21.

Ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Aus dem bekannten Descartes'schen Lehrsatze:

„daſs die Zahl der reellen positiven Wurzeln einer algebraischen Glei-
„chung nicht gröſser sein kann, als die Zahl der Wechsel der Zeichen,
„und die Zahl der reellen negativen Wurzeln nicht gröſser, als die
„Zahl der Folgen der Zeichen ihrer Glieder,"

läſst sich, wie folgt, ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln überhaupt, also auch der Zahl der unmöglichen Wurzeln herleiten, dessen ich nirgend erwähnt gefunden habe. Ich theile es für den Fall mit, daſs es wirklich nicht bekannt sein sollte.

Es sei die Gleichung

$$1)\quad \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots\ldots \alpha_n = 0$$

gegeben, wo n eine ganze positive Zahl ist, und $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ reelle Gröſsen sind, die auch Null sein können.

Man setze $x = -v$, so nehmen die Glieder mit ungeraden Exponenten von x entgegengesetzte Zeichen an. Ist also n gerade, so gehet die Gleichung (1.) in

$$\alpha_0 v^n - \alpha_1 v^{n-1} + \alpha_2 v^{n-2} - \alpha_3 v^{n-3} \ldots\ldots + \alpha_n = 0,$$

ist n ungerade, in

$$-\alpha_0 v_n + \alpha_1 v^{n-1} - \alpha_2 v^{n-2} + \alpha_3 v^{n-3} - \ldots\ldots + \alpha_n = 0$$

über. Beide Gleichungen können durch

$$2)\quad \alpha_0 v^n - \alpha_1 v^{n-1} + \alpha_2 v^{n-2} - \alpha_3 v^{n-3} \ldots\ldots \pm \alpha_n = 0$$

ausgedrückt werden. Das obere Zeichen gilt, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade ist.

Da nun $v = -x$, so folgt, daſs die Wurzeln der Gleichung

$$3)\quad \alpha_0 x^n - \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} - \alpha_3 x^{n-3} \ldots\ldots \pm \alpha_n = 0$$

sämmtlich den Wurzeln der Gleichung (1.) an Form und Gröſse gleich, und nur darin von ihnen verschieden sind, daſs sie entgegengesetzte Zeichen haben.

Bezeichnet man also die n Wurzeln der Gleichung (1.) durch x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n, so sind die n Wurzeln der Gleichung (2.)

$$-x_1,\ -x_2,\ -x_3 \ldots\ldots -x_n.$$

Nun kann man bekanntlich die Gröſse linker Hand in der Gleichung (1.), deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 ...... x_n sind, als das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)$$

betrachten; also ist die Gröſse linker Hand in der Gleichung (3.) dem Product

$$(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)\ldots\ldots(x+x_n)$$

gleich, so daſs

$$\begin{aligned}
4)\quad & \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} \ldots\ldots + \alpha_n \\
& = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n) = 0 \text{ und} \\
5)\quad & \alpha_0 x^n - \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} - \alpha_3 x^{n-3} \ldots\ldots \pm \alpha_n \\
& = (x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)\ldots\ldots(x+x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Man multiplicire diese beiden Gleichungen mit einander, so findet man

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_0 x_n + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_4 x^{n-4}\ldots\ldots\right)^2 - \left(\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_3 x^{n-3} + \alpha_5 x^{n-5}\ldots\ldots\right)^2 \\
&= (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3)^2\ldots\ldots(x^2-x_n^2) = 0,
\end{aligned}$$

das heiſst:

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_0^2 x^{2n} + \alpha_0\alpha_2 x^{2n-2} & + \alpha_0\alpha_4 x^{2n-4} & + \alpha_0\alpha_6 x^{2n-6} & + \alpha_0\alpha_8 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
\quad + \alpha_2\alpha_0 x^{2n-2} & + \alpha_2^2 x^{2n-4} & + \alpha_2\alpha_4 x^{2n-6} & + \alpha_2\alpha_6 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
 & + \alpha_4\alpha_0 x^{2n-4} & + \alpha_4\alpha_2 x^{2n-6} & + \alpha_4^2 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
 & & + \alpha_6\alpha_0 x^{2n-6} & + \alpha_6\alpha_2 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
 & & & + \alpha_8\alpha_0 x^{2n-8} & \ldots\ldots
\end{array}$$

$$-\left\{\begin{array}{llll}
\alpha_1^2 x^{2n-2} + \alpha_1\alpha_3 x^{2n-4} & + \alpha_1\alpha_5 x^{2n-6} & + \alpha_1\alpha^7 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
\quad + \alpha_3\alpha_1 x^{2n-4} & + \alpha_3^2 x^{2n-6} & + \alpha_3\alpha_5 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
 & + \alpha_5\alpha_1 x^{2n-6} & + \alpha_5\alpha_3 x^{2n-8} & \ldots\ldots \\
 & & + \alpha_7\alpha_1 x^{2n-8} & \ldots\ldots
\end{array}\right\},$$

oder

$$\begin{aligned}
6)\quad & x^{2n}\,.\,\alpha_0^2 \\
& - x^{2n-2}(\alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_2) \\
& + x^{2n-4}(\alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_3) \\
& - x^{2n-6}(\alpha_3^2 - 2\alpha_0\alpha_6 - 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4) \\
& + x^{2n-8}(\alpha_4^2 + 2\alpha_0\alpha_8 - 2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 - 2\alpha_3\alpha_5) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= {} & (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)\ldots\ldots(x^2-x_n^2) = 0,
\end{aligned}$$

oder

oder, wenn man der Kürze wegen,

$$7)\quad \begin{cases} \alpha_0^2 = \beta_0 \\ \alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_3 = \beta_2 \\ \alpha_3^2 - 2\alpha_0\alpha_6 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4 = \beta_3 \\ \alpha_4^2 + 2\alpha_0\alpha_8 - 2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 - 2\alpha_3\alpha_5 = \beta_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

setzt,

$$8)\quad \beta_0 x^{2n} - \beta_1 x^{2n-2} + \beta_2 x^{2n-4} - \beta_3 x^{2n-6} \dots\dots$$
$$= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2) \dots\dots (x^2 - x_n^2) = 0.$$

Man setze

$$x^2 = z,$$

so verwandelt sich die Gleichung (8.) in

$$9)\quad \beta_0 z_n - \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} - \beta_3 z^{n-3} \dots\dots\dots$$
$$= (z - x_1^2)(z - x_2^2)(z - x_3^2) \dots\dots\dots (z - x_n^2) = 0.$$

Daraus folgt, daſs die Quadrate x_1^2, x_2^2, x_3^2 ...... x_n^2 der n Wurzeln x_1, x_2, x_3 ...... x_n der gegebenen Gleichung (1.) die n Wurzeln der Gleichung (9.) die n Wurzeln x_1, x_2, x_3 .... x_n der gegebenen Gleichung (1.) selbst also die Quadratwurzeln von den n Wurzeln der Gleichung (9.) sind. Quadratwurzeln sind aber nur dann reell, wenn die Gröſsen, von welchen sie die Wurzeln sind, positiv sind. Also kann die gegebene Gleichung nicht mehr reelle Wurzeln haben, als die Gleichung (9.) positive Wurzeln hat, das heiſst, vermöge der Descartes'schen Regel, nicht mehr als die Gleichung (9.) Zeichenwechsel hat. Nun kann man die Gleichung (9.) immer aus der gegebenen finden, also ist Folgendes ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung:

Eine beliebige algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade kann nicht mehr reelle Wurzeln haben, als je zwei auf einander folgende Coefficienten der Gleichung (9.), deren Werthe nach (7.) gefunden werden, gleiche Zeichen haben.

Man kann bekanntlich jede algebraische Gleichung auf eine andere bringen, deren erstes Glied den Coefficienten 1, und deren zweites Glied den Coefficienten 0 hat. Also kann man jedesmal

$$\alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha_1 = 0$$

setzen. Folglich ist auch in (7.) kürzer

$$10)\quad \begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \beta_1 = -2\alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_2^{\,2} + 2\alpha_4 \\ \beta_3 = \alpha_3^{\,2} - 2(\alpha_6 + \alpha_2\alpha_4) \\ \beta_4 = \alpha_4^{\,2} + 2(\alpha_8 + \alpha_2\alpha_6 - \alpha_3\alpha_5) \\ \beta_5 = \alpha_5^{\,2} - 2(\alpha_{10} + \alpha_2\alpha_8 - \alpha_3\alpha_7 + \alpha_4\alpha_6) \\ \beta_6 = \alpha_6^{\,2} + 2(\alpha_{12} + \alpha_2\alpha_{10} - \alpha_3\alpha_9 + \alpha_4\alpha_8 - \alpha_5\alpha_7) \\ \beta_2 = \alpha_7^{\,2} - 2(\alpha_{14} + \alpha_2\alpha_{12} - \alpha_3\alpha_{11} + \alpha_4\alpha_{10} - \alpha_5\alpha_9 + \alpha_6\alpha_8) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Erstes Beispiel. Es sei die Gleichung

$$x^5 + x^3 + 3x^2 + 16x + 15 = 0$$

gegeben, so ist

$$\alpha_2 = 1,\ \ \alpha_3 = 3,\ \ \alpha_4 = 16,\ \ \alpha_5 = 15,$$

folglich in (10.)

$$\beta_0 = +1,\ \beta_1 = -2,\ \beta_2 = +33,\ \beta_3 = -23,\ \beta_4 = +166,\ \beta_5 = +225.$$

Nur β_4 und β_5 haben gleiche Zeichen, also kann die gegebene Gleichung nur eine reelle Wurzel haben. In der That sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\frac{+3 \pm \sqrt{-11}}{2},\ \ -1 \pm \sqrt{-2} \text{ und } -1.$$

Zweites Beispiel. Es sei die Gleichung

$$x^6 - 10x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 27x + 36 = 0$$

gegeben, so ist

$$\alpha_2 = -10,\ \alpha_3 = +4,\ \alpha_4 = +16,\ \alpha_5 = -27,\ \alpha_6 = +36,$$

folglich in (10.)

$$\beta_0 = +1,\ \ \beta_1 = +20,\ \ \beta_2 = +132,\ \ \beta_3 = +264,\ \ \beta_4 = -680,$$
$$\beta_5 = -423,\ \ \beta_6 = +1296.$$

Die Coefficienten $\beta_0, \beta_1 \ldots\ldots \beta_6$ haben vier Zeichenfolgen. Also kann die gegebene Gleichung nicht mehr als vier reelle Wurzeln haben. In der That sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$+3,\ +1,\ -2,\ -3 \text{ und } \frac{+1 \pm \sqrt{-7}}{2}.$$

Da die Descartes'sche Regel nur lehrt, wie viel, z. B. positive Wurzeln, eine Gleichung haben kann, nicht, wie viel sie nothwendig haben mufs, so kann die Gleichung (9.) auch selbst überhaupt weniger reelle Wurzeln als Zeichenwechsel haben. Man kann daher auch die Gleichung (9.) von Neuem wie die gegebene untersuchen. Findet sich, dafs sie nicht so viel reelle Wurzeln haben kann, als sie Zeichenwechsel hat, so kann die gegebene Gleichung auch nicht mehr reelle Wurzeln haben, als sie, weil die Quadratwurzeln ebenfalls imaginair sind.

Auch lassen sich aus dem obigen Kennzeichen verschiedene andere Folgerungen ziehen; wie leicht zu sehen.

22.

Bemerkungen über Figuren, die aus beliebigen, von geraden Linien umschlossenen Figuren zusammengesetzt sind.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

Es sei eine Figur gegeben, wie z. B. (Fig. 1. Taf. 3.) vorstellt. Sie sei aus

a ebenen Dreiecken,
b ebenen Vierecken,
c ebenen Fünfecken

u. s. w. zusammengesetzt, und es sei

$$1)\quad a+b+c\ldots\ldots=F.$$

Die Zahl der Eckpuncte, welche im äufseren Umfange der ganzen Figur liegen, wie A, B, H, I, M etc., sei n, die Zahl der Eckpuncte im Innern der Figur, wie C, D, G, F, E etc., sei m und

$$2)\quad m+n=S.$$

Die Zahl sämmtlicher gerader Linien, welche die zusammengesetzte Figur in- und auswendig begrenzen, sei

$$3)\quad =A,$$

wobei zu bemerken, dafs die geradlinigen Grenzen der Figur, sowohl innerhalb als aufserhalb, immer nur von einem Eckpuncte bis zum nächsten, welchen sie begrenzen, gerechnet werden, auch dann, wenn mehrere Eckpuncte in einer und derselben geraden Linie liegen. Liegen z. B. die Eckpuncte A, B, C in einer geraden Linie, so werden AB und BC für zwei einzelne Grenzlinien gerechnet, und die Figur $ABCDEF$ wird nicht als ein Fünfeck, sondern als ein Sechseck betrachtet. Liegen E, L, K in einer geraden Linie, desgleichen N, M, I, H, so werden EL, LK, NM, MI, IH für einzelne Grenzen