Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten.

Von P. Gordan in Giessen.

Die Gleichungen:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} X_1 = a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 \cdots\cdot a_{1,\,r}x_r = 0 \\ X_2 = a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 \cdots\cdot a_{2,\,r}x_r = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_s = a_{s1}\ x_1 + a_{s2}x_2 \cdots\cdot a_{s,\,r}x_r = 0 \end{cases}$$

bei denen die a_{ik} sämmtlich reell sein sollen, mögen ein System S genannt werden.

Ich will hier untersuchen, unter welchen Umständen ein solches System durch positive Werthe der x, von denen einige aber nicht alle 0 sein dürfen, befriedigt werden können; in solchem Falle soll das System *auflösbar* heissen, im entgegengesetzten *unauflösbar*. Das System S ist jedenfalls *unauflösbar, wenn aus den Gleichungen des Systems eine Gleichung:*

$$F = A_1 x_1 + A_2 x_2 \,.\,.\,.\,.\, A_r x_r = 0$$

ableitbar ist, in welcher sämmtliche Coefficienten grösser als 0 *sind.*

Ich stelle die Behauptung auf, dass sich dieser Satz umkehren lasse, dass also der folgende gelte:

Ist das System S unauflösbar, giebt es also ausser dem selbstverständlichen Werthsysteme:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 0 \,.\,.\,.\quad x_r = 0$$

kein aus positiven Zahlen, die 0 *inbegriffen, bestehendes Werthsystem der x, welches die Formeln* (I) *befriedigt, dann kann man aus denselben eine Gleichung:*

$$\text{(II)}\qquad F = A_1 x_1 + A_2 x_2 \,.\,.\,.\,.\, A_r x_r = 0$$

ableiten, worin alle A grösser als 0 *sind.*

Beweis.

Besteht das System S nur aus einer Gleichung, ist also $s = 1$, dann ist unser Satz selbstverständlich; man kann ihn der Reihe nach für Systeme beweisen, welche aus 2, 3, 4 ... Gleichungen bestehen. Bei dem Beweise für s Gleichungen will ich die Annahme machen, er gelte für Systeme von weniger Gleichungen; beweist man den Satz unter dieser Voraussetzung für ein System von s Gleichungen, so hat er allgemeine Geltung.

Zunächst soll nun gezeigt werden, dass, wenn überhaupt eine Gleichung mit positiven Coefficienten abgeleitet werden kann, in welcher einige x vorkommen, etwa die Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad G = \alpha_{\nu+1} x_{\nu+2} + \alpha_{\nu+2} x_{\nu+2} \ldots + \alpha_r x_r = 0,$$

dass man dann auch eine Gleichung $F = 0$ (II) herstellen kann, in welcher alle x auftreten.

Setzt man nämlich in den $s - 1$ ersten Gleichungen

$$X_1 = 0 \ldots X_{s-1} = 0$$

für die Grössen $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots x_r$ den Werth Null, dann erhält man ein System U, welches nur noch die Variabeln $x_1 \ldots x_\nu$ enthält. Dasselbe ist nicht auflösbar, weil sonst auch das System S auflösbar wäre. Da U nur aus $s - 1$ Gleichungen besteht, so lässt sich der Voraussetzung nach aus seinen Gleichungen eine Formel

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots \beta_\nu x_\nu = 0$$

herstellen, in welcher alle β grösser als 0 sind. Durch dieselben Operationen, wie diese Gleichung aus dem Systeme U, kann man aus den $s - 1$ ersten Formeln des Systems S eine Formel:

$$H = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots \beta_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1} x_{\nu+1} \ldots \beta_r x_r = 0$$

ableiten, worin die ν ersten Coefficienten grösser als 0 sind. Die Gleichung

$$H + p \, . \; G = 0$$

wird aber, wenn man für p eine hinreichend grosse positive Grösse wählt, eine Gleichung $F = 0$, wie sie oben gefordert wurde.

Hiernach genügt es zu zeigen, dass man aus den Gleichungen $X = 0$ eine Gleichung $G = 0$ (III) ableiten könne. Zu diesem Zwecke unterscheide ich zunächst 3 Fälle:

1. *Fall.* Eine Gleichung, etwa $X_s = 0$, ist eine Folge der übrigen.
2. *Fall.* Die X sind von einander unabhängig und $s \geqq r$.
3. *Fall.* Die X sind von einander unabhängig und $r - s = k > 0$.

Im 1. *Falle* ist das System F, welches aus den Formeln:

$$X_1 = 0 \ldots X_{s-1} = 0$$

besteht, unauflösbar; es existirt also, da es nur $s - 1$ Gleichungen besitzt, nach obiger Voraussetzung eine Gleichung $F = 0$.

Im 2. *Falle* kann man aus den r ersten Formeln eine Gleichung:

$$G = \pm x_1 \, . \; \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{rr} = 0$$

ableiten, bei welcher der einzige Coefficient, welchen sie enthält, positiv gewählt werden kann.

Es ist also nur noch der 3. Fall zu behandeln. In demselben verschwinden, da keine Gleichung Folge der übrigen sein soll, die s reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} \end{vmatrix}$$

nicht sämmtlich. Eine solche nicht verschwindende Determinante sei die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,\,k+1} & a_{1,\,k+2} & \cdots & a_{1,\,r} \\ a_{2,\,k+1} & a_{2,\,k+2} & \cdots & a_{2,\,r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{s,\,k+1} & a_{s,\,k+2} & \cdots & a_{s,\,r} \end{vmatrix}.$$

Man kann dann die Gleichungen $X = 0$ in Bezug auf die Grössen

$$x_{k+1}\ ,\ x_{k+2}\ ,\ \ldots\ x_r,$$

welche ich durch:

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ \ldots\ y_s$$

bezeichnen will, auflösen. Hierdurch erhält man ein dem System S äquivalentes System Σ der Form:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} Y_1 = y_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \quad \cdots \quad b_{1,\,k}x_k = 0 \\ Y_2 = y_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \quad \cdots \quad b_{2,\,k}x_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_s = y_s + b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 \quad \cdots \quad b_{s,\,k}x_k = 0. \end{cases}$$

Um unsern Satz für die Systeme Σ nachzuweisen, theile ich dieselben in Classen ein, je nach der Anzahl derjenigen in der Gleichung $Y_1 = 0$ auftretenden Coefficienten b_{1i}, welche nicht verschwinden.

Zur 0^{ten} Classe nehme ich die Systeme Σ, bei welcher alle Coefficienten:

$$\text{(V)}\qquad b_{11}\ ,\ b_{12}\ ,\ \ldots\ b_{1,\,k}$$

verschwinden; zur 1^{ten} diejenigen, bei denen nur einer dieser Coefficienten nicht verschwindet, zur 2^{ten} die, bei welchen 2 nicht verschwinden u. s. w.

Ist Σ ein System 0^{ter} Classe, dann ist $y_1 = 0$ und das System der $s - 1$ Gleichungen, welche aus

$$Y_2 = 0 \ldots Y_s = 0$$

hervorgehen, indem man $y_1 = 0$ setzt, ist nothwendig mit S zusammen unauflösbar, demnach existirt eine Gleichung $G = 0$ (III), was zu beweisen.

Man kann nun den Beweis unseres Satzes der Reihe nach für die Systeme 1ter, 2ter ... Classe u. s. w. führen. Betrachten wir ein System z der g^{ten} Classe; bei dem Beweise will ich die Annahme machen, der Satz gelte bereits für Systeme niederer Classe. Hierbei sind folgende 3 Fälle zu unterscheiden:

1. *Fall.* Die (nicht verschwindenden) Coefficienten b_{1i} sind sämmtlich positiv.
2. *Fall.* Diese Coefficienten sind sämmtlich negativ.
3. *Fall.* Sie haben verschiedene Vorzeichen, es ist etwa $b_{11} > 0$ und $b_{12} < 0$.

Im 1. *Falle* ist $Y_1 = 0$ eine Gleichung G.

Im 2. *Falle* sind die Gleichungen:

$$Y_2 = 0 \dots Y_s = 0$$

nicht auflösbar; denn würden diese Gleichungen durch positive (bez. theilweise verschwindende) Werthe von $y_2, y_3 \dots, x_1, x_2 \dots$ erfüllt, so erhielte man aus $Y_1 = 0$ auch für y_1 einen positiven Werth, also wäre auch S auflösbar. Aus dem Umstande aber, dass das kleinere System nicht auflösbar ist, folgt wieder, dass nach unserer Voraussetzung eine Gleichung $F = 0$ besteht. Es ist also nur noch der 3. Fall:

$$b_{11} = a > 0 \quad b_{12} = -b < 0$$

zu untersuchen.

In demselben setze ich zuerst:

$$a x_1 - b x_2 = \xi \quad \text{also} \quad x_1 = \frac{\xi + b x_2}{a};$$

ich erhalte dann ein System Σ_1, welches die Variabeln:

$$y_1 \dots y_s \, \xi \, x_2 \, x_3 \dots x_k$$

enthält. Dasselbe ist nicht auflösbar; denn würde es durch positive Werthe von $y_1 \,.\,.\, y_s$, ξ, x_2, $x_3 \,.\,.$ erfüllt, so würde auch x_1 positiv, und auch S müsste auflösbar sein. Das neue System ist ausserdem von niederer Classe als Σ; mithin besteht nach unserer Voraussetzung eine Formel:

$$K = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \dots \alpha_s y_s + \alpha_{s+1} \xi + \alpha_{s+2} x_2 + \alpha_{s+3} x_3 \dots \alpha_r x_r = 0$$

in welcher alle α grösser als 0 sind.

Setzt man ferner

$$-\xi = b x_2 - a x_1 = \eta \quad \text{also} \quad x_2 = \frac{\eta + a x_1}{b}$$

dann entsteht abermals ein unauflösbares System Σ_2 mit den Variabeln:

$$y_1 y_2 \dots y_s \, x_1 \, \eta \, x_3 \dots x_k.$$

Da dasselbe von niederer Classe als Σ ist, so besteht eine Gleichung:

$$L = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \dots \beta_s y_s + \beta_{s+1} x_1 + \beta_{s+2} \eta + \beta_{s+3} x_3 \dots \beta_r x_r = 0$$

in welcher alle β grösser als 0 sind.

Die Gleichung

$$\beta_{s+2} K + \alpha_{s+1} L = 0$$

ist dann eine Gleichung $F = 0$, wie man sie sucht.

Die Herstellbarkeit einer Gleichung $F = 0$ ist hiermit in allen Fällen bewiesen.

Ganzzahlige Lösungen. Reducibilität.

Sind die Formeln (I) auflösbar und in ihnen die Coefficienten a_{ik} ganzzahlig, dann kann man ihre Auflösung in folgender bekannter Weise bewerkstelligen.

Unter Lösung versteht man hier ein System positiver ganzer Zahlen, welche die Formeln befriedigen. Die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung. Solche Lösungen, welche durch Addition anderer entstehen, heissen *reducibel*, die übrigen *irreducibel*. Jede Lösung, deren sämmtliche Zahlenwerthe nicht kleiner als die einer anderen sind, ist reducibel, da die Differenz beider eine Lösung ist.

Sind die irreducibeln Lösungen:

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\mu 1} & g_{\mu 2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{\mu r} \end{matrix}$$

dann bilden die Ausdrücke:

$$x_i = g_{1i} y_1 + g_{2i} y_2 \ldots . g_{\mu i} y_\mu$$

wenn die y beliebige positive ganze Zahlen sind, die allgemeinste Lösung. Es handelt sich um die Aufsuchung der irreducibeln Lösungen, welche ich in der Folge auch Particularlösungen nennen will.

Auflösung einer Gleichung $X = 0$.

Ist $X = 0$ eine in diesem Sinne auflösbare Gleichung, dann hat es die Form:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots . a_h x_h = b_1 x_{h+1} + b_2 x_{h+2} \ldots b_{r-h} x_r .$$

Die a und b sind hier positive ganze Zahlen, die grösste derselben sei p.

Die Lösungen zerfallen in 3 Classen, je nachdem entweder alle Zahlen $x_1 \ldots x_h$ nicht grösser als p sind, oder alle Zahlen $x_{h+1} \ldots x_r$ nicht grösser als p sind, oder endlich aus jeder dieser beiden Zahlenreihen mindestens eine etwa x_1 und x_{h+1} grösser als p ist. Die Lösungen der ersten Classe findet man, wenn man für die Grössen $x_1 \ldots x_h$ alle Zahlensysteme $\xi_1 \ldots \xi_h$ setzt, welche kleiner als p sind und die Zahlen $x_{h+1} \ldots x_r$ sodann aus den Formeln:

$$a_1 \xi_1 \ldots a_h \xi_h = b_1 x_{h+1} \ldots b_{r-h} x_r$$

berechnet. In derselben Weise ergeben sich die Lösungen der zweiten Classe. Die der dritten Classe sind reducibel, da sie grösser als die Lösung:

$$x_1 = b_1\,; \quad x_{h+1} = a_1 \text{ die übrigen } x = 0$$

ist. Sind:

$$\begin{matrix} g_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\mu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{\mu r} \end{matrix}$$

die Particularlösungen von $X = 0$, dann hat die allgemeinste Lösung die Form:

$$x_i = g_{1i} y_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot g_{\mu i} y_i\,,$$

worin die y beliebige positive Zahlen bedeuten.

Auflösung von 2 simultanen Gleichungen.

Sind 2 Gleichungen gegeben, dann trage man die allgemeinste Lösung der ersten in die zweite ein. Es entsteht dann eine Gleichung in den y, deren allgemeinste Lösung die y als lineare Functionen neuer Grössen $z_1 \ldots z_r$ ausdrückt.

Durch Eintragung dieser Ausdrücke in die x erhalten wir die allgemeinsten Lösungen der beiden Gleichungen. Die Coefficienten der z in denselben ergeben ein Lösungssystem, welches sämmtliche irreducibeln Lösungen enthält.

In derselben Weise findet man die irreducibeln Lösungen, wenn mehr als 2 Formeln gegeben sind, ihre Anzahl ist stets endlich.

Giessen, April 1872.