Tangentialebene derselben ist, von ***Gaufs*** als das Krümmungsmaafs dieser Fläche definirt worden ist, hat auch für die allgemeinsten Strahlensysteme dieselbe Wichtigkeit, zwar nicht als Maafs einer Krümmung aber als Maafs der ***Dichtigkeit*** des Strahlensystems. Das Dichtigkeitsmaafs eines Strahlensystems wird demnach folgendermaafsen definirt: Wenn durch irgend einen Punkt eines Strahls eine auf demselben senkrechte Ebene gelegt und in dieser eine dem Strahle unendlich nahe geschlossene Curve angenommen wird, deren Flächenraum gleich f ist, und der Flächenraum der entsprechenden Curve auf der Kugel gleich φ, so soll $\frac{\varphi}{f}$ ***das Dichtigkeitsmaafs des Strahlensystems in diesem Punkte*** genannt werden.

Es sei dq der unendlich kleine Abstand eines Punktes der Curve f von dem Fufspunkte des auf der Ebene dieser Curve senkrechten Strahls, welcher durch die Gröfsen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ und durch die Abscisse R gegeben ist, ferner seien $\varkappa', \lambda', \mu'$ die Cosinus der Winkel, welche dq mit den drei Coordinatenaxen bildet; es sei ferner der durch den anderen Endpunkt von dq hindurchgehende Strahl durch die Gröfsen $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$ bestimmt: so hat man nach (16.) §. 1 die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varkappa' dq = dx + R d\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \lambda' dq = dy + R d\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \mu' dq = dz + R d\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz). \end{cases}$$

Es sei ferner α der Winkel, welchen dq mit einem Perpendikel auf der ersten Hauptebene macht, und darum $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ der Winkel, den es mit einem Perpendikel auf der zweiten Hauptebene macht, so ist:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \varkappa_1\varkappa'+\lambda_1\lambda'+\mu_1\mu', \\ \sin\alpha = \varkappa_2\varkappa'+\lambda_2\lambda'+\mu_2\mu'. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit dq und setzt die Werthe von $\varkappa' dq$, $\lambda' dq$, $\mu' dq$ aus (1.) ein, indem man beachtet, dafs

$$\varkappa_1\xi+\lambda_1\eta+\mu_1\zeta = 0,$$
$$\varkappa_2\xi+\lambda_2\eta+\mu_2\zeta = 0$$

ist, so erhält man:

$$(3.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \varkappa_1 dx+\lambda_1 dy+\mu_1 dz+R(\varkappa_1 d\xi+\lambda_1 d\eta+\mu_1 d\zeta), \\ dq\sin\alpha = \varkappa_2 dx+\lambda_2 dy+\mu_2 dz+R(\varkappa_2 d\xi+\lambda_2 d\eta+\mu_2 d\zeta). \end{cases}$$

Setzt man nun für $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 und $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 ihre im §. 3, bei (5.) und (6.) gefundenen Werthe und drückt die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die partiellen Differentialquotienten und die Differentiale du und dv der unabhängigen Variabeln aus, so erhält man:

$$(4.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = -A_2 du - B_2 dv, \\ dq\sin\alpha = +A_1 du + B_1 dv, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$A_1 = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{f}' t_1 + R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_1)}{V_1},\qquad A_2 = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{f}' t_2 + R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_2)}{V_2},$$
$$B_1 = \frac{\mathrm{f}+\mathrm{g}t_1 + R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)}{V_1},\qquad B_2 = \frac{\mathrm{f}+\mathrm{g}t_2 + R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_2)}{V_2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$(5.)\quad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{A_1+B_1 t}{A_2+B_2 t}$$

und hieraus:

$$(6.)\quad t = -\frac{A_1\cos\alpha + A_2\sin\alpha}{B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha}.$$

Es sei nun $d\sigma$ das dem dq entsprechende Bogenelement auf der Kugelfläche, so hat man aus den Coordinaten seiner beiden Endpunkte, welche ξ, η, ξ und $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$ sind:

$$(7.)\quad d\sigma = \sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2} = du\sqrt{\mathrm{E}+2\mathrm{F}t+\mathrm{G}t^2}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche das Element $d\sigma$ auf der Kugel mit den drei

Coordinatenaxen bildet, nämlich:

$$\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad \frac{d\zeta}{d\sigma},$$

sind demnach gleich

$$(8.) \quad \frac{a+a't}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \quad \frac{b+b't}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \quad \frac{c+c't}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}.$$

Wenn nun t_0 den Werth des t für $\alpha=0$ bezeichnet, so ist nach Gleichung (6.):

$$(9.) \quad t_0 = -\frac{A_1}{B_1},$$

und wenn der dem Winkel α entsprechende Winkel auf der Kugelfläche mit α' bezeichnet wird, so hat man aus den bekannten Richtungen seiner beiden Schenkel:

$$(10.) \quad \cos\alpha' = \frac{(a+a't_0)(a+a't)+(b+b't_0)(b+b't)+(c+c't_0)(c+c't)}{\sqrt{E+2Ft_0+Gt_0^2}\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

oder vereinfacht:

$$(11.) \quad \cos\alpha' = \frac{E+Ft_0+(F+Gt_0)t}{\sqrt{E+2Ft_0+Gt_0^2}\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

woraus man folgenden Ausdruck des $\operatorname{tang}\alpha'$ ableitet:

$$(12.) \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\Delta(t-t_0)}{E+Ft_0+(F+Gt_0)t},$$

welcher differentiirt

$$(13.) \quad d\alpha' = \frac{\Delta\,dt}{E+2Ft+Gt^2}$$

giebt, und folglich mit $d\sigma^2$ multiplicirt nach Gleichung (7.)

$$(14.) \quad d\sigma^2\,d\alpha' = \Delta\,du^2\,dt.$$

Ferner erhält man durch Differentiation der Gleichung (6.)

$$(15.) \quad dt = \frac{(A_1B_2-A_2B_1)\,d\alpha}{(B_1\cos\alpha+B_2\sin\alpha)^2},$$

und aus der ersten der beiden Gleichungen (4.), wenn $\frac{dv}{du}=t$ nach Gleichung (6.) durch α ausgedrückt wird:

$$(16.) \quad dq = \frac{(A_1B_2-A_2B_1)\,du}{B_1\cos\alpha+B_2\sin\alpha},$$

also

$$(17.) \quad dq^2\,d\alpha = (A_1B_2-A_2B_1)\,du^2\,dt,$$

und diese Gleichung mit (14.) verbunden, giebt:

$$(18.) \quad d\sigma^2\,d\alpha' = \frac{\Delta}{A_1B_2-A_2B_1}\cdot dq^2\,d\alpha.$$

Weil für die unendlich kleine Curve f die Linie dq der Radius Vector ist und α der zugehörige Winkel, und für die unendlich kleine Curve φ auf der Kugel $d\sigma$ der Radius Vector und α' der zugehörige Winkel, so ist:

$$(19.)\quad f = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq^2 d\alpha, \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma^2 d\alpha'.$$

Die Integration der Gleichung (18.) in den Gränzen $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$, welchen dieselben Gränzen des α' entsprechen, giebt daher:

$$(20.)\quad \varphi = \frac{\varDelta}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot f.$$

Bezeichnet man nun das Dichtigkeitsmaafs mit Θ, so dafs $\Theta = \frac{\varphi}{f}$ ist, so hat man folgenden Ausdruck desselben:

$$(21.)\quad \Theta = \frac{\varDelta}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Aus den bei (4.) gegebenen Werthen der Gröfsen A_1, B_1, A_2, B_2 erhält man

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = \frac{t_2 - t_1}{V_1 V_2}(\mathrm{eg} - \mathrm{ff}' + (\mathrm{gE} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathrm{F} + \mathrm{eG})R + \varDelta^2 R^2);$$

nach den im §. 4 (10.) gefundenen Werthen der Abscissen ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Brennpunkte ist aber:

$$\mathrm{eg} - \mathrm{ff}' = \varrho_1 \varrho_2 \varDelta^2,$$
$$\mathrm{gE} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathrm{F} + \mathrm{eG} = -(\varrho_1 + \varrho_2)\varDelta^2,$$

und weil nach (4.) §. 3 $V_1 V_2 = \varDelta(t_2 - t_1)$ ist, so hat man:

$$(22.)\quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = \varDelta(\varrho_1 \varrho_2 - (\varrho_1 + \varrho_2)R + R^2).$$

Der Ausdruck des Dichtigkeitsmaafses Θ nimmt daher folgende einfache Form an:

$$(23.)\quad \Theta = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 - (\varrho_1 + \varrho_2)R + R^2}$$

oder

$$(24.)\quad \Theta = \frac{1}{(\varrho_1 - R)(\varrho_2 - R)}.$$

Das Dichtigkeitsmaafs in jedem Punkte eines Strahls ist also gleich dem reciproken Werthe des Products der Entfernungen dieses Punktes von den beiden Brennpunkten des Strahls.

Das Dichtigkeitsmaafs ist stets real, auch wenn die beiden Brennpunkte imaginär sind. Für Strahlensysteme mit realen Brennflächen ist das Dichtigkeitsmaafs positiv für alle aufserhalb der beiden Brennflächen liegenden Punkte, negativ für die zwischen denselben liegenden, und es hat, wie aus dem Ausdrucke desselben leicht zu ersehen ist, in dem Mittelpunkte eines jeden Strahls seinen gröfsten negativen Werth, in den Brennpunkten aber ist es unendlich grofs. In den Strahlensystemen mit imaginären Brennflächen ist das Dichtigkeitsmaafs stets positiv, und hat in dem Mittelpunkte eines jeden Strahls sein Maximum.

Fafst man alle diejenigen einem gegebenen Strahle unendlich nahen Strahlen zusammen, welche durch die mit f bezeichnete auf dem Strahle senkrecht stehende unendlich kleine Fläche hindurchgehen, so bilden dieselben ein unendlich dünnes ***Strahlenbündel,*** welches von derjenigen gradlinigen Fläche begränzt ist, deren erzeugende grade Linien die durch die umgränzende Curve der Fläche f hindurchgehenden Strahlen sind. Die unendlich kleine Fläche f ist ein ***Querschnitt*** dieses unendlich dünnen Strahlenbündels, und zwar der zur Abscisse $\boldsymbol{R}$ gehörende Querschnitt. Betrachtet man nun einen zweiten senkrechten Querschnitt f', dessen Abscisse gleich $\boldsymbol{R}'$ ist, so gehört zu diesem genau dieselbe entsprechende unendlich kleine Fläche φ auf der Kugelfläche, welche zu f gehört, weil alle Strahlen, welche durch die umgränzende Curve von f gehen, auch durch die umgränzende Curve von f' gehen. Man hat daher, wenn das Dichtigkeitsmaafs in dem Punkte, dessen Abscisse $\boldsymbol{R}'$ ist, mit Θ' bezeichnet wird:

$$\frac{\varphi}{f'} = \Theta', \qquad \frac{\varphi}{f} = \Theta$$

und folglich

$$(25.) \qquad \frac{f}{f'} = \frac{\Theta'}{\Theta}.$$

Also: ***Die Flächeninhalte zweier Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels verhalten sich umgekehrt wie die Dichtigkeitsmaafse in diesen Stellen des Strahlenbündels.***

Betrachtet man nicht blofs die Dichtigkeitsmaafse, sondern auch die Dichtigkeiten selbst, welche die Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels in den verschiedenen Stellen haben, so ist klar, dafs dieselben in dem umgekehrten Verhältnifs der Flächeninhalte der Querschnitte des Strahlenbündels stehen müssen; denn alle in dem Strahlenbündel enthaltenen Strahlen breiten sich in den Querschnitten über die ganzen Flächen derselben aus und müssen darum in demselben Verhältnifs dichter sein, in welchem die Querschnitte kleiner sind. Hieraus folgt, ***dafs in einem und demselben unendlich dünnen Strahlenbündel die Dichtigkeiten in den verschiedenen***

Stellen sich wie die zugehörenden Dichtigkeitsmaafse verhalten. Die Benennung „Dichtigkeitsmaafs" wird hierdurch vollständig gerechtfertigt.

Für zwei in ***verschiedenen*** Strahlen oder unendlich dünnen Strahlenbündeln liegende Punkte ist das Verhältnifs der Dichtigkeiten der Strahlen nicht nothwendig dasselbe als das Verhältnifs der Dichtigkeitsmaafse. Man erkennt dies am deutlichsten an dem einfachsten Systeme, in welchem alle Strahlen von einem und demselben Punkte ausgehen, welches so beschaffen sein kann, dafs die Strahlen nach allen verschiedenen Richtungen in gleicher Dichtigkeit gehen, oder auch so, dafs die Dichtigkeit eine Function der Richtung ist. In dem ersten Falle ist die Dichtigkeit für alle vom Ausgangspunkte gleich weit entfernten Punkte dieselbe und darum überall dem Dichtigkeitsmaafse proportional, im zweiten Falle aber ist die Dichtigkeit nicht allein von der Entfernung vom Ausgangspunkte sondern auch von jener Function der Richtung abhängig. Im Allgemeinen, wenn das Strahlensystem, wie dies oben angenommen worden ist, so bestimmt wird, dafs von jedem Punkte einer als geometrischer Ort der Ausgangspunkte aller Strahlen gewählten Fläche ein Strahl nach einer bestimmten Richtung ausgeht, so kann die Dichtigkeit der Strahlen an dieser ganzen Fläche irgend wie bestimmt sein als eine Function der Coordinaten des Ausgangspunktes x, y, z, oder was dasselbe ist, als eine Function der beiden unabhängigen Variabeln u und v, und erst durch diese Bestimmung wird die Dichtigkeit der Strahlen in allen Punkten des ganzen Systems zu einer vollständig bestimmten. Die Dichtigkeit selbst ist darum gleich dem Dichtigkeitsmaafse multiplicirt mit einer Function von u und v, welche die Abscisse R nicht enthält und deshalb für alle verschiedenen Punkte eines Strahls dieselbe ist. Wenn diese Function eine Constante, und folglich die Dichtigkeit in allen Punkten des Systems dem Dichtigkeitsmaafse proportional ist, so kann das Strahlensystem in Beziehung auf die Dichtigkeit der Strahlen als ein *homogenes* bezeichnet werden.

Alle diejenigen Punkte in den verschiedenen Strahlen eines Systems, welche denselben bestimmten Werth des Dichtigkeitsmaafses haben, liegen auf einer bestimmten Fläche, welche eine ***Fläche gleichen Dichtigkeitsmaafses*** genannt werden soll. Weil man dem Dichtigkeitsmaafse alle möglichen constanten Werthe geben kann, so folgt, dafs es in einem jeden Strahlensysteme eine ganze Schaar von Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses giebt. Alle diese Flächen werden sehr einfach durch den bei (23.) gegebenen Ausdruck des Dichtigkeitsmaafses bestimmt, nach welchem

$$R^2-(\varrho_1+\varrho_2)R+\varrho_1\varrho_2 = \frac{1}{\Theta}$$

ist. Nimmt man Θ constant und löst diese quadratische Gleichung in Beziehung auf R auf, wodurch man

$$(26.)\qquad R = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\right)^2+\frac{1}{\Theta}}$$

erhält, so sind für diese beiden Werthe des R

$$(27.)\qquad x' = x+R\xi,\qquad y' = y+R\eta,\qquad z' = z+R\zeta$$

die Coordinaten aller derjenigen Punkte des Systems, deren Dichtigkeitsmaafs den constanten Werth Θ hat; dieselben geben also die Gleichungen der Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses in der Art, dafs die Coordinaten eines jeden Punkts dieser Flächen als Functionen der zwei unabhängigen Variabeln u und v bestimmt sind. Damit diese Flächen real seien, ist nöthig und hinreichend, dafs der constante Werth von $\frac{1}{\Theta}$ in den Gränzen $-\left(\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\right)^2$ und $+\infty$ liege. Für den Werth $\Theta=\infty$ wird R nur dann real, wenn die beiden Brennpunkte real sind, und es wird $R=\varrho_1$ oder $R=\varrho_2$, woraus folgt, dafs die beiden Brennflächen zu den Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses gehören, welches in denselben unendlich grofs ist.

Wenn die beiden Brennflächen real und gegeben sind, so dafs alle Strahlen des Systems als die gemeinschaftlichen Tangenten derselben betrachtet werden können, so kann man alle Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses sehr leicht construiren, indem man zu den beiden Berührungspunkten eines jeden Strahls, welche die Brennpunkte desselben sind, einen dritten Punkt construirt, dessen Entfernungen von den beiden Berührungspunkten ein constantes Product haben. Wenn der gegebene Werth dieses Products positiv ist, so mufs dieser Punkt aufserhalb, wenn negativ, innerhalb der beiden Brennpunkte genommen werden.

§. 7.

Die Drehungswinkel der unendlich nahen Strahlen.

Wenn zwei grade Linien im Raume gegeben sind, und man fällt von zwei verschiedenen Punkten der zweiten Linie Perpendikel auf die erste Linie, deren Fufspunkte auf derselben in a und b liegen mögen, so soll der Winkel, welchen diese beiden Perpendikel gegen einander bilden, der ***Dre-***

hungswinkel der zweiten Linie um die erste für die Strecke von a bis b genannt werden. Der Drehungswinkel für die ganze unendliche Länge der ersten Linie ist nach dieser Definition gleich zwei Rechten, die Drehungswinkel für endliche Strecken sind alle kleiner als zwei Rechte. Wenn die beiden graden Linien in einer Ebene liegen, so ist ihr Drehungswinkel für jede beliebige Strecke gleich Null oder gleich zwei Rechten, je nachdem diese Strecke den Durchschnittspunkt der beiden Linien in sich enthält oder nicht. Wenn a, b, c drei Punkte in der ersten graden Linie sind, so ist der Drehungswinkel von b bis c gleich dem Unterschiede der beiden Drehungswinkel von a bis c und von a bis b, also alle Drehungswinkel für beliebig begränzte Strecken der ersten Linie sind durch die von einem bestimmten Punkte aus gerechneten Drehungswinkel gegeben.

Um nun die Drehungen zu untersuchen, welche die einem bestimmten Strahle unendlich nahen Strahlen des Systems in Beziehung auf denselben machen, sollen die Drehungswinkel vom Ausgangspunkte dieses Strahls aus gerechnet werden, dessen Abscisse gleich Null ist. Es sei dq die Länge eines von einem unendlich nahen Strahle auf den gegebenen Strahl gefällten Perpendikels, welches denselben in dem Punkte trifft, dessen Abscisse R ist, und α der Winkel, welchen dieses Perpendikel mit einem auf der ersten Hauptebene errichteten Perpendikel macht; ferner sei dq_0 die Länge und α_0 der entsprechende Winkel desjenigen Perpendikels, welches den gegebenen Strahl im Ausgangspunkte trifft, dessen Abscisse gleich Null ist, so hat man, wie im §. 6 bei (4.) gezeigt worden ist, die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = -A_2\,du - B_2\,dv, \\ dq\sin\alpha = +A_1\,du + B_1\,dv, \end{cases}$$

wo

$$A_1 = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{f}'t_1+R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_1)}{V_1}, \qquad A_2 = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{f}'t_2+R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_2)}{V_2},$$

$$B_1 = \frac{\mathrm{f}+\mathrm{g}t_1+R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)}{V_1}, \qquad B_2 = \frac{\mathrm{f}+\mathrm{g}t_2+R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_2)}{V_2},$$

und darum für $R=0$:

$$(2.)\quad \begin{cases} dq_0\cos\alpha_0 = -\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{f}'t_2}{V_2}\,du - \dfrac{\mathrm{f}+\mathrm{g}t_2}{V_2}\,dv, \\[2ex] dq_0\sin\alpha_0 = +\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{f}'t_1}{V_1}\,du + \dfrac{\mathrm{f}+\mathrm{g}t_1}{V_1}\,dv, \end{cases}$$

und folglich:

$$(3.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0 = -\dfrac{R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_2)}{V_2}du - \dfrac{R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_2)}{V_2}dv, \\ dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0 = +\dfrac{R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_1)}{V_1}du + \dfrac{R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)}{V_1}dv. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man folgende Werthe der Differentiale du und dv:

$$(4.)\quad \begin{cases} du = \dfrac{dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0}{RV_1} - \dfrac{dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0}{RV_2}, \\ dv = \dfrac{(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0)t_1}{RV_1} - \dfrac{(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0)t_2}{RV_2}, \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in die beiden Gleichungen (2.) einsetzt, indem man beachtet, dafs

$$\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_1+\mathrm{g}t_1^2 = -r_1V_1^2,\qquad \mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_2+\mathrm{g}t_2^2 = -r_2V_2^2,$$
$$\mathrm{e}+\tfrac{1}{2}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')(t_1+t_2)+\mathrm{g}t_1t_2 = 0,\qquad V_1V_2 = \Delta(t_2-t_1)$$

ist, so erhält man

$$(5.)\quad \begin{cases} Rdq_0\cos\alpha_0 = -r_2(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0) + \left(\dfrac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0), \\ Rdq_0\sin\alpha_0 = -\left(\dfrac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0) - r_1(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0), \end{cases}$$

und weil nach (15.) §. 4.

$$\left(\frac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)^2 = d^2-\delta^2 = \varrho_1\varrho_2 - r_1r_2$$

ist, so erhält man hieraus folgende Ausdrücke von $dq\cos\alpha$ und $dq\sin\alpha$:

$$(6.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \left(1-\dfrac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\cos\alpha_0 - \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\sin\alpha_0, \\ dq\sin\alpha = \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\cos\alpha_0 + \left(1-\dfrac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\sin\alpha_0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen, welche zeigen, wie das Perpendikel dq und der zugehörige Winkel α für einen jeden Punkt eines Strahls durch die entsprechenden Stücke im Ausgangspunkte desselben bestimmt werden, geben durch einander dividirt:

$$(7.)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}\cos\alpha_0 + (\varrho_1\varrho_2 - Rr_2)\sin\alpha_0}{(\varrho_1\varrho_2 - Rr_1)\cos\alpha_0 - R\sqrt{d^2-\delta^2}\sin\alpha_0}.$$

Der Drehungswinkel des unendlich nahen Strahls um den ersten Strahl für die Strecke der Abscisse R ist, wie oben gezeigt worden, gleich $\alpha-\alpha_0$;

bezeichnet man denselben mit β, so dafs $\beta = \alpha - \alpha_0$ und $\alpha = \beta + \alpha_0$ ist, so erhält man aus der Gleichung (7.) für den Drehungswinkel folgenden Ausdruck:

$$(8.) \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{R(\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0)}{\varrho_1\varrho_2 - R(r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0)}.$$

Die Tangente des Drehungswinkels ist, wie hieraus folgt, für jeden beliebigen Werth der Abscisse R gleich Null, also der Drehungswinkel selbst gleich Null oder gleich zwei Rechten, wenn

$$(9.) \qquad \sqrt{d^2-\delta^2} = d\sin 2\alpha_0$$

ist, also nach (20.) §. 4, wenn $\sin 2\alpha_0 = \cos\gamma$ ist oder $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}\gamma$, das ist $\alpha_0 = \omega_1$ oder $\alpha_0 = \omega_2$, wo ω_1 und ω_2 die Winkel sind, welche die beiden Fokalebenen mit der ersten Hauptebene bilden. Also für die beiden unendlich nahen Strahlen, welche in den Fokalebenen liegen, ist der Drehungswinkel überall gleich Null oder gleich zwei Rechten. Dasselbe folgt unmittelbar auch daraus, dafs jeder dieser beiden unendlich nahen Strahlen mit dem ersten Strahle in einer und derselben Ebene, der Fokalebene, liegt.

In denjenigen Strahlensystemen, welche imaginäre Brennflächen und darum auch keine Fokalebenen haben, kann der Drehungswinkel für endliche Strecken niemals gleich Null werden, also die Drehung der Strahlen um einander niemals ihren Sinn ändern. Wenn irgend zwei unendlich nahe Strahlen eines solchen Systems so liegen, dafs die Drehung des einen um den andern als eine Rechtsdrehung bezeichnet werden kann, so müssen je zwei einander unendlich nahe Strahlen des ganzen Systems nothwendig in demselben Verhältnisse der Rechtsdrehung zu einander stehen. Die Strahlensysteme mit imaginären Brennflächen theilen sich also in zwei gesonderte Klassen, als Strahlensysteme mit Rechtsdrehung und Strahlensysteme mit Linksdrehung aller Strahlen gegen einander. Zu jedem Strahlensysteme aber, es möge reale oder imaginäre Brennflächen haben, giebt es ein anderes, welches demselben in der Art symmetrisch oder uneigentlich äquivalent ist, dafs der einzige Unterschied nur in dem entgegengesetzten Sinne der Drehung aller Strahlen gegen einander besteht, welcher Unterschied analytisch sich nur durch die Verschiedenheit der Vorzeichen vor den Quadratwurzeln ausdrückt.

Wenn die Brennpunkte real sind, und man untersucht die Drehungswinkel vom Ausgangspunkte eines Strahls bis zu den Brennpunkten, also für $R = \varrho_1$ und $R = \varrho_2$, welche beziehungsweise mit β_1 und β_2 bezeichnet werden mögen, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (14.) §. 4, aus welchen

$r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0 = m - d\cos 2\alpha_0$ folgt,

$$(10.)\qquad \tang\beta_1 = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0}{\delta + d\cos 2\alpha_0},\qquad \tang\beta_2 = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0}{-\delta + d\cos 2\alpha_0},$$

und hieraus mit Hülfe der bei (18.) §. 4 gegebenen Ausdrücke der Winkel ω_1 und ω_2, welche die Fokalebenen mit den Hauptebenen machen,

$$(11.)\qquad \begin{cases} \tang\beta_1 = \dfrac{\sin 2\omega_1 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_1 - \cos 2\alpha_0} = \tang(\omega_1 - \alpha_0), \\[2ex] \tang\beta_2 = \dfrac{\sin 2\omega_2 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_2 - \cos 2\alpha_0} = \tang(\omega_2 - \alpha_0); \end{cases}$$

es ist also:

$$(12.)\qquad \beta_1 = \omega_1 - \alpha_0,\qquad \beta_2 = \omega_2 - \alpha_0.$$

Aus diesen einfachen Ausdrücken der von dem Ausgangspunkte eines Strahls bis zu den Brennpunkten gerechneten Drehungswinkel seiner unendlich nahen Strahlen erhält man:

$$(13.)\qquad \beta_2 - \beta_1 = \omega_2 - \omega_1 = \gamma.$$

Also: ***Die Drehungswinkel von einem Brennpunkte eines Strahls bis zu dem anderen Brennpunkte haben für alle unendlich nahen Strahlen denselben Werth und sind dem Neigungswinkel der beiden Fokalebenen gleich.***

Nimmt man den Drehungswinkel β als eine gegebene Gröfse, so kann man die Länge der Abscisse R bestimmen, für welche der Drehungswinkel eines dem ersten Strahle unendlich nahen Strahls diese gegebene Gröfse hat. Die Gleichung (8.) giebt für R folgenden Ausdruck:

$$(14.)\qquad R = \frac{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}{(r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0)\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d\sin 2\alpha_0\cos\beta},$$

welcher, wenn für r_1 und r_2 ihre Werthe $r_1 = m - d$ und $r_2 = m + d$ gesetzt werden, folgende einfachere Gestalt annimmt:

$$(15.)\qquad R = \frac{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d\sin(2\alpha_0+\beta)}.$$

Betrachtet man nun R als eine Function von α_0 allein und β als eine gegebene constante Gröfse, so erhält R seinen gröfsten Werth für $\sin(2\alpha_0+\beta) = +1$, also $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta$, und seinen kleinsten Werth für $\sin(2\alpha_0+\beta) = -1$, also $\alpha_0 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta$, und wenn der gröfste Werth des R mit R_1, der kleinste mit R_2 bezeichnet wird, so hat man:

$$(16.)\quad \begin{cases} R_1 = \dfrac{\varrho_1\varrho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d}, \\ R_2 = \dfrac{\varrho_1\varrho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta + d}. \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter:

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{(1-\sin(2\alpha_0+\beta))d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta} = \dfrac{2\sin^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}, \\ \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R} = \dfrac{(1+\sin(2\alpha_0+\beta))d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta} = \dfrac{2\cos^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}, \end{cases}$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$(18.)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)}{R_1} + \frac{\sin^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)}{R_2}.$$

Also: Wenn man von einem beliebigen Punkte eines Strahls ausgehend jeden demselben unendlich nahe liegenden Strahl in *der* Länge nimmt, in welcher er mit diesem einen gegebenen constanten Drehungswinkel macht, so wird diese Länge eines jeden unendlich nahen Strahls aus der Länge des gröfsten und des kleinsten und aus dem Winkel, welchen die Richtung seines Ausgangspunktes mit der Richtung des Ausgangspunktes des gröfsten Strahls macht, genau durch dieselbe Gleichung bestimmt, wie der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes einer Fläche durch den gröfsten und den kleinsten Krümmungshalbmesser und durch den Winkel, den dieser Normalschnitt mit einem der Hauptschnitte bildet, in der bekannten *Euler*schen Gleichung bestimmt ist. Der *Euler*sche Satz selbst ist als ein specieller Fall in diesem allgemeinen Satze enthalten, wie unten näher gezeigt werden soll. In dem speciellen Falle, wo der constante Drehungswinkel β gleich einem Rechten ist, hat man

$$(19.)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_0}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha_0}{R_2}.$$

Die in dieser Gleichung ausgedrückte speciellere Eigenschaft der allgemeinen Strahlensysteme hat *Hamilton* in dem erwähnten Supplemente zuerst nachgewiesen, und zwar durch die Betrachtung der Projection eines, einem gegebenen Strahle unendlich nahen Strahls auf eine Ebene, welche durch den ersten Strahl und durch den Ausgangspunkt des unendlich nahen Strahls gelegt wird. Den für die Erkenntnifs der Eigenschaften der Strahlensysteme ausserordentlich fruchtbaren Begriff der Drehung der Strahlen in Beziehung auf einander und des Drehungswinkels, hat *Hamilton* aber überhaupt nicht in Anwendung gebracht.

§. 8.

Die unendlich dünnen Strahlenbündel und die Hauptstrahlen.

In den beiden Gleichungen (6.) §. 7:

$$(1.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \left(1-\dfrac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\cos\alpha_0 - \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\sin\alpha_0, \\ dq\sin\alpha = \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\cos\alpha_0 + \left(1-\dfrac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\sin\alpha_0 \end{cases}$$

können dq und α als die Polarcoordinaten der umgränzenden Curve desjenigen Querschnitts eines unendlich dünnen Strahlenbündels angesehen werden, welcher zur Abscisse R gehört, und dq_0 und α_0 als die Polarcoordinaten der Curve des im Ausgangspunkte befindlichen Querschnitts. Diese Gleichungen können darum dazu benutzt werden, die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels nicht nur dem Flächeninhalte nach mit einander zu vergleichen, was schon durch das Dichtigkeitsmaafs vollständig geleistet wird, sondern auch zu bestimmen, wie die Gestalt eines jeden Querschnitts von der eines einzigen gegebenen abhängig ist. Geht man von den Polarcoordinaten der beiden Querschnitte zu rechtwinkligen Coordinaten über, deren Axen in den beiden Hauptebenen des Strahls liegen, in Beziehung auf welchen alle anderen Strahlen des Strahlenbündels als unendlich nahe Strahlen aufgefafst werden, so hat man

$$(2.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = x, \qquad dq\sin\alpha = y, \\ dq_0\cos\alpha_0 = x_0, \qquad dq_0\sin\alpha_0 = y_0 \end{cases}$$

zu setzen, wo x, y und x_0, y_0 die unendlich kleinen Coordinaten der beiden Querschnitte sind. Die Gleichungen (1.) geben alsdann:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \left(1-\dfrac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right)x_0 - \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}y_0, \\ y = \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}x_0 + \left(1-\dfrac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)y_0, \end{cases}$$

und wenn umgekehrt x_0 und y_0 durch x und y ausgedrückt werden:

$$(4.)\quad \begin{cases} (\varrho_1-R)(\varrho_2-R)x_0 = (\varrho_1\varrho_2-Rr_2)x + R\sqrt{d^2-\delta^2}\,y, \\ (\varrho_1-R)(\varrho_2-R)y_0 = -R\sqrt{d^2-\delta^2}\,x + (\varrho_1\varrho_2-Rr_1)y. \end{cases}$$

Die umgränzenden Curven der Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels sind also nicht nur sämmtlich Curven desselben Grades, sondern stehen auch in dem durch diese Gleichungen ausgedrückten Verhältnisse der Collinearität zu einander.

Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen die Querschnitte in den beiden Brennpunkten des unendlich dünnen Strahlenbündels, für welche, wie schon oben gezeigt worden, das Dichtigkeitsmaafs unendlich grofs ist, also die Flächeninhalte unendlich klein einer höheren Ordnung werden. Nimmt man $\boldsymbol{R} = \varrho_1$ oder $\boldsymbol{R} = \varrho_2$, so wird von den beiden Gleichungen (4.) und darum auch von den Gleichungen (3.), die eine mit der andern identisch, und sie geben

$$(5.)\quad \begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{d+\delta}}\,x, & \text{für } \boldsymbol{R} = \varrho_1, \\ y = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{d-\delta}}\,x, & \text{für } \boldsymbol{R} = \varrho_2, \end{cases}$$

welches die Gleichungen grader Linien sind und zwar unendlich kleiner grader Linien, weil y und x nur unendlich kleine Werthe haben dürfen.

Die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels in den beiden Brennpunkten sind also unendlich kleine grade Linien, d. h. von den beiden Dimensionen der Querschnitte, welche im allgemeinen unendlich kleine Gröfsen der ersten Ordnung sind, wird in den beiden Brennpunkten die eine eine unendlich kleine Gröfse einer höheren Ordnung.

Hieraus folgt auch, ***dafs die umgränzende Fläche eines jeden unendlich dünnen Strahlenbündels mit realen Brennpunkten durch Bewegung einer graden Linie construirt werden kann, welche stets durch eine unendlich kleine ebene Curve und durch zwei grade Linien hindurchgeht, die auf einem im Innern der kleinen Curve auf der Ebene desselben errichteten Perpendikel senkrecht stehen.***

Um die Richtungen der beiden Querschnitte in den Brennpunkten, welche unendlich kleine Linien sind, und um die Längen derselben im Verhältnifs zu den Dimensionen des im Ausgangspunkte des Strahlenbündels gegebenen Querschnitts zu bestimmen, ist es zweckmäfsiger zu den Polarcoordinaten dq, α und dq_0, α_0 zurückzukehren. Setzt man in den Gleichungen (1.) $\boldsymbol{R} = \varrho_1$ und beachtet, dafs $\varrho_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{d} + \delta$, $\varrho_2 - \boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{d} + \delta$ ist, so erhält man für den Querschnitt im ersten Brennpunkte:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho_2\, dq \cos\alpha = (d+\delta)\, dq_0 \cos\alpha_0 - \sqrt{d^2-\delta^2}\, dq_0 \sin\alpha_0, \\ \varrho_2\, dq \sin\alpha = \sqrt{d^2-\delta^2}\, dq_0 \cos\alpha_0 - (d-\delta)\, dq_0 \sin\alpha_0. \end{cases}$$

Durch Einführung des Winkels ω_1, welchen die erste Fokalebene mit der ersten Hauptebene macht, für welchen, wie oben bei (18.) §. 4 gezeigt worden,

$$\sin\omega_1 = \sqrt{\frac{d-\delta}{2d}}, \qquad \cos\omega_1 = \sqrt{\frac{d+\delta}{2d}}$$

ist, können diese Gleichungen in folgender einfacheren Form dargestellt werden:

$$(7.)\quad \begin{cases} \varrho_2\, dq \cos\alpha = 2d\cos\omega_1\cos(\alpha_0+\omega_1)\, dq_0, \\ \varrho_2\, dq \sin\alpha = 2d\sin\omega_1\cos(\alpha_0+\omega_1)\, dq_0, \end{cases}$$

und man erhält durch Division derselben:

$$(8.)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_1, \qquad \alpha = \omega_1.$$

Daraus, dafs der Winkel α einen constanten Werth hat, kann man ebenfalls schliefsen, dafs der Querschnitt, dessen Polarcoordinaten dq und α sind, ein Theil einer graden Linie sein mufs, in welcher der Pol liegt, man hat aber in diesem constanten Werthe $\alpha = \omega_1$ zugleich die Richtung dieser graden Linie gegeben, da sie mit der ersten Hauptebene den Winkel ω_1 macht.

Für $R = \varrho_2$, also für den Querschnitt im zweiten Brennpunkte erhält man in derselben Weise:

$$(9.)\quad \begin{cases} \varrho_1\, dq \cos\alpha = 2d\cos\omega_2\cos(\alpha_0+\omega_2)\, dq_0, \\ \varrho_1\, dq \sin\alpha = 2d\sin\omega_2\cos(\alpha_0+\omega_2)\, dq_0, \end{cases}$$

$$(10.)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_2, \qquad \alpha = \omega_2.$$

Man hat demnach folgenden Satz:

Die beiden unendlich kleinen graden Linien, welche die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels in den Brennpunkten bilden, liegen in den beiden Fokalebenen desselben.

Für den Querschnitt im ersten Brennpunkte, wo $\alpha = \omega_1$ ist, hat man nach Gleichung (7.):

$$(11.)\qquad dq = \frac{2d}{\varrho_2}\, dq_0 \cos(\alpha_0+\omega_1).$$

Wenn nun, wie hier vorausgesetzt wird, die umgränzende Curve des einen Querschnitts im Ausgangspunkte des Strahlenbündels vollständig bestimmt und gegeben ist, so hat man den Radius Vector dq_0 derselben als eine Function des Winkels α_0 gegeben, und es ist alsdann durch die Gleichung (11.) auch dq als Function von α_0 bestimmt. Da aber die Curve, deren Radius Vector dq ist, eine grade Linie ist, und der Pol in dieser graden Linie liegt, so ist die Länge derselben nothwendig gleich dem Unterschiede der beiden äufsersten Werthe, welche dieser Radius Vector dq als Function von α_0 haben kann, oder weil der eine dieser beiden äufsersten Werthe nothwendig positiv, der andere negativ sein mufs, so ist die gesuchte Länge dieser graden Linie gleich der Summe der absoluten Werthe dieses Maximum und Minimum. Ebenso erhält man die Länge des Querschnitts im zweiten Brennpunkte, indem man den gröfsten positiven und den gröfsten negativen Werth, welchen dq nach der Gleichung

$$(12.) \qquad dq = \frac{2d}{\varrho_1} dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_2)$$

als Function von α_0 erhalten kann, abgesehen von den Vorzeichen, addirt.

In dem einfachsten Falle, wo der Querschnitt im Ausgangspunkte als ein unendlich kleiner Kreis angenommen wird, also dq_0 als Radius dieses Kreises constant ist, hat man die beiden äufsersten Werthe des dq für den Querschnitt im ersten Brennpunkte, wenn $\alpha_0 + \omega_1 = 0$ und $\alpha_0 + \omega_1 = \pi$ ist, also gleich $\frac{2d}{\varrho_2} dq_0$ und $-\frac{2d}{\varrho_2} dq_0$; dieselben, abgesehen von den Vorzeichen addirt, geben $\frac{4d}{\varrho_2} dq_0$ als Länge des gradlinigen Querschnitts im ersten Brennpunkte. Ebenso findet man die Länge des Querschnitts im zweiten Brennpunkte gleich $\frac{4d}{\varrho_1} dq_0$. Die Längen dieser beiden Querschnitte in den Brennpunkten verhalten sich also wie ihre Entfernungen von dem kreisförmigen Querschnitte im Ausgangspunkte des Strahlenbündels.

Untersucht man die Bedingung, dafs die Länge eines Querschnitts im Brennpunkte des Strahlenbündels gleich Null ist, d. h. unendlich klein einer höheren Ordnung als der ersten, so erkennt man aus den Gleichungen (11.) und (12.) unmittelbar, dafs dieser Fall eintritt, wenn $d = 0$ ist, und dafs er nur dann eintreten kann, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Die Bedingung $d = 0$ zieht nothwendig auch $\delta = 0$ nach sich, weil δ, wenn es real ist, niemals gröfser ist als d, es mufs also $r_2 = r_1$ sein und $\varrho_2 = \varrho_1$, d. h. die beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände und die beiden Brennpunkte müssen für solche Strahlenbündel mit dem einen Mittelpunkte desselben zusammenfallen. Nennt man nach *Hamilton* diejenigen Strahlen, deren unendlich nahe Strahlen alle durch einen einzigen Punkt gehen, *Hauptstrahlen,* so folgt, dafs Hauptstrahlen nur da Statt haben können und auch wirklich Statt haben, wo die beiden Gränzflächen und mit ihnen zugleich die beiden Brennflächen gemeinschaftliche Punkte haben, welche entweder Berührungspunkte oder Durchschnittspunkte oder Punkte auf Durchschnittslinien sein können.

Für die Hauptstrahlen sind die beiden Hauptebenen unbestimmt, weil für sie die kürzesten Abstände von den unendlich nahen Strahlen alle gleich Null sind und darum keine bestimmten Richtungen ergeben.

In dem ganz speciellen Strahlensysteme, dessen Strahlen alle durch einen einzigen Punkt gehen, sind alle Strahlen Hauptstrahlen; auch ist leicht einzusehen, dafs dies das einzige derartige System ist. Es giebt aber unendlich viele Strahlensysteme, welche continuirliche, zusammen eine Fläche bildende Reihenfolgen von Hauptstrahlen haben, wie z. B. das System der gemeinschaftlichen Tangenten zweier confokalen Flächen zweiten Grades, in welchem alle Tangenten der Durchschnittscurve dieser beiden confokalen Flächen Hauptstrahlen sind. Ebenso giebt es unendlich viele Strahlensysteme, welche einzelne isolirte Hauptstrahlen haben, in der Regel aber kommen die Hauptstrahlen in den allgemeinen Systemen nicht vor, weil die Werthe der beiden unabhängigen Variabeln u und v, für welche ein Strahl zu einem Hauptstrahle wird, durch drei Gleichungen bestimmt werden. Da nämlich für einen Hauptstrahl die Richtung der beiden Hauptebenen unbestimmt ist, so mufs die quadratische Gleichung (4.) §. 2, deren Wurzeln die Richtungen der Hauptebenen bestimmen, identisch erfüllt sein, es mufs also gleichzeitig

$$(13.)\qquad \mathrm{gF}-\tfrac{1}{2}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathrm{G}=0,\qquad \mathrm{eG}-\mathrm{gE}=0,\qquad \tfrac{1}{2}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathrm{E}-\mathrm{eF}=0$$

sein. Diese drei Gleichungen reduciren sich im allgemeinen auf zwei, weil, abgesehen von dem Falle $\mathrm{F}=0$, eine derselben eine nothwendige Folge der beiden andern ist; es kommt aber noch eine dritte Bedingungsgleichung hinzu, weil der Strahl einen *realen* Brennpunkt haben mufs, nämlich $\delta=0$, welche

$$(14.)\qquad \mathrm{f}=\mathrm{f}'$$

ergiebt.

Wenn in einem Strahle nur die beiden Brennpunkte, aber nicht zugleich auch die beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände, sich mit dem Mittelpunkte vereinigen, so hat das ihn umgebende unendlich dünne Strahlenbündel nur *einen* gradlinigen Querschnitt in diesem Mittelpunkte, welcher zugleich die beiden Brennpunkte enthält, und dieser Querschnitt liegt in der Ebene, in welcher die beiden Fokalebenen sich in diesem Falle vereinigen, da vermöge der Gleichung $\sin\gamma=\frac{\delta}{d}$ der Winkel derselben γ zugleich mit δ, dem halben Abstande der beiden Brennpunkte, gleich Null wird. Weil die Bedingung, dafs die beiden Brennpunkte zusammenfallen, nur eine einzige Gleichung unter den beiden unabhängigen Variabeln u und v giebt, so folgt, dafs die Strahlensysteme in der Regel nicht einzelne Strahlen dieser Art, sondern continuirliche Reihenfolgen derselben enthalten werden, welche gradlinige Flächen bilden, und dafs die Brennflächen in der Regel sich in bestimmten Curven schneiden, da alle Tangenten an die Durchschnittscurve der beiden Brennflächen solche Strahlen sind, deren Brennpunkte zusammenfallen. Es giebt aber auch eine ganze Gattung von Strahlensystemen, in denen sämmtliche Strahlen diese Eigenschaft haben, weil ihre beiden Brennflächen sich decken, indem sie in eine einzige Fläche vereinigt sind.

§. 9.

Vergleichung der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme mit der speciellen Theorie der Krümmung der Flächen und der Systeme ihrer Normalen.

Die Strahlensysteme, deren allgemeine Theorie in dem Vorhergehenden entwickelt worden ist, gehen in dem besonderen Falle, wo die beiden mit f und f′ bezeichneten, aus den partiellen Differentialquotienten von x, y, z und ξ, η, ζ zusammengesetzten Ausdrücke einander gleich sind, in solche specielle Systeme über, deren Strahlen sämmtlich Normalen einer und derselben Fläche sind. Wenn es nämlich eine Fläche giebt, für welche jeder Strahl eine Normale ist, und man bezeichnet mit x', y', z' die Coordinaten des Punktes derselben, in welchem der durch x, y, z, ξ, η, ζ bestimmte Strahl des Systems auf ihr normal steht, und nennt die Entfernung dieses Punktes vom Ausgangspunkte x, y, z des Strahls r, so hat man

$$(1.)\qquad x' = x + r\xi,\quad y' = y + r\eta,\quad z' = z + r\zeta,$$

und weil dieser Strahl auf der Fläche senkrecht stehen soll, so mufs

$$(2.)\qquad \xi\,dx' + \eta\,dy' + \zeta\,dz' = 0$$

sein. Diese Bedingung giebt, wenn für x', y', z' ihre Werthe eingesetzt werden:

$$(3.)\qquad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz + dr(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + r(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta) = 0,$$

und folglich

$$(3.)\qquad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = -dr$$

oder

$$(4.)\qquad (\xi a + \eta b + \zeta c)\,du + (\xi a' + \eta b' + \zeta c')\,dv = -dr.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung mufs also ein vollständiges Differential einer Function $-r$ der beiden unabhängigen Variabeln u und v sein. Es mufs daher

$$(5.)\qquad \frac{\partial(\xi a+\eta b+\zeta c)}{\partial v} = \frac{\partial(\xi a'+\eta b'+\zeta c')}{\partial u}$$

sein, und hieraus erhält man durch Ausführung der partiellen Differentiationen, weil

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u},\qquad \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial b'}{\partial u},\qquad \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial c'}{\partial u}$$

ist, folgende Bedingung:

$$a\mathrm{a}'+b\mathrm{b}'+c\mathrm{c}' = a'\mathrm{a}+b'\mathrm{b}+c'\mathrm{c},$$

also

$$(6.)\qquad \mathrm{f} = \mathrm{f}',$$

welche identisch erfüllt sein mufs, damit das Strahlensystem ein System von Normalen einer Fläche sei. Dafs diese Bedingung auch die hinreichende ist, geht daraus hervor, dafs, wenn sie erfüllt ist, die Gröfse r aus der Gleichung (4.) als Function von u und v bestimmt werden kann, und dafs für einen solchen Werth des r die Gleichungen (1.) eine Fläche darstellen, deren Normalen die Strahlen des Systems sind. Da zu dem aus der Differentialgleichung (4.) bestimmten Werthe des r eine beliebige Constante addirt werden kann, so hat man alsdann nicht nur eine, dieser Bedingung genügende Fläche, sondern eine ganze Schaar derselben, welche unter dem Namen Parallelflächen bekannt sind.

Für $\mathrm{f}=\mathrm{f}'$ wird die quadratische Gleichung (5.) §. 4, deren Wurzeln τ_1 und τ_2 sind, mit der quadratischen Gleichung (4.) §. 2, deren Wurzeln t_1 und t_2 sind, und ebenso die quadratische Gleichung (9.) §. 4, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 sind, mit der quadratischen Gleichung (16.) §. 2, deren Wurzeln r_1 und r_2 sind, identisch. Hieraus folgt:

In denjenigen Systemen, deren Strahlen Normalen einer Fläche sind, fallen die beiden Fokalebenen eines jeden Strahls mit den beiden Hauptebenen und die beiden Brennpunkte mit den beiden Gränzpunkten der kürzesten Abstände zusammen.

Wählt man in diesem Falle eine der Flächen, für welche alle Strahlen des Systems Normalen sind, als diejenige Fläche, von welcher alle Strahlen als ausgehend betrachtet werden, so sind die Abscissen der Brennpunkte ϱ_1 und ϱ_2 oder, was hier dasselbe ist, die Abscissen der Gränzpunkte r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser dieser Fläche, und die Brennflächen des Systems, welche mit den Gränzflächen der kürzesten Abstände zusammenfallen, sind die von *Monge* behandelten Flächen, in denen die Mittelpunkte aller Hauptkrümmungskreise liegen. Die Theorie der Krümmung der Flächen kann somit als ein specieller Fall der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme aufgefafst werden, und es ist nicht ohne Interesse, den Zusammenhang der in dem Vorstehenden entwickelten allgemeinen Sätze mit den bekannten Sätzen aus der Theorie der Krümmung der Flächen etwas näher zu erörtern.

Untersucht man zunächst, ob die allgemeinere Theorie der Strahlensysteme vielleicht neue Sätze für die Theorie der Krümmung und der Normalen der Flächen ergiebt, so findet man, wie zu erwarten, keine grofse Ausbeute. In dieser Beziehung kann der durch die Gleichung

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega$$

(16.) §. 3 ausgedrückte Satz als ein solcher angeführt werden, welcher, da er ebenso eine allgemeine Eigenschaft der Normalen einer Fläche ausspricht, in diese speciellere Theorie aufgenommen zu werden verdiente. Ferner kann aus der im §. 8 nachgewiesenen Eigenschaft der unendlich dünnen Strahlenbündel, dafs die Querschnitte derselben in den beiden Brennpunkten nicht unendlich kleine Flächen sondern unendlich kleine Linien sind, welche in den beiden Fokalebenen liegen, folgender nicht uninteressante, und wie ich glaube, noch nicht bekannte Satz für die Normalen der Flächen gewonnen werden:

Die beiden Hauptnormalebenen eines Punktes einer Fläche werden von allen diesem Punkte unendlich nahen Normalen so geschnitten, dafs die Entfernungen der Durchschnittspunkte von dem gegebenen Punkte der Fläche in der einen Hauptnormalebene gleich dem gröfsten, in der anderen gleich dem kleinsten Krümmungshalbmesser sind.

Geht man die bekannten Sätze über die Krümmung und die Normalen der Flächen durch, so findet man dieselben in allgemeinerer Form und Bedeutung in der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme wieder.

Betrachtet man zunächst die beiden Hauptnormalschnitte für einen Punkt einer Fläche, welche den gröfsten und den kleinsten Krümmungshalbmesser ergeben, so hat man in der allgemeinen Theorie einerseits die beiden Hauptebenen und andererseits die beiden Fokalebenen als diesen entsprechende Ebenen. Die mit den Hauptnormalebenen zusammenhängenden Eigenschaften der Normalen der Flächen vertheilen sich in der allgemeineren Theorie so, dafs ein Theil derselben den Hauptebenen, ein anderer Theil den Fokalebenen zufällt. Die Hauptebenen erhalten die Eigenschaften, stets real zu sein und auf einander senkrecht zu stehen, die Fokalebenen aber erhalten die Eigenschaft, dafs in ihnen die beiden den gegebenen Strahl schneidenden, unendlich nahen Strahlen liegen. Ebenso spalten sich die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Flächen in der allgemeineren Theorie in die Gränzpunkte der kürzesten Abstände und in die Brennpunkte, und demgemäfs auch die Flächen, in denen die Hauptkrümmungsmittelpunkte liegen, in die Gränzflächen der kürzesten Abstände und die Brennflächen. Den Gränzflächen bleibt hier nur die schon in ihrer Benennung ausgedrückte Eigenschaft, dafs sie den Raum begränzen, innerhalb dessen alle kürzesten Abstände je zweier unendlich nahen Strahlen liegen, die Brennflächen aber erhalten die Eigenschaft, dafs sie von allen Strahlen des Systems tangirt werden. Die beiden schönen von *Monge* gefundenen Eigenschaften der Flächen der Hauptkrümmungsmittelpunkte, nämlich erstens, dafs die Umrisse derselben sich stets rechtwinklig schneiden, von welchem Punkte des Raumes man sie auch betrachten mag, und zweitens, dafs die Wendungskurven aller abwickelbaren Flächen, in welche die Normalen sich zusammenfassen lassen, kürzeste Linien auf den Flächen der Hauptkrümmungsmittelpunkte sind, gehen, als den Systemen der Normalen einer Fläche speciell angehörende Eigenschaften, sowohl für die Gränzflächen der kürzesten Abstände als auch für die Brennflächen der allgemeinen Strahlensysteme verloren.

Die beiden Schaaren der Krümmungslinien der Flächen, in so fern sie die Eigenschaft haben, dafs die ihnen zugehörenden Normalen abwickelbare Flächen bilden, treten in den allgemeinen Strahlensystemen als die zwei im §. 5 mit Ω_1 und Ω_2 bezeichneten Schaaren abwickelbarer Flächen auf. Andererseits können aber auch die gradlinigen Flächen O_1 und O_2 als den Krümmungslinien der Flächen entsprechend betrachtet werden, weil auch diese in dem speciellen Falle, wo alle Strahlen Normalen einer Fläche sind, indem sie mit jenen zusammenfallen, die Krümmungslinien aus der Fläche ausschneiden.

Die Nabelpunkte der Flächen, für welche die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte sich vereinigen, so dafs alle unendlich nahen Normalen durch den Vereinigungspunkt derselben hindurchgehen, und in welchen die Hauptnormalebenen ihre bestimmten Richtungen verlieren, finden sich in den allgemeinen Strahlensystemen als die Hauptstrahlen, deren unendlich nahe Strahlen alle durch einen Punkt gehen, und deren Hauptebenen sowohl, als Fokalebenen unbestimmt sind.

Der *Euler*sche Satz, welcher lehrt, wie der Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnitts durch die beiden Hauptkrümmungshalbmesser und durch den Winkel bestimmt ist, den seine Ebene mit einer der Hauptebenen macht, ist als specieller Satz in der allgemeinen Gleichung (18.) §. 7 enthalten, welche für $\beta = \frac{\pi}{2}$, $r_1 = \varrho_1$, $r_2 = \varrho_2$ in die *Euler*sche Gleichung übergeht. Die allgemeine Methode im §. 7 läfst auch überhaupt die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte einer Fläche von einer neuen nicht uninteressanten Seite erkennen, indem sie zeigt, dafs der Drehungswinkel des Krümmungshalbmessers eines Normalschnitts mit einer, von dem unendlich nahen Punkte in der Ebene dieses Schnittes ausgehenden Normale, für die ganze Länge des Krümmungshalbmessers gerechnet, gleich einem Rechten ist, oder:

Wenn man an zwei unendlich nahe Punkte einer Fläche die Normalen zieht und ihnen die bestimmte Länge giebt, in welcher ihr Drehungswinkel gleich einem Rechten ist: so stellen sie die Krümmungshalbmesser der Fläche in diesen beiden unendlich nahen Punkten für den durch dieselben hindurchgehenden Normalschnitt dar.

Das *Gaufs*ische Krümmungsmaafs der Flächen findet sich in den allgemeinen Strahlensystemen als der allgemeinere Begriff des Dichtigkeitsmaafses wieder, und dem Ausdrucke desselben, als reciproker Werth des Products der beiden Hauptkrümmungshalbmesser, entspricht vollständig der im §. 6 gegebene Ausdruck des Dichtigkeitsmaafses, nach welchem dasselbe gleich ist dem reciproken Werthe des Products der Entfernungen der beiden Brennpunkte von dem betreffenden Punkte des Strahls. Für die Strahlensysteme, welche Normalen einer Fläche und darum auch Normalen der ganzen Schaar ihrer Parallelflächen sind, ist das Dichtigkeitsmaafs mit dem Krümmungsmaafse vollständig identisch, da in jedem Punkte des Raumes das Dichtigkeitsmaafs der Strahlen dem Krümmungsmaafse der durch diesen Punkt hindurchgehenden Parallelfläche gleich ist. Es zeigt sich auch hierin, wie die von *Gaufs* in die Wissenschaft eingeführten Begriffe durchgängig denjenigen Charakter wahrer Allgemeinheit an sich tragen, durch welchen sie ihren Einflufs weit über die Gebiete hinaus erstrecken, in denen sie ursprünglich entstanden sind.

Berlin, im October 1859.