Sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Par

A. Markoff à St. Petersbourg.

(Sécond mémoire.)

Il a été demontré dans mon premier mémoire*) „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies", qu'à toute classe de formes binaires quadratiques d'un déterminant positif donné correspond une certaine suite déterminée de nombres positifs entiers

(J) $$\ldots, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

et réciproquement; le rapport entre $2\sqrt{D}$ et le minimum de ces formes est égal au maximum de la somme

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \ddots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \ddots}} = \frac{2}{L_\varkappa},$$

où l'indice $\varkappa$ est un nombre variable.

Après avoir fait différentes suppositions relativement à la suite (J) et avoir varié l'indice $\varkappa$, je suis arrivé aux résultats suivants:

I. Pour chaque nombre positif

$$l < \frac{2}{3}$$

on peut trouver une quantité infinie de suites (J) satisfaisant à la condition

$$L_\varkappa \gtrless l$$

pour toute indice $\varkappa$.

II. A tout nombre positif

$$l > \frac{2}{3}$$

donné correspond un nombre limité de suites (J), satisfaisant à la condition

$$L_\varkappa \gtrless l$$

pour toute indice $\varkappa$.

---

*) Mathematische Annalen, Band XV., p. 381—406.

III. Si la suite (J) satisfait à la condition

$$L_x \geqq l > \frac{2}{3}$$

pour toute indice x, dans ce cas il lui correspond un certain système (Φ)

$$(\Phi) \qquad \begin{cases} \cdots, w_{-2}, & w_{-1}, & w_0, & w_1, & w_2, \cdots & W, \\ \cdots, v_{-2}, & v_{-1}, & v_0, & v_1, & v_2, \cdots & V, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdots, s_{-2}, & s_{-1}, & s_0, & s_1, & s_2, \cdots & S, \\ \cdots, r_{-2}, & r_{-1}, & r_0, & r_1, & r_2, \cdots & R \end{cases}$$

qui se compose d'un nombre limité de suites

$$W,\ V,\ \cdots,\ S,\ R,$$

dont W ne contient que des termes égaux

$$\cdots,\ w^0,\ w^0,\ w^0,\ w^0,\ \cdots$$

et toutes les autres se déduisent les unes des autres d'après la forme

$$\begin{array}{ll} \cdots, v^0, \underbrace{v^0-1}_{w_{-1}}, \ v^0, \underbrace{v^0-1}_{w_0}, \ v^0, \underbrace{v^0-1}_{w_1}, \cdots & V, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdots, r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_{-1}}, \ r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_0}, \ r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_1}, \cdots & R; \end{array}$$

enfin la suite (J) peut être mise sous la forme

$$\cdots, 2, 2, \underbrace{1}_{2r_{-1}}, \ 2, 2, \underbrace{1}_{2r_0}, \ 2, 2, \underbrace{1}_{2r_1}, \cdots$$

Je me propose de déterminer dans ce second mémoire la période de la suite (J) et le maximum de la somme $\frac{2}{L_x}$, les nombres

$$w^0,\quad v^0,\ \cdots,\ s^0,\quad r^0$$

étant connues.

§ 1.

Modifions quelques unes des notations précédentes afin de faciliter les discussions qui vont suivre.

Posons

$$w^0 = a_0,\quad v^0 = a_1,\ \cdots,\ s^0 = a_{n-2},\ r^0 = a_{n-1}$$

et désignons les suites

$$W,\ V,\ \cdots,\ S,\ R$$

par les symboles correspondantes:

$$(a_0),\ (a_0, a_1),\ \cdots,\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}),\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}).$$

Le symbole (a_0) représente la suite

$$\cdots, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, \cdots,$$

le symbole (a_0, a_1) — la suite

$$\cdots, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, \quad a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, \quad a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, \cdots,$$

et en général si $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu)$ représente une suite

$$\cdots, b_{\nu,-2}, b_{\nu,-1}, b_{\nu,0}, b_{\nu,1}, b_{\nu,2}, \cdots$$

la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu, a_{\nu+1})$ peut être mise sous la forme:

$$\cdots, a_{\nu+1}, \underbrace{a_{\nu+1} - 1}_{b_{\nu,-2}}, \quad a_{\nu+1}, \underbrace{a_{\nu+1} - 1}_{b_{\nu,-1}}, \quad a_{\nu+1}, \underbrace{a_{\nu+1} - 1}_{b_{\nu,0}}, \quad a_{\nu+1}, \underbrace{a_{\nu+1} - 1}_{b_{\nu,1}}, \cdots$$

Désignons en outre par $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\nu \\ a_0, a_1, \cdots, a_\nu \end{pmatrix}$ une suite:

$$\cdots, b_{\nu,-2}, b_{\nu,-2}, b_{\nu,-1}, b_{\nu,-1}, b_{\nu,0}, b_{\nu,0}, b_{\nu,1}, b_{\nu,1}, b_{\nu,2}, b_{\nu,2}, \cdots$$

qu'on obtient en répétant 2 fois chacun des termes de la suite

$$(a_0, a_1, \cdots, a_\nu).$$

De cette manière le symbole $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, 2 \end{pmatrix}$ représentera la suite (J') pour laquelle la suite R est exprimée par le symbole $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1})$.

En appliquant ces mêmes notations aux suites J_0 et J_1, auxquelles ne correspondent aucunes suites R, nous représenterons la première d'elles par le symbole $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la seconde par $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les suites $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu)$ et $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\nu \\ a_0, a_1, \cdots, a_\nu \end{pmatrix}$ sont périodiques. La manière de les obtenir l'indique suffisamment.

Pour trouver le nombre m_ν et la somme s_ν des termes renfermés dans une période*) de la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu)$ remarquons les relations

$$(1) \qquad m_{\nu+1} = m_\nu + s_\nu,$$

$$(2) \qquad s_{\nu+1} = m_\nu a_{\nu+1} + s_\nu(a_{\nu+1} - 1)$$

d'où l'on déduit

$$s_{\nu+1} = m_\nu + (a_{\nu+1} - 1) m_{\nu+1}.$$

De même on trouve

$$(3) \qquad s_\nu = m_{\nu-1} + (a_\nu - 1) m_\nu.$$

---

*) Ici comme dans toutes les discussions qui vont suivre il s'agit de périodes avec le minimum de termes.

En substituant cette valeur de $s_\varkappa$ dans la formule (1) nous aurons

$$m_{\nu+1} = a_\nu m_\varkappa + m_{\nu-1}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) et les égalités évidentes

$$m_0 = 1, \quad m_1 = a_0 + 1$$

nous indiquent, que les fractions $\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu}$ et $\frac{s_\nu}{m_\nu}$ sont irréductibles et égales respectivement à

$$a_\nu + \cfrac{1}{a_{\nu+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 + 1}}}, \qquad a_\varkappa - 1 + \cfrac{1}{a_{\nu+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 + 1}}}$$

Quant au nombre et à la somme des termes, renfermés dans une période de la suite $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\nu \end{pmatrix}$, elles sont respectivement le double de $m_\varkappa$ et le double de $s_\varkappa$.

§ 2.

A chaque suite $(a_0, a_1, \cdots, a_{\nu-1}, a_\nu)$ correspondent plusieurs périodes différentes qu'on obtient de l'une d'elles à l'aide de substitutions circulaires de tous ses termes.

Si par exemple

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m \tag{Π_1}$$

est une des périodes de la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\nu)$, toutes les autres périodes seront

$$(\Pi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \\ \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{m-2}, \\ \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}. \end{array} \right.$$

Nous nous occuperons particulièrement de deux de ces périodes.

Désignons l'une d'elles par $[a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\nu]$ et admettons qu'elle soit la période Π_1; désignons l'autre par le symbole

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa\}$$

et admettons qu'elle soit

$$\alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \cdots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\mu-1}. \tag{Π_2}$$

Formons de Π_1 et de Π_2 les nouvelles périodes

$$\underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_1},\quad a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_2},\quad a_{\varkappa+1},\ \cdots,\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_m},\quad a_{\varkappa+1}$$

et

$$a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_\mu},\ \cdots,\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_m},\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_1},\ \cdots,\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_{\mu-1}}$$

et entendons nous de désigner la première par $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\}$, la seconde par $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}]$. Ce procédé peut être consideré comme une règle générale, car il ne contredit en rien les principes établis précédemment à l'égard des suites $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$.

Il nous donne les moyens de déterminer successivement les périodes

$$[a_0, a_1],\quad \{a_0, a_1, a_2\},\quad [a_0, a_1, a_2, a_3],\ \cdots$$

et

$$\{a_0, a_1\},\quad [a_0, a_1, a_2],\quad \{a_0, a_1, a_2, a_3\},\ \cdots$$

les périodes $\{a_0\}$ et $[a_0]$ étant connues. La suite (a_0) se compose de termes égaux à a_0, par conséquent les symboles $\{a_0\}$ et $[a_0]$ l'un et l'autre désignent une même période à un seul terme a_0

De cette manière les symboles $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ sont complètement déterminés.

Par exemple $[a_0, a_1]$ et $\{a_0, a_1\}$ seront

$$a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{a_0}\quad \text{et}\quad \underbrace{a_1-1}_{a_0},\ a_1.$$

§ 3.

En comparant les périodes Π_1 et Π_2 avec n'importe laquelle des périodes Π

$$\alpha_\omega,\ \alpha_{\omega+1},\ \cdots,\ \alpha_m,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{\omega-1},$$

nous trouverons toujours parmi les différences

$$\alpha_1-\alpha_\omega,\ \alpha_2-\alpha_{\omega+1},\ \cdots,\ \alpha_{m-\omega+1}-\alpha_m,\ \alpha_{m-\omega+2}-\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m-\alpha_{\omega-1}$$

quelques unes différentes de zéro dont la première sera égale à $+1$ et la dernière à -1. De même parmi

$$\alpha_\mu-\alpha_\omega,\ \cdots,\ \alpha_{\mu-1}-\alpha_{\omega-1}$$

la première des différences non égales à zéro sera -1 et la dernière $+1$.

En effet la propriété ci-dessus mentionnée distingue évidemment $[a_0, a_1]$ et $\{a_0, a_1\}$ l'une de l'autre et de toutes les autres périodes de la suite (a_0, a_1):

$$\underbrace{a_1-1}_{a_0-1},\ a_1,\ a_1-1;$$

$$\underbrace{a_1-1}_{a_0-2},\ a_1,\ a_1-1,\ a_1-1;$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$a_1-1,\ a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{a_0-1}.$$

La loi de formation de ces périodes $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}]$ et $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\}$ nous montre en même temps qu'elles jouissent de cette propriété toutes les fois que les périodes $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ et $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ la possèdent.

Notre théorème a donc lieu toutes les fois qu'il y a plus d'une période qui correspond à la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa)$.

De même il est facile de démontrer que le premier et le dernier terme de la période $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ sont respectivement égaux à

$$a_\varkappa,\ a_\varkappa-1$$

et les autres termes de cette période forment une suite symmétrique dans laquelle deux termes également distants des extrêmes sont égaux entre eux.

Enfin la période $\{a_0, a_1, \cdots a_\varkappa\}$ est inverse à la précédente.

§ 4.

En vertu des résultats précédents le maximum de la quantité $\frac{2}{L_\varkappa}$ pour la suite $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \end{pmatrix}$ est égal à

$$\xi' + \frac{1}{\eta'}$$

où la valeur de ξ' est déterminée par le développement

$$\xi' = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\xi'}}}}}}}}$$

et celle de η' par le suivant

$$\eta' = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\eta'}}}}}}$$

La somme $\xi' + \frac{1}{\eta'}$ peut être facilement exprimée à l'aide des fractions irréductibles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ respectivement égales à

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1}}}}}}}$$

et

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2}}}}}}$$

A cet effet remarquons que ξ' est égal à la racine positive de l'équation

$$Q\xi^2 - (P - Q')\,\xi - P' = 0$$

et $\frac{-1}{\eta'}$ à la racine négative de la même équation

Nous avons par conséquent en vertu d'une formule connue

(5) $$\text{le maximum de } \frac{1}{L_\varkappa} = \sqrt{\frac{P'}{Q} + \left(\frac{P - Q'}{2Q}\right)^2}\,.$$

§ 5.

Les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa$ dans les symboles

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa), \quad \begin{pmatrix} a_0, \cdots, a_\varkappa \\ a_0, \cdots, a_\varkappa \end{pmatrix}, \quad [a_0, \cdots, a_\varkappa], \quad \{a_0, \cdots, a_\varkappa\}$$

par la nature même de la question que nous discutons sont des entiers positifs. Nous croyons utile cependant d'étendre la définition des symboles sur le cas $a_0 = 0$.

Convenons de déduire à l'aide des mêmes procédés que nous avons employés pour $a_0 > 0$ les séries

$$(0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\nu,\ a_{\varkappa+1}),\quad \begin{pmatrix}0, & a_1, & a_2, & \cdots, & a_\varkappa, & a_{\nu+1}\\ 0, & a_1, & a_2, & \cdots, & a_\varkappa, & a_{\varkappa+1}\end{pmatrix}$$

de la série

$$(0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa)$$

et les périodes

$$[0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}],\quad \{0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\}$$

des périodes

$$\{0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa\},\quad [0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa].$$

De cette manière le symbole $(0,\ a_1)$, par exemple, représentera

$$\cdots,\ a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{0},\ a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{0},\ a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{0},\ a_1,\ \cdots$$

ou simplement

$$\cdots,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ \cdots.$$

En général il est facile de voir que les symboles

$$(0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa),\quad \begin{pmatrix}0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa\\ 0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa\end{pmatrix},\quad [0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa],$$
$$\{0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}$$

sont équivalentes à

$$(a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa),\quad \begin{pmatrix}a_1, & \cdots, & a_\varkappa\\ a_1, & \cdots, & a_\varkappa\end{pmatrix},\quad [a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa],\quad \{a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}.$$

§ 6.

Introduisons encore une notation nouvelle. Si les périodes

$$\begin{array}{ll}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_t & A,\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s & B,\\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_r & C,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n & F\end{array}$$

sont telles que pour obtenir A nous devons écrire successivement b fois la période B, c fois C, $\cdots$ et f fois F, nous désignerons A par la formule symbolique

$$A = bB + cC + \cdots + fF,$$

qui indiquera clairement la manière dont A est formée.

En appliquant cette notation pour exprimer la manière de composer les périodes $[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}]$ et $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\}$ nous aurons les formules:

$$(6)\quad \begin{cases} [a_0, a_1, \cdots, a_\nu, a_{\varkappa+1}] = [a_{\nu+1}] + \alpha_\mu[a_{\varkappa+1} - 1] + \cdots + [a_{\varkappa+1}] \\ \qquad + \alpha_m[a_{\nu+1} - 1] + [a_{\varkappa+1}] + \alpha_1[a_{\varkappa+1} - 1] \\ \qquad + \cdots + [a_{\nu+1}] + \alpha_{\mu-1}[a_{\nu+1} - 1] \\ \text{et} \\ \{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\} = \alpha_1\{a_{\varkappa+1} - 1\} + \{a_{\nu+1}\} + \alpha_2\{a_{\varkappa+1} - 1\} \\ \qquad + \{a_{\varkappa+1}\} + \cdots + \alpha_m\{a_{\varkappa+1} - 1\} + \{a_{\varkappa+1}\}, \end{cases}$$

où

$$\{\alpha_\mu\} + \cdots + \{\alpha_m\} + \{\alpha_1\} + \cdots + \{\alpha_{\mu-1}\} = \{a_0, a_1, \cdots, a_\nu\}$$

et

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + \cdots + [\alpha_m] = [a_0, a_1, \cdots, a_\nu].$$

Si $\varkappa = 0$ les formules (6) se réduisent aux suivantes

$$(7)\quad \begin{cases} [a_0, a_1] = [a_1] + a_0[a_1 - 1], \\ \{a_0, a_1\} = a_0\{a_1 - 1\} + \{a_1\}, \end{cases}$$

où $a_0 + 1$ et a_1 sont des nombres entiers positifs quelconques.

En posant ensuite dans les formules (6) $\varkappa = 1$ et prenant en considération les formules (7), nous trouvons que pour former la période $[a_0, a_1, a_2]$ il faut écrire successivement a_0 fois la période

$$[a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1]$$

et une fois la période

$$[a_2] + a_1[a_2 - 1],$$

et pour former la période $\{a_0, a_1, a_2\}$ il faut écrire une fois la période

$$a_1\{a_2 - 1\} + \{a_2\}$$

et ensuite a_0 fois la période

$$(a_1 - 1)\cdot\{a_2 - 1\} + \{a_2\}.$$

Cependant en vertu des mêmes formules (6) on a

$$[a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1] = [a_1 - 1, a_2],$$
$$a_1\{a_2 - 1\} + \{a_2\} = \{a_1, a_2\},$$
$$[a_2] + a_1[a_2 - 1] = [a_1, a_2],$$
$$(a_1 - 1)\{a_2 - 1\} + \{a_2\} = \{a_1 - 1, a_2\}.$$

Donc

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0[a_1 - 1, a_2] + [a_1, a_2],$$
$$\{a_0, a_1, a_2\} = \{a_1, a_2\} + a_0\{a_1 - 1, a_2\}.$$

Passons maintenant au cas plus général. Soient

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \varphi, \psi, \omega,$$
$$\alpha', \beta', \gamma', \cdots\cdots, \varrho', \sigma',$$
$$\alpha'', \beta'', \gamma'', \cdots\cdots, \lambda'', \mu''$$

les périodes correspondantes

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\},$$

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\}$$

et

$$\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\}$$

et supposons, que l'égalité symbolique

$$\begin{aligned}(7\,\mathrm{a})\qquad \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\} &= a_0 \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\} \\ &+ \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\}\end{aligned}$$

a lieu.

Alors il s'ensuit des formules (6), que la période

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}]$$

s'obtient si l'on écrit successivement a_0 fois la période

$$[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l} - 1]$$

et une fois la période

$$[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l} - 1].$$

Cependant les mêmes formules (6) donnent

$$\begin{aligned}[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l} - 1] \\ = [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l} - 1] \\ = [a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}].\end{aligned}$$

Donc si l'égalité (7a) a réellement lieu, on aura

$$\begin{aligned}[a_0, a_1, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}] &= a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}] \\ &+ [a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}].\end{aligned}$$

De même en supposant l'une des égalités suivantes

$$\begin{aligned}[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}] &= [a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}] + a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}], \\ \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}\} &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l}\} + a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}\}, \\ [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}] &= a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}] + [a_1, a_2, \cdots, a_{2l}],\end{aligned}$$

nous avons l'une des égalités correspondantes

$$\begin{aligned}\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}\} &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}\} \\ &+ a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}\}, \\ [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}] &= [a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}] \\ &+ a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}], \\ \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}\} &= a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}\}, \\ &+ \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}\}.\end{aligned}$$

En comparant ces résultats avec les égalités (7) il est facile de voir qu'on aura

$$
(8) \quad \left\{
\begin{aligned}
[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] &= [a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\quad + a_0 [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} &= a_0 \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\quad + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t}] &= a_0 [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + [a_1, a_2, \cdots, a_{2t}], \\
\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t}\} &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t}\} \\
&\quad + a_0 \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\},
\end{aligned}
\right.
$$

où $t, a_0 + 1, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}, a_{2t}$ sont des nombres entiers et positifs quelconques.

En substituant $a_0 + 1$ au lieu de a_0 dans les formules (8) nous aurons

$$
\begin{aligned}
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}] &= [a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\quad + (a_0 + 1) \cdot [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}\} &= (a_0 + 1) \cdot \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\quad + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}] &= (a_0 + 1) \cdot [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + [a_1, a_2, \cdots, a_{2t}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}\} &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + (a_0 + 1) \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\}.
\end{aligned}
$$

D'où l'on déduit

$$
(9) \quad \left\{
\begin{aligned}
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}] &= [a_0, a_1, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\quad + [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}\} &= \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\quad + \{a_0, a_1, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}] &= [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + [a_0, a_1, \cdots, a_{2t}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}\} &= \{a_0, a_1, \cdots, a_{2t}\} \\
&\quad + \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 7.

Soit maintenant

$$a_\varkappa = 2$$

et passons aux suites $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \end{pmatrix}$ dont nous avons particulièrement à nous occuper. Dans ce cas en vertu des résultats du § 3. nous avons

(10)
$$\cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}}}}}.$$

La première de ces fractions, conformément aux notations du § 4., est égale à $\frac{P - 2Q}{Q}$.

En outre en vertu de formules connues de la théorie des fractions continues nous avons

$$\frac{P - P'}{Q - Q'} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1}}}}}}}$$

et ensuite

$$\frac{Q - Q'}{Q} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}}}}}.$$

Ainsi de l'équation (10) nous avons

$$\frac{P-2Q}{Q}=\frac{Q-Q'}{Q},$$

ou simplement

$$(11) \qquad Q'=3Q-P.$$

En substituant cette valeur de Q' dans l'égalité évidente

$$PQ'-P'Q=+1$$

nous obtenons pour la valeur de P' l'expression

$$(12) \qquad P'=3P-\frac{P^2+1}{Q}.$$

Les égalités (11) et (12) nous permettent d'éliminer P' et Q' de la formule (5).

Nous avons donc pour la suite $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{\nu-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \end{pmatrix}$ la formule suivante

$$(13) \qquad \text{le maximum de } \frac{1}{L_\varkappa}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{Q^2}}.$$

Remarquons encore que les formules (11), (12) et (13) peuvent être appliquées aussi et aux suites $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si nous admettons pour la première

$$\frac{P}{Q}=2+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{Q'}=2$$

et pour la seconde

$$\frac{P}{Q}=1+\frac{1}{1} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{Q'}=1.$$

Donc pour calculer la valeur du maximum de $L_\varkappa$ il suffit de connaître la valeur correspondante de Q. Quant aux nombres Q, nous trouverons pour les exprimer des formules correspondantes aux égalités symboliques (9).

§ 8.

Soient

$$\frac{P_{\alpha,\lambda}}{Q_{\alpha,\lambda}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2}}}}}, \qquad \frac{P'_{\alpha,\lambda}}{Q'_{\alpha,\lambda}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda}}}},$$

$$\frac{P_{\mu,\omega}}{Q_{\mu,\omega}}=2+\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu+\ddots+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{2}}}}}, \quad \frac{P'_{\mu,\omega}}{Q'_{\mu,\omega}}=2+\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu+\ddots+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{\omega}}}},$$

$$\frac{P_{\alpha,\omega}}{Q_{\alpha,\omega}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{P_{\mu,\omega}:Q_{\mu,\omega}}}}}}}$$

et

$$\frac{P'_{\alpha,\omega}}{Q'_{\alpha,\omega}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{P'_{\mu,\omega}:Q'_{\mu,\omega}}}}}}}$$

six fractions irréductibles pour lesquelles

$$(11\text{a}) \qquad \begin{cases} Q'_{\alpha,\lambda}=3\,Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda}\,, \\ Q'_{\mu,\omega}=3\,Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega}\,, \\ Q'_{\alpha,\omega}=3\,Q_{\alpha,\omega}-P_{\alpha,\omega}. \end{cases}$$

En vertu de formules connues relatives aux fractions continues

$$P_{\alpha,\lambda}\,Q'_{\alpha,\lambda}-P'_{\alpha,\lambda}\,Q_{\alpha,\lambda}=+1\,,$$
$$P_{\mu,\omega}\,Q'_{\mu,\omega}-P'_{\mu,\omega}\,Q_{\mu,\omega}=+1\,,$$
$$P_{\alpha,\omega}\,Q'_{\alpha,\omega}-P'_{\alpha,\omega}\,Q_{\alpha,\omega}=+1\,,$$

et encore

$$P_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}\,P_{\mu,\omega}+P'_{\alpha,\lambda}\,Q_{\mu,\omega}\,,\quad P'_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}\,P'_{\mu,\omega}+P'_{\alpha,\lambda}\,Q'_{\mu,\omega}\,,$$
$$Q_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}\,P_{\mu,\omega}+Q'_{\alpha,\lambda}\,Q_{\mu,\omega}\,,\quad Q'_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}\,P'_{\mu,\omega}+Q'_{\alpha,\lambda}\,Q'_{\mu,\omega}\,,$$

d'où en vertu des formules (11a) nous déduisons

$$(12\text{a}) \qquad \begin{cases} P'_{\alpha,\lambda}=3\,P_{\alpha,\lambda}-\dfrac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\,, \\[2ex] P'_{\mu,\omega}=3\,P_{\mu,\omega}-\dfrac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\,, \\[2ex] P'_{\alpha,\omega}=3\,P_{\alpha,\omega}-\dfrac{P^2_{\alpha,\omega}+1}{Q_{\alpha,\omega}} \end{cases}$$

et

$$(14)\begin{cases} P_{\alpha,\omega} = P_{\alpha,\lambda} P_{\mu,\omega} + \left(3 P_{\alpha,\lambda} - \dfrac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\right) Q_{\mu,\omega}, \\ Q_{\alpha,\omega} = Q_{\alpha,\lambda} P_{\mu,\omega} + (3 Q_{\alpha,\lambda} - P_{\alpha,\lambda}) Q_{\mu,\omega}, \\ Q'_{\alpha,\omega} = Q_{\alpha,\lambda}\left(3 P_{\mu,\omega} - \dfrac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\right) + (3 Q_{\alpha,\lambda} - P_{\alpha,\lambda})(3 Q_{\mu,\omega} - P_{\mu,\omega}). \end{cases}$$

En substituant ces valeurs de $P_{\alpha,\omega}$, $Q_{\alpha,\omega}$, $Q'_{\alpha,\omega}$ dans la dernière des formules (11a) nous aurons

$$Q_{\alpha,\lambda}\left(3 P_{\mu,\omega} - \frac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\right) + (3 Q_{\alpha,\lambda} - P_{\alpha,\lambda})(3 Q_{\mu,\omega} - P_{\mu,\omega})$$

$$= 3 Q_{\alpha,\lambda} P_{\mu,\omega} + 3(3 Q_{\alpha,\lambda} - P_{\alpha,\lambda}) Q_{\mu,\omega} - P_{\alpha,\lambda} P_{\mu,\omega} - \left(3 P_{\alpha,\lambda} - \frac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\right) Q_{\mu,\omega}$$

qui devient après quelques simples reductions

$$(15)\qquad Q^2_{\alpha,\lambda} + Q^2_{\mu,\omega} + (Q_{\mu,\omega} P_{\alpha,\lambda} - P_{\mu,\omega} P_{\alpha,\lambda})^2 = 3 Q_{\alpha,\lambda} Q_{\mu,\omega}(Q_{\mu,\omega} P_{\alpha,\lambda} - P_{\mu,\omega} Q_{\alpha,\lambda}).$$

Quant à la quantité

$$Q_{\mu,\omega} P_{\alpha,\lambda} - P_{\mu,\omega} Q_{\alpha,\lambda}$$

on voit, qu'en vertu de la seconde des formules (14) elle est égale à

$$3 Q_{\alpha,\lambda} Q_{\mu,\omega} - Q_{\alpha,\omega}.$$

Nous pourrons donc écrire au lieu de la formule (15)

$$Q^2_{\alpha,\lambda} + Q^2_{\mu,\omega} + (3 Q_{\alpha,\lambda} Q_{\mu,\omega} - Q_{\alpha,\omega})^2 = 3 Q_{\alpha,\lambda} Q_{\mu,\omega}(3 Q_{\alpha,\lambda} Q_{\mu,\omega} - Q_{\alpha,\omega})$$

d'où

$$(16)\qquad Q^2_{\alpha,\lambda} + Q^2_{\mu,\omega} + Q^2_{\alpha,\omega} = 3 Q_{\alpha,\lambda} Q_{\mu,\omega} Q_{\alpha,\omega}.$$

§ 9.

De ces considérations générales et des formules (9) et (11) il suit*)

$$(17)\begin{cases} Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\nu-1}, 2\} + Q^2\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ \qquad + Q^2\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ = 3 Q\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\nu-1}, 2\} \cdot Q\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ \qquad \cdot Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\nu-1}, 2\} \end{cases}$$

*) Nous désignons généralement par le symbole $Q\{a, b, c, \cdots, l\}$ un nombre Q (§ 4.) correspondant à la période $\{a, b, c, \cdots, l\}$. De même les nombres P, P' et Q' correspondants à cette même période $\{a, b, c, \cdots, l\}$ seront designés par $P\{a, b, c, \cdots, l\}$, $P'\{a, b, c, \cdots, l\}$ et $Q'\{a, b, c, \cdots, l\}$.

où

$$\varkappa-1,\ a_0+1,\ a_1,\ a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},$$

sont des nombres entiers positifs quelconques.

En vertu des mêmes considérations nous avons

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}&Q^2\{a_0+2,a_1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}+Q^2\{a_0+1,a_1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\&\qquad+Q^2\{a_1-1,a_2,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\&=3Q\{a_0+2,a_1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\cdot Q\{a_0+1,a_1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\&\qquad\cdot Q\{a_1-1,a_2,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\},\\&Q^2\{1,a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}+Q^2\{a_0+1,a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\&\qquad+Q^2\{a_0,a_1,\cdots\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\&=3Q\{1,a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\cdot Q\{a_0+1,a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\&\qquad\cdot Q\{a_0,a_1,\cdots\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}.\end{aligned}\right.$$

En comparant la formule (17) avec les formules (18) nous obtenons

$$(19)\quad\left(\begin{aligned}&Q\{a_0+2,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}+Q\{a_0,a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\-&3Q\{a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\cdot Q\{a_1-1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\end{aligned}\right)$$

$$\cdot\left(\begin{aligned}&Q\{a_0+2,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\-&Q\{a_0,a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\end{aligned}\right)=0$$

et

$$(20)\quad\left(\begin{aligned}&Q\{1,a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}+Q\{a_1-1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\-&3Q\{a_0+1,a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\cdot Q\{a_0,a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\end{aligned}\right)$$

$$\cdot\left(\begin{aligned}&Q\{1,a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\-&Q\{a_1-1,a_2,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\end{aligned}\right)=0.$$

Or il n'est pas difficile de voir qu'on a

$$Q\{a_0+2,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}>Q\{a_0,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}$$

et

$$Q\{1,a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}>Q\{a_1-1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}.$$

Donc en divisant (19) par le facteur

$$Q\{a_0+2,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}-Q\{a_0,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}$$

et (20) par le facteur

$$Q\{1,a_0+1,a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}-Q\{a_1-1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}$$

nous aurons définitivement

$$(21)\quad \begin{cases} Q\{a_0+2,\ a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}+Q\{a_0,\ a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\} \\ \quad = 3\,Q\{a_1-1,\ a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\cdot Q\{a_0+1,\ a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}, \\ Q\{1,\ a_0+1,\ a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}+Q\{a_1-1,\ a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\} \\ \quad = 3\,Q\{a_0,\ a_1,\cdots\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\cdot Q\{a_0+1,\ a_1,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}. \end{cases}$$

Ces égalités donnent un moyen facile de calculer successivement les nombres Q lorsqu'on connait

$$Q\{2\},\ Q\{1,2\},\ Q\{2,2\},\cdots,\ Q\{a,2\},\ Q\{a+1,2\},\cdots$$

et

$$Q\{1,1,2\},\ Q\{1,2,2\},\cdots,\ Q\{1,a,2\},\ Q\{1,a+1,2\},\cdots$$

Pour ces dernières quantités la formule (17) donne

$$(22)\qquad \begin{aligned} &Q^2\{1,a,2\}+Q^2\{a,2\}+Q^2\{a-1,2\} \\ &= 3\,Q\{1,a,2\}\cdot Q\{a,2\}\cdot Q\{a-1,2\} \end{aligned}$$

a étant un nombre entier positif quelconque.

En outre nous avons

$$(23)\quad \begin{cases} Q\{1\}=1, & Q\{2\}=2, \quad Q\{1,2\}=5, \\ P\{a,2\}=Q\{a+1,2\}, & P\{a-1,2\}=Q\{a,2\}, \\ Q'\{a,2\}=Q\{a-1,2\}, & P'\{a-1,2\}=Q\{a-1,2\} \end{cases}$$

d'où en ayant égard aux formules (11) et (12) nous déduisons

$$(24)\qquad \begin{cases} Q\{2\} = 3\,Q\{1\}\cdot Q\{1\}-Q\{1\}, \\ Q\{1,2\} = 3\,Q\{2\}\cdot Q\{1\}-Q\{1\}, \\ Q\{a+1,2\} = 3\,Q\{a,2\}\cdot Q\{1\}-Q\{a-1,2\} \end{cases}$$

et encore

$$(25)\quad \begin{cases} Q^2\{1\}+Q^2\{1\}+Q^2\{1\}=3\,Q\{1\}\cdot Q\{1\}\cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{2\}+Q^2\{1\}+Q^2\{1\}=3\,Q\{2\}\cdot Q\{1\}\cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{a,2\}+Q^2\{a-1,2\}+Q^2\{1\}=3\,Q\{a,2\}\cdot Q\{a-1,2\}\cdot Q\{1\}. \end{cases}$$

En comparant enfin l'égalité (22) avec la dernière des égalités (25), en vertu de l'inégalité

$$Q\{1,a,2\}>Q\{1\}$$

nous aurons

(26) $$Q\{1,a,2\} = 3Q\{a,2\}\,Q\{a-1,2\} - Q\{1\},$$

Donc pour trouver $Q\{1, a, 2\}$ il suffit de connaitre $Q\{a, 2\}$ et $Q\{a-1, 2\}$ qui s'obtiennent facilement des formules (24).

§ 10.

Disons encore quelques mots sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation

(16a) $$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

que nous avons obtenue à la fin du § 8. Cette équation est symmétrique relativement aux termes inconnus x, y, z; par conséquent, connaissant l'une de ses solutions

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

il sera facile d'en trouver encore les cinq suivantes:

$$\begin{aligned} x &= \alpha, & y &= \gamma, & z &= \beta; \\ x &= \beta, & y &= \gamma, & z &= \alpha; \\ x &= \beta, & y &= \alpha, & z &= \gamma; \\ x &= \gamma, & y &= \alpha, & z &= \beta; \\ x &= \gamma, & y &= \beta, & z &= \alpha. \end{aligned}$$

Ces six solutions peuvent, évidemment, être differéntes, nous les envisagerons cependant comme une seule et désignerons par

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma.$$

Cela posé les formules du paragraphe précédent donneront les solutions suivantes de l'équation (16a)

$$(\Omega)\quad \left\{\begin{array}{l} x,y,z = Q\{1\},\ Q\{1\},\ Q\{1\}; \\ x,y,z = Q\{2\},\ Q\{1\},\ Q\{1\}; \\ x,y,z = Q\{1,2\},\ Q\{2\},\ Q\{1\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{a,2\},\ Q\{a-1,2\},\ Q\{1\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{1,a,2\},\ Q\{a,2\},\ Q\{a-1,2\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{b,a,2\},\ Q\{b-1,a,2\},\ Q\{a-1,2\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{l,j,i,\cdots,a,2\},\ Q\{l-1,j,i,\cdots,a,2\},\ Q\{j-1,i,\cdots,a,2\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que la même équation a une autre solution

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

qui ne se trouve pas dans l'ensemble (Ω).

Dans ce cas les nombres α, β, γ ne peuvent être tous égaux entre eux, car si

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

la solution

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

doit être identique à la première des solutions (Ω).

Donc si α est le plus grand des nombres α, β, γ et γ le plus petit nous aurons

$$\alpha > \beta > \gamma \quad \text{et} \quad \alpha > \gamma.$$

L'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma$$

nous donne

$$3\beta\gamma > \alpha > \beta\gamma.$$

En la résolvant par rapport à α on trouve

$$\alpha = \frac{3\beta\gamma \pm \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)}}{2}.$$

Des deux signes $\pm$ c'est $+$ qu'il faut garder, car nous avons pour toutes les valeurs entières positives de β et de γ

$$\frac{3\beta\gamma - \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)}}{2} < \beta\gamma.$$

Il en résulte de là

$$3\beta\gamma > \alpha > \frac{3}{2}\beta\gamma$$

et la différence

$$3\beta\gamma - \alpha$$

se trouve comprise entre 0 et α.

En la désignant par δ nous trouvons

$$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 3\beta\gamma\delta.$$

Donc de la solution donnée:

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

on peut déduire une autre

$$x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta$$

où

$$\beta + \gamma + \delta < \alpha + \beta + \gamma.$$

Cette nouvelle solution aussi n'est pas comprise dans l'ensemble (Ω), parceque dans le cas contraire la première solution

$$x,\ y,\ z = 3\beta\gamma - \delta,\ \beta,\ \gamma$$

devrait aussi être comprise dans l'ensemble (Ω) conformément aux formules du § 9. C'est pourquoi en transformant la solution

$$x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta$$

d'après le procédé indiqué nous aurons encore une solution

$$x,\ y,\ z = \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

qui n'est pas comprise dans l'ensemble (Ω) et satisfait à l'inégalité

$$\beta' + \gamma' + \delta' < \beta + \gamma + \delta.$$

En continuant à discuter de la même manière, nous aurons une suite infinie de solutions de l'équation (16 a)

$$\begin{array}{l} x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta, \\ x,\ y,\ z = \beta',\ \gamma',\ \delta', \\ x,\ y,\ z = \beta'',\ \gamma'',\ \delta'', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

et une série infinie décroissante de nombres positifs et entiers

$$\alpha + \beta + \gamma,\quad \beta + \gamma + \delta,\quad \beta' + \gamma' + \delta',\quad \beta' + \gamma'' + \delta'',\ \cdots$$

Ce qui n'est pas possible, car il n'existe qu'un nombre limité de nombres positifs entiers moindres que la limite donnée

$$\alpha + \beta + \gamma.$$

Par conséquent toutes les solutions en nombres positifs et entiers de l'equation (16 a) doivent être comprises dans l'ensemble (Ω).

Table des périodes $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}$ pour les valeurs de $\varkappa$ moindres de 6.

Symboles	$\{x\}$	$\{\gamma - 1,\ x+1\}$	$\{\delta - 1,\ \gamma,\ x+1\}$	$\{\varepsilon - 1,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$
Périodes	x	$\gamma - 1$ fois x $1 \cdots\cdots\cdots x+1$	$\gamma \cdots\cdots x$ $1 \cdots\cdots x+1$ $\delta - 1 \begin{cases} \gamma - 1 \cdots x \\ 1 \cdots\cdots x+1 \end{cases}$	$\varepsilon - 1 \begin{cases} \gamma \cdots\cdots x \\ 1 \cdots\cdots x+1 \\ \delta - 1 \begin{cases} \gamma - 1 \cdots x \\ 1 \cdots\cdots x+1 \end{cases} \end{cases}$ $\gamma \cdots\cdots x$ $1 \cdots\cdots x+1$ $\delta \begin{cases} \gamma - 1 \cdots x \\ 1 \cdots\cdots x+1 \end{cases}$

Symboles	$\{\eta-1,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$	$\{\vartheta-1,\ \eta,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$
Périodes	$\begin{array}{l}\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\\\eta-1\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-1\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}$	$\begin{array}{l}\vartheta-1\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\\\eta-1\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-1\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\\\eta\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-1\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}$

Remarque. Le lecteur trouvera les mêmes périodes dans la table, ajoutée au tome I de l'ouvrage de J. Bernoulli: „Recueil pour les astronomes."