1.

Über die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und über die Zuläfslichkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen.

(Von Herrn Amtmann *Prehn* zu Ratzeburg im Lauenburgischen.)

Die divergenten Reihen haben ein seltsames Schicksal gehabt. Nachdem sie von den grofsen Mathematikern des vorigen Jahrhunderts und in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts unbedenklich bei analytischen Rechnungen gebraucht worden sind und dazu beigetragen haben, die bedeutenden Resultate zu schaffen, welche uns als Erbtheil überliefert worden sind, haben die Mathematiker der neuern Zeit ihre Anwendung bei analytischen Rechnungen für unzuläfslich erklärt und sie gänzlich aus dem Gebiete der Analysis verbannt.

Zwar gab es schon in älterer Zeit widerstreitende Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen: aber nach dem Zeugnisse von *Euler* (De seriebus divergentibus. §. 10. Nov. Comment. Petropol. V. p. 205 seqq.) hat kein Theil dem andern Rechnungsfehler vorgeworfen; so dafs der Streit nur mehr als ein Wortstreit anzusehen war.

Wenn ich nicht irre, ist *Cauchy* (Cours d'Analyse. 1821.) der Erste, welcher die gänzliche Verwerfung der divergenten Reihen durchgeführt hat. *Abel* sprach sich (1826) in demselben Sinne aus und behauptete, dafs man bei Anwendung divergenter Reihen beweisen könne, was man wolle: Mögliches sowohl, als Unmögliches.

Sieht man die mathematischen Schriften durch, welche seit 1826 bis in die neueste Zeit diesen Gegenstand behandelt haben, so wird man finden, dafs von den berühmten Mathematikern Einige sich unbedingt für die Verwerfung der divergenten Reihen erklärt, Andere aber dem nicht widersprochen haben. Man mufs daher die von *Cauchy* angeregte Ansicht als die gegenwärtig herrschende ansehen; sie kann in folgende Sätze zusammengefafst werden.

1. Divergente Reihen haben keine Summe: denn eine Reihe wie

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots,$$

welche divergent ist wenn $x \geqq 1$, oscillirt für den Fall $x = 1$ beständig zwischen $+1$ und -1. Ist aber $x > 1$, so wächst der absolute Werth der Reihe beständig, schwankt aber zugleich zwischen dem Positiven und Negativen hin und her. In beiden Fällen kann daher von einer Summe nicht die Rede sein. Da nun divergente Reihen keine Summe haben, können sie einer bestimmten endlichen Gröfse nicht gleich gesetzt werden und sind folglich für analytische Rechnungen unbrauchbar. Einer Rechnung mit allgemeinen Reihen mufs daher eine Untersuchung über ihre Convergenz vorausgehen.

2. Die in ältern Werken öfters vorkommende Transformation divergenter Reihen in convergente, wodurch man die Summen der divergenten Reihen finden wollte, beruht auf einer Täuschung. Es wird die divergente Reihe nicht in eine andere, mit ihr identische und convergente Reihe transformirt (denn das ist geradezu unmöglich, weil eine divergente Reihe, welche keine Summe hat, nicht mit einer convergenten identisch sein kann, welche eine Summe hat), sondern man leitet aus der divergenten eine andere, von ihr ganz verschiedene Reihe ab, die nun recht wohl convergiren kann.

Zur Unterstützung dieser Ansicht beruft man sich darauf, dafs die Anwendung divergenter Reihen zu fehlerhaften Resultaten führe. Eine bestimmte Nachweisung solcher fehlerhaften Resultate ist aber nicht gegeben worden. (Vergl. §. 17.)

Die divergenten Reihen haben zwar Vertheidiger gefunden; ihre Sache ist aber nicht geschickt geführt worden. Anstatt sich auf die Analogie imaginärer Ausdrücke für reelle Gröfsen zu stützen und darauf die Vertheidigung zu gründen (Vergl. §. 16.), hat man zu dem unklaren Begriffe einer syntaktischen Bedeutung der Reihen seine Zuflucht genommen und dadurch den Gegnern einen leichten Sieg gelassen.

Ich habe diesen Gegenstand einer neuen Prüfung unterworfen und werde in dieser Abhandlung nachweisen: dafs die divergenten Reihen eine eigenthümliche Bedeutung haben, in Folge deren sie zwar keine Summe, wohl aber einen Werth haben: dafs man im Stande ist, diesen Werth zu bestimmen, und dafs die Anwendung der divergenten Reihen bei analytischen Rechnungen unbeschränkt zuläfslich ist; ohne dafs man daraus fehlerhafte Resultate zu besorgen hätte.

I.
Über die Bedeutung der divergenten Reihen.

§. 1.
Die Anordnung betreffend; und Begriffsbestimmungen.

Diese Abhandlung beschränkt sich auf die Betrachtung derjenigen unendlichen Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln geordnet und deren Coëfficienten endliche Gröfsen sind.

Ich betrachte zuvörderst zwei Classen dieser Reihen:

1. ***Reihen mit wechselnden Zeichen,*** d. i. Reihen, welche nach den fortlaufenden Potenzen der Variabeln geordnet sind und bei welchen (von der ersten Potenz der Variabeln an gerechnet) ein beständiger Wechsel der Zeichen ($\pm$) von Glied zu Glied Statt findet, mithin Reihen von der Form

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots,$$

und alle Reihen, die sich durch eine Substitution auf diese Form bringen lassen.

2. ***Reihen mit bleibenden Zeichen,*** d. i. Reihen, welche nach den fortlaufenden Potenzen der Variabeln geordnet sind und bei welchen das Zeichen von Glied zu Glied unverändert bleibt, mithin Reihen von der Form

$$\pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

und alle Reihen, die sich durch eine Substitution auf diese Form bringen lassen.

Diese beiden Classen von Reihen, welche ersichtlich die meisten in der Analysis vorkommenden Reihen begreifen, werde ich zuerst behandeln, ihre Bedeutung (§. 3 und 4.) und die Methoden ihrer Werthbestimmung (§. 5 bis 10.) entwickeln; erst hernach (§. 11. seqq.) werde ich die Theorie auf alle nach Potenzen einer Variabeln geordnete Reihen erstrecken, weil ich der Meinung bin, dafs durch diese Abweichung von der logischen Ordnung die Darstellung an Deutlichkeit gewinnen wird.

Ich werde die gewöhnliche Bedeutung der Worte convergent und divergent beibehalten. Ich nenne eine unendliche Reihe ***convergent,*** wenn die Summe ihrer Glieder, je mehr man deren nimmt, sich immer mehr einer bestimmten endlichen Gröfse nähert, welche die Grenze ist, auf welche die Summe der Reihe bei unendlichem Wachsen der Gliederzahl zugeht: eine unendliche Reihe, welcher diese Eigenschaft fehlt, ist ***divergent.***

§. 2.

Andeutung des Gesichtspuncts, von welchem bei der Untersuchung ausgegangen ist.

Da die Form einer Gleichung, durch welche die Identität zwischen einer unendlichen Reihe und einem geschlossenen Ausdrucke ausgesprochen wird, durch die Veränderung des Werths der Variabeln nicht alterirt wird, so mufs, bei dem Character der Allgemeinheit, welcher der Analysis eigen ist, als Regel angenommen werden, dafs die Gleichung für jeden Werth der Variabeln gültig sei. Zwar läfst sich denken, dafs die besondern Eigenschaften einer einzelnen Function davon eine Ausnahme begründen könnten; aber im Allgemeinen, und bis für den einzelnen Fall das Gegentheil nachgewiesen ist, mufs die Gültigkeit der Gleichung für alle Werthe der Variabeln vorausgesetzt werden.

Die gegenwärtig herrschende Auffassung der unendlichen Reihen widerspricht dieser allgemeinen Regel.

Wenn man nemlich von den wenigen Reihen absieht, welche für jeden Werth der Variabeln convergent bleiben, so wird bei allen übrigen Reihen die Gültigkeit der Gleichung, welche die Identität zwischen der Reihe und einem geschlossenen Ausdrucke ausspricht, auf das meistens kurze Intervall beschränkt, wo die Reihe convergirt, wenn auch der geschlossene Ausdruck für die aufserhalb dieses Intervalls liegenden Werthe der Variabeln eine continuirliche Function bleibt.

Es ist daher zu vermuthen, dafs diese Auffassung der unendlichen Reihen unrichtig sein werde, weil sie eine Beschränkung in die Analysis bringt, die ihrer Natur widerstreitet.

Der ursprünglich nur für endliche Reihen geltende Begriff einer Summe ist durch den Hülfsbegriff der Grenze auf convergente Reihen anwendbar, schlechterdings aber nicht auf divergente, und deshalb nimmt man an, dafs die Gleichung für das Intervall der Divergenz ihre Gültigkeit verliert. Ist es denn aber nothwendig, die Auffassung der Reihe als Summe auf das Intervall auszudehnen, wo die Reihe divergirt? Die Natur der Analysis führt es mit sich, dafs die Bedeutung einer Gleichung für verschiedene Intervalle der unabhängigen Gröfse eine verschiedene sein kann, ohne dafs die Identität der für das gesammte Intervall gültigen Gleichung aufgehoben würde. So ist die Gleichung

$$f(m) = a^m,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, für alle, sowohl positive als negative Werthe von m gültig; für das Intervall, wo m positiv ist, bedeutet a^m: dafs das Product von m Factoren $= a$ zu nehmen sei; für das Intervall, wo m negativ ist, tritt die complicirtere Bedeutung ein, dafs erst a durch Division in die Einheit in $\frac{1}{a}$ zu verwandeln und sodann das Product von m Factoren $= \frac{1}{a}$ zu nehmen sei. Wollte man die erstere Bedeutung auch für das zweite Intervall festhalten, so müfste man zu dem Ausspruch gelangen, dafs die Gleichung $f(m) = a^m$ für negative Werthe von m keine Gültigkeit habe.

Sollte nun nicht vielleicht bei Gleichungen, welche die Identität eines geschlossenen Ausdrucks und einer unendlichen Reihe darstellen, ein ähnlicher Wechsel der Bedeutung eintreten, der den bei divergenten Reihen scheinbar Statt findenden Widerspruch hebt?

Dies ist der Standpunct, von dem ich bei der Untersuchung ausgegangen bin, und der folgende Paragraph wird zeigen, dafs in der That bei divergenten Reihen dieser Fall eintritt.

§. 3.

Bedeutung der unendlichen Reihen mit wechselnden Zeichen.

Eine jede Gleichung, mithin auch diejenige, deren eine Seite eine unendliche Reihe bildet, hat die Bedeutung, dafs mit den darin vorkommenden Gröfsen gewisse Rechnungs-Operationen vorzunehmen sind und dafs deren Resultat an Gröfse dem Resultat der andern Seite der Gleichung gleich ist.

Ist nun $f(x)$ der geschlossene Ausdruck, dem die unendliche Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots$$

nach den Regeln analytischer Rechnungen gleich zu setzen ist, so ist zu untersuchen, welche Rechnungs-Operationen mit den Gliedern der Reihe vorgenommen werden müssen, d. i., welche Bedeutung man der Reihe beilegen müsse, damit die Gleichung

$$\text{(I.)} \qquad f(x) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots$$

für das Intervall der Convergenz und für das Intervall der Divergenz gültig sein könne.

Ist die aus den n ersten Gliedern der unendlichen Reihe bestehende endliche Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots + px^{n-1} = S_n$$

und läfst man n ins Unendliche wachsen, so ist bekanntlich für das Intervall, wo die Reihe convergirt:

$$\text{(II.)} \qquad \lim. S_n = f(x);$$

es findet mithin die Gleichung (I.) für das Intervall der Convergenz Statt, wenn

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots = \lim. S_n$$

ist; d. h. die convergente Reihe kann als Summe ihrer Glieder aufgefafst werden, und durch fortgesetztes Summiren nähert man sich immer mehr der Grenze $f(x)$.

Um nun die Bedeutung zu ermitteln, welche der unendlichen Reihe beizulegen sei, damit die Gleichung (I.) allgemein, auch für das Intervall der Divergenz, gültig sein könne, gehen wir aus von der Betrachtung des Summen-Ausdrucks S_n der n gliedrigen Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots \pm px^{n-1},$$

über dessen Bedeutung überall kein Zweifel sein kann, wenn man auch in den meisten Fällen nicht im Stande ist, denselben als bestimmte Function von x und n darzustellen. Suchen wir zuvörderst die allgemeine Form des Summen-Ausdrucks S_n.

Die Coëfficienten der Reihe müssen als Function von n angesehen werden; S_n kann daher nur eine Function von x und n sein, und diese Function mufs nach der Gleichung (II.) bei unendlichem Wachsen von n für alle in dem Intervall der Convergenz liegenden Werthe von x in $f(x)$ übergehen. Setzt man daher

$$S_n = f(x) + F(x, n),$$

so mufs $F(x, n)$ für alle Werthe von x, die in dem Intervall der Convergenz liegen, verschwinden, wenn n in's Unendliche wächst.

In der n gliedrigen Reihe kann man nach einem bekannten Satze immer x so grofs nehmen, dafs das Zeichen des letzten Gliedes px^{n-1} über das Zeichen der Summe S_n entscheidet. Da nun px^{n-1} positiv ist, wenn n gerade, und negativ, wenn n ungerade ist, so mufs bei dem Werthe von S_n das Nämliche eintreten. Dies kann aber, weil der allgemeine Ausdruck $F(x, n)$ dieselbe Form behält, es möge n gerade oder ungerade vorausgesetzt werden, nur dadurch Statt haben, dafs $F(x, n)$ ein doppeltes Vorzeichen hat, von welchem das eine oder das andere gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die allgemeine Form des Summen-Ausdrucks ist daher

$$S_n = f(x) \pm F(x, n).$$

So z. B. findet man für die Reihe

$$1-2x+3x^2-\cdots\pm nx^{n-1}$$
$$S_n = \frac{1}{(1+x)^2} \pm \frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}\cdot x^n;$$

für die Reihe

$$2x-\tfrac{1}{2}(2x)^2+\tfrac{1}{3}(2x)^3-\cdots\pm\frac{1}{n}(2x)^n$$
$$S_n = \log(1+2x)\pm\int\frac{(2x)^n\,dx}{1+2x};$$

endlich für die Reihe

$$z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\cdots\pm\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$
$$S_n = \text{arc. min. (tang.} = z)\pm\int\frac{z^{2n+2}\,dz}{1+z^2}.$$

Die Gleichung

$$S_n = f(x)\pm F(x,n)$$

hat demnach, wenn $F(x,n)$ nicht verschwindet, zwei verschiedene Formen, nemlich

$$S_{n_1} = f(x)+F(x,n),$$

welche für ein gerades n gültig ist, mithin die Werthe

$$S_2 = (\pm a+bx)$$
$$S_4 = (\pm a+bx-cx^2+dx^3)$$
$$S_6 = (\pm a+bx-cx^2+dx^3-ex^4+fx^5)$$
etc.

bestimmt, und

$$S_{n_2} = f(x)-F(x,n),$$

welche für ein ungerades n gilt, mithin die Werthe

$$S_1 = (\pm a)$$
$$S_3 = (\pm a+bx-cx^2)$$
$$S_5 = (\pm a+bx-cx^2+dx^3-ex^4)$$
etc.

bestimmt.

Die Gleichungen

$$S_{n_1} = f(x)+F(x,n)$$
$$S_{n_2} = f(x)-F(x,n)$$

enthalten aber beide den allgemeinen Werth von n: der Ausdruck S_{n_1} hat daher auch für ein ungerades n eine Bedeutung; nemlich S_{n_1} ist das Glied, welches in der nach dem Gesetze $S_{n_1} = f(x) + F(x, n)$ gebildeten Reihe $S_2, S_4, S_6, \ldots S_{n-1}, S_{n+1}, \ldots$ dem ungeraden Index n correspondirt: eben so bedeutet S_{n_2}, wenn n gerade, das Glied, welches in der nach dem Gesetze $S_{n_2} = f(x) - F(x, n)$ gebildeten Reihe $S_1, S_3, S_5, \ldots S_{n-1}, S_{n+1}, \ldots$ dem geraden Index n correspondirt.

Es können demnach die Gleichungen

$$S_{n_1} = f(x) + F(x, n)$$
$$S_{n_2} = f(x) - F(x, n)$$

auf einen und denselben Werth von n bezogen werden, wenn man, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder S_{n_1}, oder S_{n_2} die vorhin bezeichnete Bedeutung beilegt, und man erhält alsdann die Gleichung

$$\text{(III.)} \qquad \tfrac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2}) = f(x),$$

welches auch der Werth von n und $F(x, n)$ sein möge.

Vergleicht man die Gleichungen (I.) und (III.), so ergiebt sich, dafs die Gleichung (I.) allgemeine Gültigkeit haben kann, d. i. sowohl für das Intervall der Divergenz, als für das Intervall der Convergenz, wenn die Bedeutung der Reihe auf die Weise aufgefafst wird, dafs mit ihren Gliedern die durch den Ausdruck $\frac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2})$ bezeichnete Operation vorgenommen werden solle.

Diese Rechnungs-Operation ist folgende. Es wird der Summenwerth der ersten n Glieder der Reihe gebildet, für ein beliebiges n; dieser ist S_{n_1}, wenn n gerade, S_{n_2} wenn n ungerade ist. Im ersten Falle berechnet man den Werth von S_{n_2}, indem man S_{n_2} als das zum Index n gehörige Glied der Reihe $S_1, S_3, S_5, S_7, \ldots$ betrachtet: im letzten Falle berechnet man den Werth von S_{n_1}, indem man S_{n_1} als das zum Index n gehörige Glied der Reihe $S_2, S_4, S_6, \ldots$ betrachtet: endlich nimmt man von S_{n_1} und S_{n_2} das arithmetische Mittel.

Nimmt man das ganz beliebige n = unendlich, so wird für den Fall, wo die Reihe convergirt, $S_{n_1} = S_{n_2} = S_n$, weil $F(x, n)$ verschwindet, und es gehet daher für convergente Reihen die Gleichung (III.) in die Gleichung (II.) über, nemlich in

$$\lim. S_n = f(x).$$

Die complicirtere Operation reducirt sich demnach, in dem Moment, wo die divergente Reihe in eine convergente übergeht, auf eine einfache Summirung; es wird daher bei diesem Übergange die Identität der Gleichung conservirt.

In §. 19. wird gezeigt werden, dafs diese Bedeutung der divergenten Reihen noch aus einem andern Gesichtspuncte aufgefafst und auf ein schon bekanntes merkwürdiges Gesetz zurückgeführt werden kann. Der Kürze wegen werde ich in der Folge den Ausdruck gebrauchen: „Eine divergente Reihe ist als *arithmetisches Mittel* aufzufassen." Es ist aber unter diesem arithmetischen Mittel die vorher bezeichnete, an den Gliedern der Reihe vorzunehmende Rechnungs-Operation zu verstehen.

Das Vorhergehende giebt folgenden Satz, von welchem später nochmals Gebrauch gemacht werden wird:

Satz (IV.) Ist $f(x)$ die Grenze der Summe der unendlichen Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots$$

für das Intervall, wo die Reihe convergirt, so ist dieselbe Function $f(x)$ der Werth der unendlichen Reihe für das Intervall der Divergenz, wenn die Reihe als arithmetisches Mittel aufgefafst wird.

Wenn man im Stande ist, den allgemeinen Summen-Ausdruck S_n der ersten n Reihen-Glieder darzustellen, so erhält man unmittelbar den Werth $f(x)$ der divergenten Reihe durch die Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2}).$$

So z. B. ist nach den oben angeführten Werthen von S_n der Werth der Reihe

$$x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1+x)^2}$$

divergent, wenn $x \gtreqless 1$.

Der Werth der Reihe

$$2x - \tfrac{1}{2}(2x)^2 + \tfrac{1}{3}(2x)^3 - \cdots = \log(1+2x)$$

ist divergent, wenn $x > \frac{1}{2}$

und der Werth der Reihe

$$z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \cdots = \text{arc. min. (tang.} = z)$$

ist divergent, wenn $z > 1$.

Da man jedoch in den wenigsten Fällen den allgemeinen Summen-Ausdruck zu bilden im Stande ist, so ist die Anwendung dieser Methode selten möglich. Es wird aber im Abschnitt II. gezeigt werden, dafs es noch andre Mittel giebt, den Werth divergenter Reihen zu finden.

§. 4.

Reihen mit bleibenden Zeichen.

Eine unendliche Reihe mit bleibenden Zeichen

$$f(x) = \pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

läfst sich durch die Substitution von $-y$ statt x in eine Reihe mit wechselnden Zeichen verwandeln, nemlich

$$f(-y) = \pm a - by + cy^2 - dy^3 + \cdots$$

Da nun diese Reihe nach §. 3. die Bedeutung $\frac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2})$ hat, so erhält man, wenn die Substitution von $-x$ statt y, S_n in $\mathfrak{S}_n$ verwandelt,

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}_{n_1} + \mathfrak{S}_{n_2}).$$

Ist z. B.

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$

so erhält man

$$f(-y) = 1 - 2y + 3y^2 - 4y^3 + \cdots,$$

$$S_{n_1} = \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{n(1+y)+1}{(1+y)^2}\, y^n,$$

$$S_{n_2} = \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{n(1+y)+1}{(1+y)^2}\, y^n,$$

daher

$$\mathfrak{S}_{n_1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{n(1-x)+1}{(1-x)^2}(-x)^n,$$

$$\mathfrak{S}_{n_2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{n(1-x)+1}{(1-x)^2}(-x)^n,$$

folglich

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}_{n_1} + \mathfrak{S}_{n_2}) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Es ist daher bei den Reihen mit bleibenden Zeichen gleichfalls die Auffassung als arithmetisches Mittel im Allgemeinen geboten; und nur für den Fall der Convergenz kann die Reihe die Summe ihrer Glieder bedeuten.

Der Satz IV. in §. 3. findet aus dem nemlichen Grunde auch auf die Reihen mit bleibenden Zeichen seine Anwendung.

II.
Bestimmung des Werths divergenter Reihen.

§. 5.
Möglichkeit eines directen Verfahrens.

Ist man im Stande, den allgemeinen Summen-Ausdruck für die n ersten Glieder einer Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots$$

zu bilden, so geht aus §. 3. hervor, dafs sich alsdann leicht der Werth der Reihe $= f(x)$ mit völliger Genauigkeit angeben läfst. In den Fällen, wo der allgemeine Summen-Ausdruck nicht gefunden werden kann, mufs man sich begnügen, den numerischen Werth der Reihe für den gegebenen speciellen Werth von x näherungsweise zu bestimmen.

Bei den convergenten Reihen wird zufolge der Gleichung $f(x) = \lim. S_n$ der Werth durch Summiren der einzelnen Glieder der Reihe ermittelt, und der Näherungs-Werth, zu welchem man durch dieses Verfahren gelangt, ist desto genauer, je mehr Glieder der Reihe man summirt.

Für die unendlichen Reihen im Allgemeinen, mit Einschlufs der divergenten, giebt die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2})$ gleichfalls ein directes Näherungs-Verfahren an. Wenn man das allgemeine Gesetz nicht kennt, nach welchem die Reihen der Summen gerader und ungerader Ordnung fortschreiten, so läfst sich eine genaue Berechnung von S_{n_1} oder S_{n_2}, als eines zu einem bestimmten Index gehörigen Gliedes einer der Reihen, nicht ausführen; man kann aber den Werth von S_{n_1} oder S_{n_2} näherungsweise durch Interpolation bestimmen. Wendet man den durch Interpolation gewonnenen Werth an, und führt im Übrigen die in §. 3. bezeichnete Operation aus, so gelangt man zu einem Näherungswerthe der Reihe.

Es sei z. B. die gegebene Reihe:

$$1 + x - \frac{1.1}{1.2}x^2 + \frac{1.1.3}{1.2.3}x^3 \mp \frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}x^4 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied $\pm \frac{1.1.3.5 \ldots (2n-5)(2n-3)}{1.2.3.4 \ldots (n-1).n} x^n$ ist. Diese Reihe ist divergent, wenn $x \overset{=}{>} 1$, und für $x = 1$:

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} + \tfrac{7}{8} - \tfrac{21}{16} + \cdots,$$

oder

$$2 - [\tfrac{5}{8} - \tfrac{7}{8} + \tfrac{21}{16} - \tfrac{33}{16} + \tfrac{429}{128} - \tfrac{715}{128} + \cdots = 2 - P;$$

wenn P den Werth der in Parenthese eingeschlossenen Reihe bezeichnet; der demnach zu bestimmen ist.

Da S_{n_1} die Summe von n Gliedern bezeichnet, deren letztes positiv, und S_{n_2} die Summe von n Gliedern, deren letztes negativ ist, so ergiebt die unmittelbare Summirung der Reihe P:

	für $n = 2$, $S_2 = -\ 0{,}25$;
für $n = 1$, $S_1 = +0{,}625$;	$n = 4$, $S_4 = -\ 1{,}00$;
$n = 3$, $S_3 = +1{,}0625$;	$n = 6$, $S_6 = -\ 3{,}23437$;
$n = 5$, $S_5 = +2{,}35156$;	$n = 8$, $S_8 = -\ 10{,}14061$;
$n = 7$, $S_7 = +6{,}26171$;	$n = 10$, $S_{10} = -\ 32{,}22066$;
. . . .	$n = 12$, $S_{12} = -104{,}76939$.
	. . . .

Der Werth von n ist willkürlich und es sei $n = 7$, dann ist $S_{7_1} = +6{,}26171$; S_{7_2} ist nicht durch die Summirung gegeben, indem wir nur für die geraden Zahlen S_{2_2}, S_{4_2}, ... die Werthe gefunden haben. Betrachtet man aber S_{7_2} als ein Glied der Reihe S_{2_2}, S_{4_2}, ..., welches zum Index 7 gehört, so läfst sich der Näherungswerth durch Interpolation finden, und der ist ersichtlich negativ. Sieht man daher blofs auf die absolute Gröfse, so ist S_{7_2} das Glied, welches in der Reihe

Index	$x_0 = 0$,	$x_1 = 1$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 3$,	$x_4 = 4$,	$x_5 = 5$,
Corresp. Glied	0,25,	1,00,	3,23437,	10,14061,	32,22066,	104,76939

zum Index $x' = \frac{5}{2}$ correspondirt. Da diese Reihe sehr rasch steigt, so bringe ich sie, um mit mehr Sicherheit interpoliren zu können, auf die Form

Index	$x_0 = 0$,	$x_1 = 1$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 3$,	$x_4 = 4$,	$x_5 = 5$,
Corresp. Glied	0,25,	$0{,}333\ldots(3)$,	$0{,}35937(3)^2$,	$0{,}3755\ldots(3)^3$,	$0{,}39779(3)^4$,	$0{,}43115(3)^5$,

und setze

$$0{,}25 = u_0,\quad 0{,}333\ldots = u_1,\quad 0{,}35937 = u_2,\quad 0{,}3755\ldots = u_3,\quad 0{,}39779 = u_4,\quad 0{,}43115 = u_5.$$

Es ist alsdann $S_{7_2} = u_{\frac{5}{2}}.(3)^{\frac{5}{2}}$.

Wendet man nun die Interpolationsformel von *Lagrange*

$$u_n = \frac{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots} u_0 + \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_2)\ldots}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots} u_1 + \cdots$$

hier an, welche für den Werth $x_n = \frac{5}{2}$ sich in

$$u_{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2^8}[3(u_0 + u_5) - 25(u_1 + u_4) + 150(u_2 + u_3)]$$

gestaltet, so erhält man $u_{\frac{5}{2}} = 0{,}367204$; daher ist

$$S_{7_2} = -0{,}367204.(3)^{\frac{5}{2}} \quad \text{oder} \quad S_{7_2} = -5{,}7241.$$

$$\text{Es ist aber} \qquad S_{7_1} = +6{,}2617;$$

$$\text{folglich ist} \quad \tfrac{1}{2}(S_{7_1}+S_{7_2}) = \quad 0{,}2688$$

ein Näherungswerth der Reihe P, und die gegebene Reihe hat den Näherungswerth $2-P=1{,}7312$. Beachtet man nun, dafs die gegebene Reihe aus der Binomialreihe $(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}y-\frac{1.1}{1.2.2^2}y^2+\cdots$ entspringt, wenn man $y=2x$ setzt, so erhält man für die Reihe der geschlossenen Ausdrücke $\sqrt{(1+2x)}=\sqrt{3}$, dessen Werth $=1{,}73205\ldots$ ist. Der Unterschied zwischen dem Näherungswerthe, den wir fanden, und dem wahren Werthe der Reihe, ist daher kleiner als 0,0009.

Als zweites Beispiel diene die Reihe

$$y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\cdots: \text{ allgem. Glied } \pm\frac{1}{n}y^n;$$

welche für den Werth $y=1{,}5$ in die divergente Reihe

$$1{,}5-1{,}125+1{,}125-1{,}26563+1{,}51876-1{,}89844+\cdots$$

übergeht. Setzt man diese Reihe $=1{,}5-P$, so ist

$$P = 1{,}26563-1{,}51876+1{,}89844-2{,}44085+3{,}20362-4{,}27149$$
$$+5{,}76650-7{,}86341+10{,}81219-14{,}97073+20{,}85209-\cdots$$

und die Summirung giebt

$$\begin{array}{ll} S_1 = +\ 1{,}26563, & \\ S_3 = +\ 1{,}64531, & \\ S_5 = +\ 2{,}40808, & S_2 = -0{,}25313, \\ S_7 = +\ 3{,}90309, & S_4 = -0{,}79554, \\ S_9 = +\ 6{,}85187, & S_6 = -1{,}86341, \\ S_{11} = +12{,}73323, & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{array}$$

Nimmt man hier das beliebige n gerade und $n=6$, so ist $S_{6_2}=-1{,}8634$. Zur Bestimmung von S_{6_1} kann man die Reihe

Index	0,	1,	2,	3,	4,	5,
Corresp. Glied	1,26563,	$1{,}23398(\frac{4}{3})$,	$1{,}35455(\frac{4}{3})^2$,	$1{,}64664(\frac{4}{3})^3$,	$2{,}16797(\frac{4}{3})^4$,	$3{,}02165(\frac{4}{3})^5$

gebrauchen, und die Anwendung der Interpolationsformel giebt $u_{\frac{5}{2}}=+1{,}4757$;

$$\text{daher } S_{6_1} = 1{,}4757.(\tfrac{4}{3})^{\frac{5}{2}} \quad \text{oder} \quad S_{6_1} = +3{,}0292;$$

$$\text{da nun} \qquad S_{6_2} = -1{,}8634,$$

$$\text{so ist} \quad \tfrac{1}{2}(S_{6_1}+S_{6_2}) = \quad 0{,}5829 = P$$

und die gegebene Reihe $1{,}5-P$ ist $=0{,}9171$.

Die gegebene Reihe ist aber $\log(1+y) = \log(2,5) = 0,9163\ldots$; der gefundene Näherungswerth differirt mithin nur um 0,0008 von dem wahren Werthe.

Um auch ein Beispiel von der Anwendung dieses Verfahrens auf eine convergente Reihe zu geben, setze ich in der letzten Reihe $y=1$; man hat alsdann die Reihe

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

Die Summirung giebt

$$\begin{array}{ll} S_1 = 1,00, & S_2 = 0,5, \\ S_3 = 0,8333\ldots, & S_4 = 0,5833\ldots, \\ S_5 = 0,78333\ldots, & S_6 = 0,6166\ldots, \\ S_7 = 0,759524, & S_8 = 0,634524, \\ S_9 = 0,745635, & S_{10} = 0,645635, \\ S_{11} = 0,736544; & S_{12} = 0,653211. \end{array}$$

Nimmt man $n=7$, so ist

$$\begin{array}{rrl} & S_{7_1} = & 0,759524, \\ \text{und die Interpolation giebt} & S_{7_2} = & 0,626618; \\ \hline \text{mithin ist} & \tfrac{1}{2}(S_{7_1} + S_{7_2}) = & 0,693071. \end{array}$$

Nimmt man $n=6$, so ist

$$\begin{array}{rrl} & S_{6_2} = & 0,616667, \\ \text{und die Interpolation giebt} & S_{6_1} = & 0,770172; \\ \hline \text{mithin} & \tfrac{1}{2}(S_{6_1} + S_{6_2}) = & 0,693419. \end{array}$$

Es ist aber $\log 2 = 0,693147\ldots$

Es ist nur zweifelhaft, ob sich dieses Verfahren zu einer practischen Methode werde ausbilden lassen; denn es liegt in der Natur der Sache, dafs man einen gröfseren oder geringeren Grad der Näherung erhalten werde, je nachdem die angewendete Interpolationsformel mehr oder weniger dem unbekannten Gesetze der Reihe entspricht. Ich betrachte daher diese Methode für jetzt nicht als practisch; wenn es gleichwohl möglich ist, dafs sie durch zweckmäfsige Auswahl der Interpolationsformel und Vorbereitung der zu interpolirenden Reihen dazu ausgebildet werden könnte; ich habe dieselbe aber nicht übergehen dürfen, weil ihr Verfahren direct aus der Bedeutung der divergenten Reihen folgt, und daher besonders geeignet ist, die Wahrheit dieser Bedeutung in das rechte Licht zu stellen.

§. 6.

Transformation der divergenten Reihen in convergente.

Das einfachste Mittel zur Bestimmung des Werths einer divergenten Reihe ist die Transformation derselben in eine convergente Reihe, deren Summe man alsdann auf die gewöhnliche Weise berechnet.

Ist der Werth einer divergenten Reihe, welche als arithmetisches Mittel aufgefafst wird, $= f(x)$, so wird es auch eine convergente Reihe geben können, welche die nemliche Gröfse zur Summe hat.

Das Problem der Transformation hat nun die Bedeutung: eine convergente Reihe zu suchen, welche den Werth der gegebenen divergenten Reihe zur Summe hat.

Wir halten uns zunächst an die von *Euler* häufig angewendeten Transformationsformeln.

Hat die gegebene divergente Reihe wechselnde Zeichen und ist

$$f(x) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots,$$

so giebt die Substitution $x = \frac{y}{1-y}$, woraus $y = \frac{x}{1+x}$ folgt, wenn die Potenzen von $\frac{y}{1-y}$ in Reihen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \pm a + by + by^2 &+ by^3 + by^4 + \cdots \\ - cy^2 &- 2cy^3 - 3cy^4 - \\ &+ dy^3 + 3dy^4 + \\ &\qquad - ey^4 + \end{aligned}$$

und setzt man $c - b = \Delta b$, $d - 2c + b = \Delta^2 b$, u. s. w. und statt y seinen Werth $\frac{x}{1+x}$, so erhält man

$$f(x) = \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 b\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \Delta^3 b\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \cdots:$$

eine Reihe, die convergent ist, wenn die Differenzenreihe der Coëfficienten fällt, oder langsam steigt; steigen die Differenzen rasch, so kann die gefundene Reihe divergent sein; die Wiederholung des Transformations-Verfahrens führt aber sicher zu einer convergenten Reihe.

Hat die gegebene divergente Reihe bleibende Zeichen, und ist

$$F(z) = \pm a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots,$$

so führt die Substitution $z = \frac{y}{1+y}$ zu der Transformationsformel

$$F(z) = \pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \Delta^2 b\left(\frac{z}{1-z}\right)^3 + \cdots,$$

welche jedoch nur dann eine convergente Reihe bildet, wenn die Differenzenreihe stark fällt.

Die Zuläfslichkeit dieser *Euler*schen Transformationen, bei welchen die allgemeinen Regeln analytischer Rechnungen befolgt sind, wird bei convergenten Reihen, welche alsdann in mehr convergirende verwandelt werden, von Niemanden bezweifelt werden können; denn die Gleichungen

$$f(x) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots = \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \varDelta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots,$$

$$F(z) = \pm a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots = \pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \varDelta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots$$

sind in diesem Falle, auch nach der jetzt herrschenden Ansicht, identische Gleichungen.

Die Gültigkeit der Anwendung der Transformation auf die Fälle, wo die Reihen $\pm a + bx - cx^2 + \cdots$ und $\pm a + bz + cz^2 + \cdots$ divergent sind, läfst sich aber durch folgenden Beweis begründen.

Wenn die Reihen für die Intervalle $x > x'$, $z > z'$ divergent sind, so werden sie für die Intervalle $x < x'$, $z < z'$ convergent sein; für diese Intervalle hat man demnach

$$f(x) = \pm a + bx - cx^2 + \cdots = \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \varDelta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots,$$

$$F(z) = \pm a + bz + cz^2 + \cdots = \pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \varDelta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots,$$

und es sind $f(x)$, $F(z)$ die Summen, sowohl der auf der linken, als der auf der rechten Seite stehenden Reihen.

Werden $x > x'$ und $z > z'$, so bleiben, der Voraussetzung nach, die auf der rechten Seite stehenden Reihen convergent; für diese behalten also $f(x)$ und $F(z)$ die Bedeutung der Summe dieser Reihen. Die Reihen auf der linken Seite werden divergent: $f(x)$ und $F(z)$ können daher für diese nicht mehr die Bedeutung einer Summe haben. Nach dem Satze IV. §. 3. sind aber die Functionen $f(x)$ und $F(z)$ für das Intervall der Divergenz die Werthe der als arithmetisches Mittel aufgefafsten Reihen, wenn die nemlichen Functionen $f(x)$ und $F(z)$ für das Intervall der Convergenz die Summen der Reihen darstellen. Die convergenten Reihen

$$\pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \varDelta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots,$$

$$\pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \varDelta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots$$

haben demnach Summen, welche den Werthen der divergenten Reihen

$$\pm a + bx - cx^2 + \cdots,$$
$$\pm a + bz + cz^2 + \cdots$$

gleich sind.

§. 7.

Verschiedene Beispiele der Bestimmung des Werths divergenter Reihen.

Es wird zweckmäfsig sein, mehrere Beispiele der Werthbestimmung divergenter Reihen aus den verschiedenen Gebieten der Analysis zu geben. Es sind natürlich nur solche Beispiele gewählt, bei denen die Richtigkeit des Resultats auf andre Weise geprüft werden kann.

1. Die Reihe

$$\frac{2}{1}\cdot x - \frac{2^2}{2}\cdot x^2 + \frac{2^3}{3}\cdot x^3 - \frac{2^4}{4}\cdot x^4 + \cdots, \quad \left(\text{allgem. Glied } \pm\frac{2^n}{n}\cdot x^n\right),$$

welche $\log(1+2x)$ darstellt, ist für den Werth $x=1$ divergent. Transformirt man sie, so ist hier $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$, $a=0$, $b=\frac{2}{1}$, $c=\frac{2^2}{2}$, etc., folglich $\varDelta b = 0$, $\varDelta^2 b = \frac{2}{3}$, $\varDelta^3 b = 0$, $\varDelta^4 b = \frac{2}{5}$, $\varDelta^5 b = 0$, $\varDelta^6 b = \frac{2}{7}$, $\varDelta^7 b = 0$, $\varDelta^8 b = \frac{2}{9}$, $\varDelta^9 b = 0$, $\varDelta^{10} b = \frac{2}{11}$, $\varDelta^{11} b = 0$, $\varDelta^{12} b = \frac{2}{13}$, $\varDelta^{13} b = 0$, $\varDelta^{14} b = \frac{2}{15}$; man erhält daher die convergente Reihe:

$$= 1 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \tfrac{2}{5}(\tfrac{1}{2})^5 + \tfrac{2}{7}(\tfrac{1}{2})^7 + \tfrac{2}{9}(\tfrac{1}{2})^9 + \tfrac{2}{11}(\tfrac{1}{2})^{11} + \tfrac{2}{13}(\tfrac{1}{2})^{13} + \tfrac{2}{15}(\tfrac{1}{2})^{15} + \cdots;$$

und summirt man die hier aufgeführten 8 Glieder der Reihe, so erhält man den Näherungswerth $= 1{,}098612$, der noch in der 6ten Decimale richtig ist, da $\log(1+2x) = \log 3 = 1{,}0986122\ldots$

2. Die Reihe

$$1 + y - \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1.3}{1.2.3}y^3 - \cdots \quad \left(\text{allgemeines Glied } \pm\frac{1.3\ldots(2n-5)(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)n}y^n\right)$$

ist die Entwicklung von $\sqrt{(1+2y)}$ nach der Binomialformel, und ist divergent, wenn $y=1$. Ich bringe sie auf die Form

$$1 + y + \tfrac{1}{2}y^2(y-1) - y^3 Y,$$

wo die divergente Reihe

$$Y = \tfrac{5}{8}y - \tfrac{7}{8}y^2 + \tfrac{21}{16}y^3 - \cdots$$

zu transformiren ist.

Es ist hier $a=0$, $b=\frac{5}{8}$, $c=\frac{7}{8}$, ..., mithin

$$\varDelta b = \tfrac{1}{4}, \quad \varDelta^2 b = \tfrac{3}{16}, \quad \varDelta^3 b = \tfrac{1}{8}, \quad \varDelta^4 b = \tfrac{13}{128}, \quad \varDelta^5 b = \tfrac{10}{128}, \quad \varDelta^6 b = \tfrac{17}{256},$$
$$\varDelta^7 b = \tfrac{7}{128}, \quad \varDelta^8 b = \tfrac{49}{1024}.$$

Man erhält demnach die transformirte convergente Reihe

$$Y = \tfrac{5}{8}\left(\frac{y}{1+y}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \tfrac{3}{16}\left(\frac{y}{1+y}\right)^3 - \cdots$$

Um eine mehr convergirende Reihe zu erhalten, wiederhole man das Verfahren. Es ist alsdann

$$a=0,\quad b=\tfrac{5}{8},\quad \varDelta b=-\tfrac{3}{8},\quad \varDelta^2 b=\tfrac{5}{16},\quad \varDelta^3 b=-\tfrac{5}{16},\quad \varDelta^4 b=\tfrac{45}{128},$$
$$\varDelta^5 b=-\tfrac{55}{128},\quad \varDelta^6 b=\tfrac{143}{256},\quad \varDelta^7 b=-\tfrac{195}{256},\quad \ldots$$

und man erhält

$$Y = \tfrac{5}{8}\left(\frac{y}{1+2y}\right) + \tfrac{3}{8}\left(\frac{y}{1+2y}\right)^2 + \tfrac{5}{16}\left(\frac{y}{1+2y}\right)^3 + \cdots$$

Setzt man für y den Werth $=1$ und summirt die 8 Glieder der Reihe, deren Coëfficienten hier angegeben sind, so erhält man den Näherungswerth $Y=0{,}26784$. Es stimmt mithin der Näherungswerth der gegebenen Reihe $2-Y=1{,}73216$, mit dem wahren Werthe von $\sqrt{3}=1{,}73205\ldots$ bis auf die 4te Decimalstelle überein.

3. Als Beleg für die Behauptung, dafs man zwei unendliche convergente Reihen nicht unbedingt in gewöhnlicher Weise mit einander multipliciren dürfe, ist öfter angeführt worden, dafs die Reihe

$$S = \frac{1}{\sqrt[4]{1}}x - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}x^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}x^3 - \cdots, \quad \left(\text{allgem. Glied } \pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}}x^n\right),$$

welche für $x=1$ convergirt, mit sich selbst multiplicirt die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1}}x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)x^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(2.2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)x^4 - \cdots$$

giebt, welche für $x=1$ divergent ist und daher für verwerflich gilt. Ich werde zeigen, dafs diese divergente Reihe eben den Werth $(S)^2$ hat.

Man findet leicht durch Transformation der Reihe S in eine mehr convergirende, dafs $S=0{,}5545$ ist; es ist daher $(S)^2=0{,}3075$. Transformirt man die obige divergente Reihe in eine convergente, so hat man,

$$a=0,\quad b=1,\quad \varDelta b=0{,}6818,\quad \varDelta^2 b=-0{,}1369,\quad \varDelta^3 b=0{,}0573,$$
$$\varDelta^4 b=-0{,}0308,\quad \varDelta^5 b=0{,}0182,\quad \varDelta^6 b=-0{,}0091$$

und für $x=1$ erhält man die convergente Reihe

$$1(\tfrac{1}{2}) - 0{,}6818(\tfrac{1}{2})^2 - 0{,}1369(\tfrac{1}{2})^3 - 0{,}0573(\tfrac{1}{2})^4 - 0{,}0308(\tfrac{1}{2})^5 - 0{,}0182(\tfrac{1}{2})^6$$
$$- 0{,}0091(\tfrac{1}{2})^7 - \cdots,$$

deren Summe $=0{,}3075=(S)^2$ ist.

4. Die Reihe

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \tfrac{1}{2}K_2x^2 - \tfrac{1}{3}K_3x^3 + \tfrac{1}{4}K_4x^4 - \cdots,$$

$$\left(\text{allgem. Glied } \pm\frac{1}{n}K_nx^n\right),$$

in welcher C die Constante des Integrallogarithmus $= 0{,}5772157$ und K_n die Summe der unendlichen Reihe

$$\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\right)$$

bezeichnen, wird abgeleitet aus der Gleichung

$$\frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx} = -C + \frac{1}{1}\,\frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x} + \cdots,$$

indem die Glieder $\frac{x}{1+x}$, $\frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$, ... nach Potenzen von x entwickelt werden; und da nun die dadurch entstehenden Reihen divergent sind, wenn $x \overline{\overline{>}} 1$ ist, so wird angenommen, dafs die gegebene Reihe nur für die Werthe $x < 1$ gelte.

Ich werde zeigen, dafs die Reihe auch für gröfsere Werthe von x, z. B. für $x = 2$, ein richtiges Resultat giebt.

Bringt man die Reihe auf die Form

$$-Cx + \tfrac{1}{2}K_2x^2 - \tfrac{1}{3}K_3x^3 + x^3P,$$

wo

$$P = \tfrac{1}{4}K_4x - \tfrac{1}{5}K_5x^2 + \tfrac{1}{6}K_6x^3 - \cdots,$$

und nimmt die Werthe von K_1, K_2, ..., wie sie in *Legendre* „Exercices" aufgeführt stehen, so erhält man zur Berechnung des Werths von P:

$$a = 0, \quad b = 0{,}2705808,$$

$\varDelta b = -0{,}0631953$, $\quad \varDelta^2 b = +0{,}0253669$, $\quad \varDelta^3 b = -0{,}0130458$,

$\varDelta^4 b = +0{,}0076917$, $\quad \varDelta^5 b = -0{,}0049399$, $\quad \varDelta^6 b = +0{,}0033661$,

$\varDelta^7 b = -0{,}0023973$, $\quad \varDelta^8 b = +0{,}0017676$, $\quad \varDelta^9 b = +0{,}0013406$,

$\varDelta^{10} b = -0{,}0010409$, $\quad \varDelta^{11} b = -0{,}0008244$, $\quad \varDelta^{12} b = +0{,}0006640$,

$\varDelta^{13} b = -0{,}0005428$, $\quad \varDelta^{14} b = -0{,}0004494$, $\quad$ ferner $\frac{x}{1+x} = \frac{2}{3}$,

daher

$$P = 0{,}2705808(\tfrac{2}{3}) + 0{,}0631953(\tfrac{2}{3})^2 + 0{,}0253669(\tfrac{2}{3})^3 + \cdots,$$

und wenn die 15 Glieder dieser Reihe, für welche die Coëfficienten hier angegeben sind, summirt werden, erhält man $P = 0{,}2203994$, Der Näherungswerth der gegebenen Reihe wird daher durch folgende Rechnung gefunden:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}K_2(2)^2 &= 3{,}2898681, \\ (2)^3 P &= 1{,}7631950, \\ \hline & +5{,}0530631; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \div C(2) &= -1{,}1544313, \\ -\tfrac{1}{3}K_3(2)^3 &= -3{,}2054851, \\ \hline & \div 4{,}3599164; \end{aligned}$$

$$5{,}0530631 - 4{,}3599164 = 0{,}6931467.$$

Der wahre Werth von $\log\Gamma(1+2)$ ist $= \log 2 = 0{,}69314718\ldots$, mithin ist die Differenz $< 0{,}0000005$.

5. Es wird allgemein angenommen, dafs die Anwendung der Summenformel

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}F(ux^\beta)\,dx = \frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+p-1)}$$
$$+\frac{A_1}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}+\frac{A_2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\ldots(\alpha+2\beta+p-1)}+\cdots,$$

in welcher

$$F(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots$$

ist, nur in den Fällen Statt finden könne, wo die Reihe $A_0 + A_1 u + \cdots$ convergent ist, und demgemäfs beschränkt man bei der Specialisirung $F(u) = \frac{1}{1+u}$ die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{(1+u)^2}{2u^3}\log(1+u) - \frac{1}{2u^2} - \frac{3}{4u} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{u}{2.3.4} + \frac{u^2}{3.4.5} - \frac{u^3}{4.5.6} + \cdots$$

auf das Intervall $u < 1$.

Ich werde den Werth der Reihe für $u = 2$ berechnen. Die rechte Seite der Gleichung setze ich $= \frac{1}{6} - P$, wo

$$P = \frac{u}{24} - \frac{u^2}{60} + \frac{u^3}{120} - \cdots$$

Zur Bestimmung des Werths von P hat man

$a = 0$, $b = \frac{1}{24}$, $\Delta b = -\frac{1}{40}$, $\Delta^2 b = \frac{1}{60}$, $\Delta^3 b = -\frac{1}{84}$, $\Delta^4 b = \frac{1}{112}$, $\Delta^5 b = -\frac{1}{144}$, $\Delta^6 b = \frac{1}{180}$, $\Delta^7 b = -\frac{1}{220}$, $\Delta^8 b = \frac{1}{264}$, $\Delta^9 b = -\frac{1}{312}$, $\Delta^{10} b = \frac{1}{364}$, $\Delta^{11} b = -\frac{1}{420}$, $\Delta^{12} b = \frac{1}{480}$, $\Delta^{13} b = -\frac{1}{544}$, $\Delta^{14} b = \frac{1}{612}$,

mithin, da $\frac{u}{1+u} = \frac{2}{3}$ ist:

$$P = \tfrac{1}{24}(\tfrac{2}{3}) + \tfrac{1}{40}(\tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{1}{60}(\tfrac{2}{3})^3 + \cdots$$

und die Summirung der ersten 15 Glieder dieser Reihe giebt

$$P = 0{,}0486919,$$

daher

$$\tfrac{1}{6} - P = 0{,}1179748.$$

Der Werth der linken Seite der Gleichung $\frac{9}{16}\log 3 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8}$ ist $= 0{,}1179694\ldots$, die Differenz daher $< 0{,}000006$.

6. Als ein Beispiel davon, dafs auch der Werth enorm divergirender Reihen durch wiederholte Anwendung der Transformationsformel gefunden werden könne, beziehe ich mich auf *Lacroix* „Traité des différences et des séries. n. 1046", wo der Werth der Reihe

$$1.x - 1.2.x^2 + 1.2.3.x^3 - \cdots \quad (\text{allgem. Glied } \pm 1.2.3.4\ldots n.x^n)$$

für $x = 1$ nach einer Berechnung von *Euler* zu 0,4008 bestimmt wird, mithin erst in der 3ten Decimale abweichend von dem Werthe 0,40365 ..., welcher durch Berechnung der transcendenten Function $\int \frac{e^x dx}{x}$ gefunden wird. (Vergl. *Lacroix* ib. n. 1116).

7. Um endlich auch von der Transformation einer Reihe mit *bleibenden* Zeichen ein einfaches Beispiel zu geben, sei die Reihe

$$S = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \quad \left(\text{allgem. Glied } + \frac{n(n+1)}{1.2} x^{n-1}\right)$$

gegeben, wo

$$a = 1, \quad b = 3, \quad \varDelta b = 3, \quad \varDelta^2 b = 1, \quad \varDelta^3 b = \varDelta^4 b = \cdots = 0$$

ist. Die *Euler*sche Formel giebt in diesem Falle, weil die Differenzen, von der 3ten an gerechnet, verschwinden:

$$S = 1 + 3\left(\frac{x}{1-x}\right) + 3\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = \frac{1}{(1-x)^3},$$

mithin für $x > 1$ einen negativen Werth; und darin liegt kein Widerspruch, weil die divergente Reihe nicht als Summe, sondern als arithmetisches Mittel anzusehen ist.

§. 8.

Allgemeinere Auffassung des Problems der Transformation.

Ist die Reihe

$$\pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots = F(x)$$

das allgemeine Schema einer unendlichen Reihe, indem die Coëfficienten beliebige positive oder negative endliche Gröfsen sind, so hat man, da alle Reihen, welche hier betrachtet werden, nach der *Maclaurin*schen Formel sich entwickeln lassen:

$$\pm a = F(0), \quad b = \tfrac{1}{1}F'(0), \quad c = \frac{1}{1.2}F''(0) \text{ u. s. w.,}$$

wo $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ die Werthe bezeichnen, welche der, hier übrigens als unbekannt vorausgesetzte geschlossene Ausdruck $F(x)$ und dessen Differential-Coëfficienten $F'(x)$, $F''(x)$, ... für den Werth $x=0$ annehmen.

Divergirt nun die Reihe für einen Werth $x=x'$ und man will sie in eine convergente Reihe verwandeln, so setze man $x=\psi(y)$; woraus $y=\psi_1(x)$ folgt, wenn $\psi_1(x)$ die umgekehrte Function von $\psi(x)$ bezeichnet. Man hat alsdann

$$F(x) = F[\psi(y)];$$

und läfst sich die Function $F[\psi(y)]$, die wir zur Abkürzung $=\varphi(y)$ setzen wollen, nach der *Maclaurin*schen Formel in eine nach steigenden Potenzen von y geordnete Reihe entwickeln, so ist

$$\varphi(y) = \varphi(0)+\tfrac{1}{1}\varphi'(0)y+\frac{1}{1.2}\varphi''(0)y^2+\frac{1}{1.2.3}\varphi'''(0)y^3+\cdots$$

Die Differenziirung der Gleichung

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= F[\psi(y)] \quad \text{giebt aber}\\
\varphi'(y) &= F'[\psi(y)]\psi'(y),\\
\varphi''(y) &= F''[\psi(y)](\psi'(y))^2+F'[\psi(y)]\psi''(y),\\
\varphi'''(y) &= F'''[\psi(y)](\psi'(y))^3+3F''[\psi(y)]\psi'(y)\psi''(y)+F'[\psi(y)]\psi'''(y),\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Hat nun die Function $x=\psi(y)$ eine solche Form, dafs für $y=0$ auch $x=0$, mithin $\psi(0)=0$ ist, so erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= F(0) = \pm a,\\
\varphi'(0) &= F'(0)\psi'(0) = b\psi'(0),\\
\varphi''(0) &= F''(0)(\psi'(0))^2+F'(0)\psi''(0) = 1.2.c(\psi'(0))^2+b\psi''(0),\\
\varphi'''(0) &= 1.2.3.d(\psi'(0))^3+3.1.2.c\psi'(0)\psi''(0)+b\psi'''(0),\\
&\text{u. s. w.,}
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
F[\psi(y)] = \varphi(y) = \pm a+b\psi'(0).y+\left[c(\psi'(0))^2+\frac{b}{1.2}\psi''(0)\right]y^2&\\
+\left[d(\psi'(0))^3+2\frac{c}{1.2}\psi'(0)\psi''(0)+\frac{b}{1.2.3}\psi'''(0)\right]y^3+\cdots,&
\end{aligned}$$

oder, wenn x für $\psi(y)$ und $\psi_1(x)$ für y restituirt wird:

$$F(x) = \pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$
$$= \pm a + [b\psi'(0)]\psi_1(x) + \left(c(\psi'(0))^2 + \frac{b}{1.2}\psi''(0)\right)(\psi_1(x))^2$$
$$+ \left[d(\psi'(0))^3 + 2\frac{c}{1.2}\psi'(0)\psi''(0) + \frac{b}{1.2.3}\psi'''(0)\right](\psi_1(x))^3 + \cdots.$$

Diese transformirte Reihe kann mithin ohne Kenntnifs des geschlossenen Ausdrucks $F(x)$ aus der gegebenen Reihe gebildet werden. Die transformirte Reihe wird für den Werth $x = x'$ convergent sein, wenn für diesen $\psi_1(x) < 1$ und wenn die Reihe der Coëfficienten $b\psi'(0)$, $c(\psi'(0))^2 + \frac{b}{1.2}\psi''(0)$ u. s. w. eine fallende ist: kann daher die Function $\psi(y) = x$ so gewählt werden, dafs diesen Bedingungen genügt wird, so wird man eine geeignete Transformationsformel erhalten.

Die Zuläfslichkeit einer solchen Transformation kann bei convergenten Reihen keinen Zweifel haben; der Beweis der Zuläfslichkeit für divergente Reihen wird wie in (§. 6.) durch Hülfe des Satzes (IV. §. 3.) geführt.

Ist die gegebene Reihe eine Reihe mit wechselnden Zeichen, und setzt man $\psi(y) = \frac{y}{1-y}$, mithin $\psi_1(x) = \frac{x}{1+x}$, so erhält man die in (§. 6.) entwickelte *Euler*sche Formel

$$= \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots.$$

Hat die gegebene Reihe bleibende Zeichen und man setzt $\psi(y) = \frac{y}{1+y}$, mithin $\psi_1(x) = \frac{x}{1-x}$, so erhält man die zweite *Euler*sche Transformationsformel.

Die letztere Formel ist in der Regel mangelhaft; die erstere giebt eine rasche Näherung, wenn die Differenzenreihe fallend ist. Ist diese aber steigend, welches in den Fällen Statt findet, wo die Reihe der Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ entweder rasch steigt oder rasch fällt, so ist die *Euler*sche transformirte Reihe langsam convergirend, oder gar divergent, und es würde daher eine wiederholte Anwendung der Transformation nöthig sein.

Man kann aber auch Transformationsformeln aufstellen, welche für diese Fälle passend sind.

Für den Fall des raschen Steigens der Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ der Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots,$$

setze man $\psi(y)=\frac{y}{1-my}$, mithin $\psi_1(x)=\frac{x}{1+mx}$. Dies giebt

$$\psi'(y)=\frac{1}{(1-my)^2},\quad \psi''(y)=\frac{2m}{(1-my)^3},\quad \psi'''(y)=\frac{2.3.m^2}{(1-my)^4},\ \ldots,$$

daher

$$\psi'(0)=1,\quad \psi''(0)=2m,\quad \psi'''(0)=2.3.m^2,\ \text{etc.}$$

und man gelangt zu der transformirten Reihe

$$\pm a+b\left(\frac{x}{1+mx}\right)-(c-mb)\left(\frac{x}{1+mx}\right)^2+(d-2mc+m^2b)\left(\frac{x}{1+mx}\right)^3-\cdots,$$

welche bei einer passenden Wahl von $m>1$ convergiren wird.

Für den Fall, wo die Coëfficienten der Reihe

$$\pm a+bx-cx^2+dx^3-\cdots$$

sehr rasch fallen, wobei die Reihe dennoch für einen entsprechenden Werth von x divergent sein kann, setze man $\psi(y)=\frac{my}{m-y}$, mithin $\psi_1(x)=\frac{mx}{m+x}$. Es ist alsdann

$$\psi'(y)=\frac{m^2}{(m-y)^2},\quad \psi''(y)=\frac{2m^2}{(m-y)^3},\quad \psi'''(y)=\frac{2.3.m^2}{(m-y)^4},\ \ldots,$$

daher

$$\psi'(0)=1,\quad \psi''(0)=\frac{2}{m},\quad \psi'''(0)=\frac{2.3}{m^2},\ \ldots,$$

und man gelangt zu der transformirten Reihe

$$\pm a+m\left[b\left(\frac{x}{m+x}\right)-(mc-b)\left(\frac{x}{m+x}\right)^2+(m^2d-2mc+b)\left(\frac{x}{m+x}\right)^3-\cdots\right],$$

welche bei einer passenden Wahl von $m>1$ convergent sein wird.

§. 9.

Sonstige Mittel zur Bestimmung des Werths einer divergenten Reihe.

Um den Werth einer divergenten Reihe indirect zu finden, ist es nicht gerade nothwendig, sie in eine convergente Reihe zu transformiren. Wenn man die Reihe nur durch irgend eine den Gesetzen analytischer Rechnungen entsprechende Transformation auf eine Form bringt, die eine Werthberechnung zuläfst, so kann dadurch der Zweck erreicht werden.

Der Beweis der Zuläfslichkeit einer solchen Transformation wird wie in (§. 6.) geführt.

Als Beispiel wähle ich die Verwandlung der unendlichen Reihe

$$S=1-1.x+1.2.x^2-1.2.3.x^3+\cdots,$$

deren allgem. Glied $\pm 1.2 \dots n.x^n$ ist und welche für $x=1$ divergirt, in einen Kettenbruch. (Vergl „*Lacroix* Traité des différences et des series. n. 1065.)

Setzt man

$$S = \frac{1}{1+A},$$

$$A = \frac{x-2x^2+6x^3-24x^4+120x^5-720x^6+\cdots}{1-x+2x^2-6x^3+24x^4-120x^5+\cdots} = \frac{x}{1+B},$$

$$B = \frac{x-4x^2+18x^3-96x^4+600x^5-\cdots}{1-2x+6x^2-24x^3+120x^4-\cdots} = \frac{x}{1+C},$$

$$C = \frac{2x-12x^2+72x^3-480x^4+\cdots}{1-4x+18x^2-96x^3+\cdots} = \frac{2x}{1+D},$$

$$D = \frac{2x-18x^2+144x^3-\cdots}{1-6x+36x^2-\cdots} = \frac{2x}{1+E},$$

$$E = \frac{3x-36x^2+\cdots}{1-9x+\cdots} = \frac{3x}{1+F},$$

$$F = \frac{3x-48x^2+\cdots}{1-12x+\cdots} = \frac{3x}{1+G},$$

und so ferner

$$G = \frac{4x}{1+H}, \quad H = \frac{4x}{1+I}, \quad I = \frac{5x}{1+K}, \quad \text{u. s. w.},$$

so erhält man den Kettenbruch

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+4x}}}}}}}} \text{ u. s. w.}$$

Für $x=1$ erhält man die Näherungswerthe

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{8}{13},\ \tfrac{20}{34},\ \tfrac{44}{73},\ \tfrac{124}{209},\ \tfrac{300}{501},\ \dots,$$

welche abwechselnd gröfser und kleiner sind als der Werth der Reihe und sich immer mehr diesem Werthe nähern.

Der Werth der Reihe ist $= 1-P$, wenn P den Werth der in (§. 7. No. 6.) berechneten Reihe: $1.x-1.2.x^2+1.2.3.x^3-\cdots$ bezeichnet, $=0{,}40365\dots$; mithin ist $1-P=0{,}59634\dots$. Es ist aber $\frac{124}{209}=0{,}5933$ und $\frac{300}{501}=0{,}5988$, und es läfst sich die Näherung beliebig verstärken.

§. 10.

Allgemeine Bemerkung über die vorhergehenden Methoden.

Bei genauerer Untersuchung wird man finden, dafs die Anwendung der vorhergehenden Methoden zur Bestimmung des Werths divergenter Reihen Schwierigkeiten haben könne, wenn man einen bestimmten Grad der Näherung verlangt. Namentlich sind sie zur Berechnung der Reihen mit bleibenden Zeichen oft unzureichend; so wie bei Reihen mit wechselnden Zeichen, in den Fällen, wo die Transformation auf eine langsam convergirende Reihe führt.

Auch lassen sich oftmals die *Grenzen* der Näherung nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen; was von einer practischen Methode billig gefordert wird.

Diese Mangelhaftigkeit der Methoden berührt indefs nicht den Gegenstand, den ich behandele; es ist für mich hinreichend, nachgewiesen zu haben, dafs und durch welche Methoden es *möglich* sei, den Werth divergenter Reihen zu berechnen. Practische Methoden werden bald geschaffen sein, wenn diesem Gegenstande eine allgemeinere Aufmerksamkeit zugewendet wird.

III.

Erstreckung der Bedeutung eines arithmetischen Mittels und der Methoden der Werthbestimmung auf alle nach Potenzen einer Variabeln geordnete divergente Reihen.

§. 11.

Begründung.

Wir haben bisher nur die Reihen mit wechselnden Zeichen und die Reihen mit bleibenden Zeichen der Betrachtung unterzogen, und gesehen, dafs die letztern durch Veränderung des Zeichens der Variabeln sich in Reihen mit wechselnden Zeichen verwandeln lassen. Wir wenden uns jetzt zu den Reihen, bei denen ein Wechsel der Zeichen in anderer Weise Statt findet; welche *Reihen mit veränderlichen Zeichen* benannt werden mögen.

Da hier überall nur von Reihen die Rede ist, die durch Entwickelung einer Function entstanden sein können (Vergl. §. 18.), die mithin nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind, so mufs ein *regelmäfsiger* Zeichenwechsel bei jeder Reihe vorausgesetzt werden. Um die Regelmäfsigkeit festzuhalten, betrachten wir die Reihen mit veränderlichen Zeichen entweder als Reihen mit *wechselnden* Zeichen, oder als Reihen mit *bleibenden* Zeichen, bei denen für jedes $m$te Glied ein entgegengesetztes Zeichen eintritt.

Im ersten Falle erhält man, z. B. wenn $m=3$, die Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 - dx^3 + ex^4 + fx^5 - gx^6 - hx^7 + ix^8 + \cdots,$$

und wenn $m=4$, die Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 - fx^5 + gx^6 + hx^7 - ix^8 + kx^9 + lx^{10} - \cdots$$

Im letzten Falle entsteht, wenn $m=4$, die Reihe

$$\pm a + bx + cx^2 + dx^3 - ex^4 + fx^5 + gx^6 - hx^7 + ix^8 + kx^9 - \cdots$$

Zu dieser Classe von Reihen gehören auch diejenigen Reihen mit wechselnden Zeichen, bei welchen in regelmäfsiger Folge gewisse Potenzen der Variabeln fehlen und bei denen eine Substitution nicht möglich ist; denn restituirt man die fehlenden Glieder mit den zugehörigen Coëfficienten $=0$, so verwandelt sich die Reihe mit wechselnden Zeichen in eine zur obigen Classe gehörige Reihe. Die Reihen mit bleibenden Zeichen endlich, bei denen in regelmäfsiger Folge gewisse Potenzen der Variabeln fehlen, lassen sich durch Veränderung des Zeichens der Variabeln auf Reihen mit veränderlichen Zeichen reduciren.

Eine jede Reihe mit veränderlichen Zeichen läfst sich offenbar auf die Form

$$\pm a \pm x F_1(x) \pm x^2 F_2(x) \pm \cdots \pm x^m F_m(x)$$

bringen, wo, je nach Beschaffenheit der gegebenen Reihe, das obere oder das untere Zeichen gültig ist, und $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ Reihen mit wechselnden Zeichen, oder Reihen mit bleibenden Zeichen, mithin nur solche Reihen bezeichnen, die wir in den vorhergehenden Paragraphen behandelt haben.

So z. B. läfst sich die erste der oben angeführten Reihen auf die Form

$$\begin{aligned}\pm a &+ x[b - dx^2 + fx^4 - hx^6 + \cdots]\\ &- x^2[c - ex^2 + gx^4 - \cdots],\end{aligned}$$

die zweite auf die Form

$$\begin{aligned}\pm a &+ x[b + ex^3 + hx^6 + \cdots]\\ &- x^2[c + fx^3 + ix^6 + \cdots]\\ &+ x^3[d + gx^3 + kx^6 + \cdots]\end{aligned}$$

bringen, und durch Substitution von u, resp. für x^2 und x^3, wird die erste auf zwei unendliche Reihen mit wechselnden Zeichen, die zweite auf drei unendliche Reihen mit bleibenden Zeichen reducirt.

Bezeichnet $S(a + bx + \cdots)$ eine unendliche Reihe mit veränderlichen Zeichen, welche dem Vorstehenden nach sich auf die Form

4 *

$$= \pm a \pm x F_1(x) \pm x^2 F_2(x) \pm \cdots \pm x^m F_m(x)$$

bringen läfst, und sind $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_m(x)$ die Grenzen der Summen der unendlichen Reihen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ für das Intervall der Convergenz, so ist

$$S(a+bx+\cdots) = \pm a \pm x f_1(x) \pm x^2 f_2(x) \pm \cdots \pm x^m f_m(x)$$

für das Intervall der Convergenz eine identische Gleichung zwischen der Reihe $S(a+bx+\cdots)$ und der auf der rechten Seite stehenden Function, welche die Grenze der Summe der Reihe $S(a+bx+\cdots)$ darstellt. Erhält aber x einen so grofsen Werth, dafs die Reihen divergent werden, so folgt aus dem Satze (IV. §. 3.), dafs alsdann $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_m(x)$ die Werthe der unendlichen Reihen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ für das Intervall der Divergenz darstellen, wenn diese Reihen als arithmetisches Mittel aufgefafst werden. Mithin ist dieselbe Function

$$\pm a \pm x f_1(x) \pm x^2 f_2(x) \pm \ldots \pm x^m f_m(x),$$

welche für das Intervall der Convergenz die Grenze der Summe einer Reihe $S(a+bx+\cdots)$ ausdrückt, zugleich der Werth dieser Reihe für das Intervall der Divergenz, wenn die Reihe, dem obigen Functions-Ausdrucke gemäfs, als ein Aggregat arithmetischer Mittel aufgefafst wird.

Es ist einleuchtend, dafs die in (§§. 6 bis 9.) entwickelten Methoden der Werthbestimmung divergenter Reihen durch Transformation auf die Reihen mit veränderlichen Zeichen Anwendung finden, indem es nur einer Transformation der Reihen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ in convergente Reihen oder in eine sonstige für eine Werthberechnung geeignete Form bedarf, um den Werth der Reihe $S(a+bx+\cdots)$ zu finden.

Sollte die Entwickelung einer Function Reihen geben können, die sich den vorhin betrachteten Classen nicht unterordnen lassen, so werden sie doch als ein Aggregat mehrerer, mit verschiedenen Potenzen von x multiplicirter Reihen von den vorhin betrachteten Classen aufgefasset werden können, und es werden demnach die vorstehenden Sätze durch eine ähnliche Schlufsfolgerung auch auf solche Reihen sich erstrecken lassen.

Da nun alle Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln geordnet sind, entweder Reihen mit wechselnden Zeichen, oder Reihen mit veränderlichen Zeichen sind, oder sich auf die eine oder die andere dieser Classen reduciren lassen, oder endlich als ein Aggregat mehrerer solcher Reihen angesehen werden können, und wir nur diejenigen Reihen von der Betrachtung ausgeschlossen haben, deren Coëfficienten unendlich werden, so ist die Bedeutung eines arithmetischen Mittels, resp. eines Aggregats arithmetischer Mittel, und die Möglichkeit der Werthbestimmung divergenter Reihen für alle Reihen nachgewiesen worden, die unter der *Maclaurin*schen Formel

$$F(x) = F(0) + F'(0)\frac{x}{1} + F''(0)\frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

enthalten sind.

§. 12.

Andeutung einer anderweiten Form.

In dem vorhergehenden Paragraph ist eine Reihe mit veränderlichen Zeichen als ein Aggregat arithmetischer Mittel dargestellt worden; sie wird sich aber auch als arithmetisches Mittel *mehrerer* Summenwerthe auffassen lassen.

Ist

$$\begin{aligned} S(a+bx+\cdots) = &\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots + fx^m + gx^{m+1} \\ &- hx^{m+2} + \cdots + lx^{2m} + mx^{2m+1} - nx^{2m+2} + \cdots \end{aligned}$$

eine Reihe mit veränderlichen Zeichen, in welcher bei jedem $(m+1)$ten Gliede ein entgegengesetztes Zeichen eintritt, so hat man nach dem Obigen, wenn $(m+1)$ *gerade* ist:

$$\begin{aligned} S(a+bx\cdots) = &\pm a + x[b + gx^m + mx^{2m} + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km} + \cdots] \\ &- x^2[c + hx^m + nx^{2m} + \cdots sx^{(k-1)m} + wx^{km} + \cdots] \\ &+ x^3[d + ix^m + \cdots + tx^{(k-1)m} + \mathrm{x}x^{km} + \cdots] \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m} + yx^{km} + \cdots]. \end{aligned}$$

Wäre $m+1$ *ungerade* so würde das Zeichen der letzten Glieder jeder Periode von dem Zeichen des ersten Gliedes der Periode verschieden sein; z. B. das Zeichen von f vom Zeichen des b u. s. w., und dann würden die in Parenthesen eingeschlossenen Reihen wechselnde Zeichen haben. Die folgende Ausführung pafst indefs auf beide Fälle.

Sucht man den Summenwerth der ersten n Glieder der Reihe $S(a+bx+\cdots)$:

$$S_n = a + bx - cx^2 + \cdots \pm px^{n-1},$$

so hat man, je nachdem n von der Form $km+1$, $km+2$, $\ldots = (k+1)m$ ist, mehr oder weniger Glieder der in Parenthesen eingeschlossenen Reihen zu summiren. Es ist nemlich

$$S_{km+1} = \pm a + x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m}]$$
$$- x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m}]$$
$$+ x^3[d + ix^m + \cdots + tx^{(k-1)m}]$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}],$$

$$S_{km+2} = \pm a + x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km}]$$
$$- x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m}]$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}],$$

$$S_{km+3} = \pm a + x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km}]$$
$$- x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m} + wx^{km}]$$
$$+ x^3[d + ix^m + \cdots + tx^{(-1)m}]$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}]$$

u. s. f. bis

$$S_{(k+1)m} = \pm a + x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km}]$$
$$- x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m} + wx^{km}]$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$- x^{m-1}[e + kx^m + \cdots + tx^{(k-1)m} + zx^{km}]$$
$$+ x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}];$$

mithin hat S_n m verschiedene Formen, von welchen

Die erste für die Summen S_1, S_{m+1}, S_{2m+1}, ...,

Die zweite für die Summen S_2, S_{m+2}, S_{2m+2}, ...,

u. s. w.,

Die letzte aber für die Summen S_m, S_{2m}, S_{3m}, ...

Anwendung findet. Setzt man in die m Summen-Ausdrücke resp. für $km+1$, $km+2$, ... und $(k+1)m$ den allgemeinen Werth n, so erhält man die m verschiedenen Formen des Summen-Ausdrucks; welche wir durch S_{n_1}, S_{n_2}, ... S_{n_m} bezeichnen wollen.

Es bedeutet mithin S_{n_1}, wenn n nicht von der Form $km+1$ ist, ein nach der ersten Form des Summen-Ausdrucks in die Reihe S_1, S_{m+1}, S_{2m+1}, ... interpolirtes, zum Index n gehöriges Glied; S_{n_2} bedeutet, wenn n nicht von der Form $km+2$ ist, ein nach der zweiten Form des Summen-Ausdrucks in die Reihe S_2, S_{m+2}, S_{2m+2}, ... interpolirtes, zum Index n gehöriges Glied u. s. f.

Aus dem Vorhergehenden ist bekannt, dafs die Summen-Ausdrücke der in Parenthesen eingeschlossenen endlichen Reihen, mögen die Zeichen wechselnd oder bleibend sein, sich auf die Form

$$f(x) \pm F(x, n)$$

bringen lassen, wo $f(x)$ die Function bedeutet, welche für das Intervall der Convergenz die Summe der bis ins Unendliche fortgesetzten Reihe, und $F(x, n)$ eine Function von x und der Gliederzahl n darstellt, welche für das Intervall der Convergenz bei unendlichem Wachsen von n verschwindet.

Von den Summen-Ausdrücken S_{n_1}, S_{n_2}, ... enthält jeder eine Anzahl m Summen-Ausdrücke von obiger Form, welche blofs insoweit verschieden sind, als zu dem einen mehr Glieder derselben Reihen concurrirt haben, als zu dem andern.

Sind die m Summen-Ausdrücke von der Form $f(x) \pm F(x, n)$, welche in jedem der Ausdrücke S_{n_1}, S_{n_2}, ... enthalten sind, nemlich:

$$f_1(x) \pm F_1(x, n), \quad f_2(x) \pm F_2(x, n), \quad \dots \quad f_m(x) \pm F_m(x, n),$$

und setzt man für irgend einen der Summenwerthe S_{n_r}:

$$\begin{aligned} \pm a + x f_1(x) - x^2 f_2(x) + \cdots + x^m f_m(x) &= \varphi(x), \\ \pm (x F_1(x, n) - x^2 F_2(x, n) + \cdots + x^m F_m(x, n)) &= \psi_r(x) \Phi(x, n), \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus der Betrachtung des Intervalls der Convergenz, dafs $\varphi(x)$ die Grenze der Summe der unendlichen Reihe $S(a + bx + \cdots)$ für das Intervall der Convergenz und $\Phi(x, n)$ eine Function bedeutet, welche bei unendlichem Wachsen von n für das Intervall der Convergenz verschwindet.

Die Summen-Ausdrücke S_{n_1}, S_{n_2}, ... werden sich durch Anwendung dieser Reductionen immer auf die Form

$$(A.) \quad \begin{cases} S_{n_1} = \varphi(x) + \psi_1(x) \Phi(x, n), \\ S_{n_2} = \varphi(x) + \psi_2(x) \Phi(x, n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_{n_m} = \varphi(x) + \psi_m(x) \Phi(x, n) \end{cases}$$

bringen lassen; wo $\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) + \cdots + \psi_m(x) = 0$ sein wird.

Wenn demnach S_{n_1}, S_{n_2}, ... u. s. w. auf den nemlichen Werth n bezogen werden, so erhält man:

$$\frac{S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3} + \cdots + S_{n_m}}{m} = \varphi(x);$$

was auch der Werth von n und $\Phi(x, n)$ sein möge.

Eine divergente Reihe mit veränderlichen Zeichen wird daher, analog mit den Reihen mit wechselnden Zeichen, als ein arithmetisches Mittel aufgefafst werden können; nur dafs bei diesen Reihen mehr als zwei verschiedene Werthe zum Mittel concurriren.

Es würde sich offenbar auf diese Bedeutung der Reihen ein dem Verfahren in (§. 5.) analoges directes Verfahren der Werthbestimmung gründen lassen, welches indefs practisch nicht eben von Werth sein könnte, weil die Vermehrung der durch Interpolation zu bestimmenden Gröfsen die Rechnung erschwert.

Der allgemeine Beweis des Gesetzes (*A.*) und dessen Erstreckung auf alle nach Potenzen einer Variabeln fortschreitende Reihen hat mir bisher nicht gelingen wollen.

§. 13.

Ein Beispiel.

Als Beispiel für den Satz des vorigen Paragraphen wähle ich eine sehr leicht zu behandelnde, aber vielfach besprochene Reihe. Die Entwickelung von $\frac{1+x}{1+x+x^2}$ giebt die Reihe

$$1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+x^9-x^{11}+\cdots.$$

Setzt man $x=1$, so erhält man

$$1-1+1-1+\cdots=\tfrac{2}{3},$$

während die Specialisirung der Reihe

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x},$$

für $x=1$,

$$1-1+1-1+1-\cdots=\tfrac{1}{2}$$

giebt.

Zur Erklärung dieses Resultats hat *Lagrange* darauf aufmerksam gemacht, dafs, wenn man der gegebnen Reihe die in derselben fehlenden Glieder x, x^4, x^7, ... mit den Coëfficienten 0 hinzufüge, die Summe der Reihe

$$1+0-1+1+0-1+\cdots,$$

je nachdem man bei dem $n$ten, $(n+1)$ten oder $(n+2)$ten Gliede abbreche, $=1$, $=1$ oder $=0$ sei, wovon das arithmetische Mittel $\frac{2}{3}$ sei. Man hat aber diese sogenannte Erklärung mit Recht zurückgewiesen, weil daraus nicht ersichtlich sei, welches Recht man zum Nehmen des arithmetischen Mittels habe.

Behandeln wir nun die gegebene Reihe nach der Vorschrift des vorigen Paragraphs, so tritt der wahre Grund der *Lagrange*schen Erklärung ans Licht.

Die Reihe ist $= 1 - x^2[1 + x^3 + x^6 + \cdots]$
$\qquad + x^3[1 + x^3 + x^6 + \cdots]$.

Die Summe der ersten n Glieder der Reihe ist daher, je nachdem n von der Form $3m-1$, $3m$ oder $3m+1$ ist:

$$S_{3m-1} = 1 - x^2[1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3(m-1)}] + x^3[1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3(m-2)}],$$
$$S_{3m} \;\; = 1 - x^2[1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3(m-1)}] + x^3[1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3(m-1)}],$$
$$S_{3m+2} = S_{3m} = 1 - x^2[1 + x^3 + \cdots + x^{3(m-1)}] + x^3[1 + x^3 + \cdots + x^{3(m-1)}].$$

Nimmt man die Summen-Ausdrücke der in Parenthesen eingeschlossenen Reihen und setzt in den drei obigen Summen-Ausdrücken resp. für $3m-1$, $3m$ und $3m+1$ den allgemeinen Werth n, so ergiebt sich, nach Reduction:

$$S_{n_1} = \frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1+x}{1+x+x^2}\cdot x^{n+1},$$
$$S_{n_2} = \frac{1+x}{1+x+x^2} + \frac{x}{1+x+x^2}\cdot x^{n+1},$$
$$S_{n_3} = \frac{1+x}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+x+x^2}\cdot x^{n+1},$$

folglich, wenn S_{n_1}, S_{n_2} und S_{n_3} auf den nemlichen Werth von n bezogen werden:

$$\tfrac{1}{3}(S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3}) = \frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

Der Werth der gegebenen divergenten Reihe ist mithin in allen Fällen $= \frac{1}{3}(S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3})$, und da für $x = 1$: $S_{n_1} = 0$, $S_{n_2} = 1$, $S_{n_3} = 1$ ist, so erhält man durch diese Specialisirung das Resultat von *Lagrange*.

IV.

Begründung der Zuläfslichkeit der Anwendung divergenter Reihen bei analytischen Rechnungen.

§. 14.

Begründung.

Wir haben gesehen, dafs bei einer jeden Gleichung, welche die Identität einer unendlichen Reihe und eines geschlossenen Ausdrucks darstellt, wie

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \cdots,$$

wo die Coefficienten positive oder negative endliche Gröfsen sein können, bei demjenigen Werthe der Variabeln $= x'$, bei welchem die convergente Reihe in eine divergente übergeht, ein Wechsel der Bedeutung der Gleichung eintritt, indem die Identität, welche für das Intervall der Convergenz auf die Summe der Reihe bezogen werden kann, für das Intervall der Divergenz auf das arithmetische Mittel zweier Summenwerthe, resp. auf ein Aggregat arithmetischer Mittel, bezogen werden mufs.

Es ist aber dennoch die divergente Reihe

$$a + bx + cx^2 + \cdots \; (x \gtreqqless x'),$$

wenn sie in der gewöhnlichen Weise als Summe unendlich vieler Glieder aufgefasset wird, ebensowohl der richtige analytische Ausdruck (d. i. die den Gesetzen der analytischen Rechnung entsprechende Form) für die Function $F(x)$ $(x \gtreqqless x')$, als die convergente Reihe

$$a + bx + cx^2 + \cdots \; (x < x')$$

den richtigen analytischen Ausdruck der Function $F(x)$ $(x < x')$ darstellt, und es kann daher bei allen analytischen Rechnungen sowohl die divergente Reihe

$$a + bx + cx^2 + \cdots$$

für den geschlossenen Functions-Ausdruck $F(x)$ $(x \gtreqqless x')$, als die convergente Reihe

$$a + bx + cx^2 + \cdots$$

für die Function $F(x)$ $(x < x')$ substituirt und mit diesen Reihen nach den allgemeinen Gesetzen der Analysis mit völliger Sicherheit gerechnet werden: nur mufs, wenn das Resultat der Rechnung sich in Form einer divergenten Reihe darstellt, diese Reihe als arithmetisches Mittel aufgefasset und der numerische Werth des Resultats nach den vorhin abgehandelten Methoden bestimmt werden.

Es ist in den Paragraphen (6 bis 8 und 11) gezeigt worden, dafs jede divergente Reihe, deren Werth einem geschlossenen Ausdrucke $F(x)$ gleich ist, in eine convergente Reihe transformirt werden kann, welche $F(x)$ zur Summe hat; und zwar durch ein Verfahren, welches den Gesetzen der analytischen Rechnungen entspricht. Nun aber läfst sich beweisen, dafs man, wenn mit einer divergenten Reihe (die Reihe in gewöhnlicher Weise als Summe unendlich vieler Glieder aufgefasset) irgend eine Rechnungs-Operation vorgenommen und hernach das in Form einer divergenten Reihe erscheinende Resultat in eine convergente Reihe transformirt wird, zu dem nemlichen End-resultate gelangen mufs, welches man erhält, wenn man vorerst die divergente Reihe in eine convergente transformirt und sodann an dieser convergenten Reihe dieselbe Rechnungs-Operation vollzieht, welche mit der divergenten Reihe vorgenommen wurde.

Im letzteren Falle aber wird der Gebrauch der divergenten Reihen vermieden und es kann daher über die Richtigkeit des Resultats kein Zweifel obwalten, da das Resultat selbst eine convergente Reihe ist. (Vergl. §. 15.)

Es sei

$$f(x) = \pm\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \delta x^3 - \cdots$$

eine unendliche Reihe mit wechselnden Zeichen, welche für $x \gtreqqless x'$ divergirt, und es werde

$$\Pi(\pm\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \delta x^3 - \cdots),$$

d. h. das Resultat irgend einer mit der Reihe vorzunehmenden Rechnungs-Operation, durch die divergente Reihe

$$\pm A + Bx - Cx^2 + Dx^3 - \cdots$$

dargestellt, so giebt die Anwendung der *Euler*schen Transformationsformel:

$$a = A, \quad b = B, \quad \Delta B = C - B, \quad \Delta^2 B = D - 2C + B, \quad \text{u. s. w.},$$

und man erhält als Endresultat:

$$\Pi(f(x)) = \pm A + B\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta B\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 B\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots$$

Transformirt man dagegen zuvörderst die gegebene divergente Reihe in eine convergente, so erhält man

$$f(x) = \pm\alpha + \beta\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots,$$

wo

$$\Delta\beta = \gamma - \beta, \quad \Delta^2\beta = \delta - 2\gamma + \beta, \quad \text{u. s. w.}$$

Man hat demnach

$$\Pi(f(x)) = \Pi\left(\pm\alpha + \beta\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots\right),$$

oder wenn man für $\Delta\beta$, $\Delta^2\beta$, u. s. w. die entsprechenden Werthe substituirt,

$$\Pi(f(x)) = \Pi\left(\pm\alpha + \beta\left(\frac{x}{1+x}\right) - (\gamma-\beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + (\delta - 2\gamma + \beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots\right).$$

Ist aber, wie oben vorausgesetzt worden,

$$\Pi(\pm\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \cdots) = \pm A + Bx - Cx^2 + Dx^3 - \cdots,$$

so mufs auch

$$\Pi\left(\pm\alpha+\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)-(\gamma-\beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+(\delta-2\gamma+\beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots\right)$$

$$=\pm A+B\left(\frac{x}{1+x}\right)-(C-B)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+(D-2C+B)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots$$

sein, und man gelangt daher auf diesem Wege, wo der Gebrauch divergenter Reihen vermieden ist, zu dem obigen Endresultat

$$\Pi(f(x)) = \pm A+B\left(\frac{x}{1+x}\right)-\Delta B\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\Delta^2 B\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots$$

Ist z. B. $\Pi(f(x))=f'(x)$, d. h. gleich dem Differential-Coëfficienten von $f(x)$, so hat man

$$f'(x) = \beta-2\gamma x+3\delta x^2-4\varepsilon x^3+\cdots$$

und diese Gleichung kann auf die Form

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}[0+0x-\beta x^2+2\gamma x^3-3\delta x^4+4\varepsilon x^5-\cdots]$$

gebracht werden. Transformirt man die in Klammern eingeschlossene Reihe nach der *Euler*schen Formel, so ergiebt sich

$$a=0,\quad b=0,\quad \Delta b=\beta-0=\beta,\quad \Delta^2 b=2(\gamma-\beta),$$
$$\Delta^3 b=3(\delta-2\gamma+\beta),\quad \text{u. s. w.},$$

mithin ist, nach Einführung der Differenzen der gegebenen Reihe $\Delta=\beta$, $\Delta^2 b=2\Delta\beta$, $\Delta^3 b=3\Delta^2\beta$, u. s. w., das Endresultat:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-2\Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+3\Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^4-\cdots\right].$$

Transformirt man andererseits die gegebene Reihe in die convergente Reihe

$$f(x) = \pm\alpha+\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)-\Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots,$$

so giebt die Differentiirung dieser Reihe, indem allgemein

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \frac{n}{x^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$$

ist, unmittelbar das nemliche Endresultat

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-2\Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\right].$$

Wäre die gegebene divergente Reihe eine Reihe mit bleibenden Zeichen, so würde durch Anwendung der zweiten *Euler*schen Transformationsformel der Beweis in der nemlichen Weise geführt werden können. Da aber alle Reihen, die nach Potenzen einer Variabeln fortschreiten, als ein Aggregat mehrerer

Reihen mit wechselnden Zeichen, oder mehrerer Reihen mit bleibenden Zeichen sich darstellen lassen (Vergl. §. 11.), so läfst sich der Beweis auf alle solche Reihen erstrecken.

Es kann mithin der Gebrauch divergenter Reihen bei analytischen Rechnungen überall nicht zu fehlerhaften Resultaten Anlafs geben, und die Ursachen eines etwanigen sinnlosen Resultats sind in der Anwendung einer fehlerhaften Rechnung zu suchen.

§. 15.

Anderweite Begründung.

Wenn gleich dieser Satz nach meiner Überzeugung durch die Ausführung im vorigen Paragraphen vollständig bewiesen ist, so dürfte es doch, bei der Wichtigkeit der Sache und bei der Stärke des Vorurtheils gegen die Wahrheit des Satzes, nicht überflüssig sein, noch einen Beweis nachfolgen zu lassen, der sich mehr an die herrschende Ansicht anschliefst.

Es ist in neuerer Zeit vielfach in Frage gestellt worden, ob man ohne besondern Beweis berechtigt sei, die convergenten unendlichen Reihen den gewöhnlichen analytischen Rechnungs-Arten zu unterwerfen: z. B. eine unendliche Reihe zu differentiiren, sie in eine Potenz erheben, den Sinus davon zu nehmen, u. s. w. Die Berechtigung wird geleugnet, wenn das Resultat der Rechnung eine divergente Reihe ist; ist dagegen das Resultat der Rechnung eine convergente Reihe, so wird auch nach der jetzt herrschenden Ansicht die Gültigkeit der Rechnung nicht bezweifelt werden.

Bezeichnet nun

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

irgend eine unendliche Reihe, in welcher die Coëfficienten positive und negative endliche Gröfsen sein können, und ist die Reihe für die Werthe $x \gtreqless x'$ divergent, so ist zu beweisen, dafs auch für das Intervall der Divergenz

$$\Pi(f(x)) = \Pi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots)$$

ist, wo Π irgend eine analytische Rechnungs-Operation bedeutet, die an der Reihe in der gewöhnlichen Art vorgenommen wird, wie wenn die Reihe die Summe unendlich vieler Glieder wäre.

Wie auch die gegebene Reihe beschaffen sein möge, so kann doch immer der Werth von x so klein angenommen werden, dafs die gegebene Reihe und die das Resultat der Rechnung darstellende Reihe convergent werden; dann führt der Voraussetzung nach die Ausführung der Operation $\Pi[a + bx + cx^2 + \cdots]$

an der convergenten Reihe nach den gewöhnlichen Gesetzen analytischer Rechnungen zu einem gültigen Resultat. Es sei dies Resultat die convergente Reihe

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots;$$

alsdann ist

$$\Pi(f(x)) = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots$$

eine gültige Gleichung.

Nun aber folgt aus dem Satze (IV. §. 3. und §. 11.): dafs wenn $\Pi(f(x))$ die Grenze der Summe der Reihe $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots$ für das Intervall ist, innerhalb dessen die Reihe convergirt, dieselbe Function $\Pi(f(x))$ auch der Werth der Reihe für das Intervall der Divergenz sein mufs, wenn man die Reihe als arithmetisches Mittel, resp. als ein Aggregat arithmetischer Mittel auffasset; mithin gilt auch für das Intervall der Divergenz die Gleichung

$$\Pi(f(x)) = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots = \Pi(a+bx+cx^2+\cdots).$$

Was von einer einfachen Operation Π gilt, mufs aber auch von einer Verbindung mehrerer Operationen gelten: es kann daher auch bei einer complicirten analytischen Rechnung durch die Anwendung divergenter Reihen ein fehlerhaftes Resultat nicht herbeigeführt werden. Die älteren Mathematiker hatten daher vollkommen Recht, wenn sie die unendlichen allgemeinen Reihen, ohne zu beachten, ob sie convergent oder divergent sind, bei ihren Rechnungen gebrauchten; mögen sie sich nun den Grund der Berechtigung deutlich zum Bewufstsein gebracht haben, oder nicht.

§. 16.

Analogie mit imaginären Ausdrücken.

Dafs eine divergente Reihe

$$a+bx+cx^2+\cdots$$

(in der gewöhnlichen Weise als Summe unendlich vieler Glieder aufgefasset) der richtige analytische Ausdruck einer Function $f(x)$ sein könne, obwohl der Werth von $f(x)$ sich nicht durch Summirung der Reihe finden läfst, kann für einen Mathematiker nichts Auffallendes haben, weil ganz analoge Fälle bei den imaginären Formen vorkommen. So ist

$$\tfrac{1}{2}[e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}]$$

der richtige analytische Ausdruck für die reelle Function $\cos x$ und kann in allen analytischen Rechnungen für $\cos x$ substituirt werden, ohne dafs dadurch fehlerhafte Resultate herbeigeführt würden; dennoch ist dieser Ausdruck in seiner gegenwärtigen Form (nemlich als Summe zweier Exponentialfunctionen mit imaginären Exponenten) nicht zu irgend einer Werthberechnung geeignet. Will man den Werth des Ausdrucks wissen, so ist es nothwendig, denselben in eine andere zur Werthberechnung geeignete Form zu transformiren; und wenn dies den Gesetzen analytischer Rechnungen gemäfs ausgeführt wird, so giebt der numerische Werth des Resultats den numerischen Werth des gegebenen Ausdrucks. So giebt die Transformirung in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$\tfrac{1}{2}[e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}] = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots = \cos x.$$

Die divergenten unendlichen Reihen sind in einem ganz analogen Falle, wie der Ausdruck $\frac{1}{2}[e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}]$; sie sind in ihrer eigenthümlichen Form zu einer dieser Form entsprechenden Werthberechnung nicht geeignet; transformirt man aber eine divergente Reihe, den Gesetzen analytischer Rechnungen gemäfs, in eine andere zur Werthberechnung geeignete Form, so giebt der numerische Werth des Resultats den numerischen Werth der divergenten Reihe.

Nur in einer Beziehung findet zwischen dem imaginären Ausdrucke und der divergenten Reihe eine Verschiedenheit Statt. Der numerische Werth des imaginären Ausdrucks kann *nur* durch Transformation gefunden werden, weil die imaginäre Form überall keine reelle Bedeutung hat. Der numerische Werth der divergenten Reihe dagegen kann nicht blofs durch Transformation, sondern auch durch ein directes Verfahren gefunden werden, weil die divergenten Reihen eine eigenthümliche, ihrer äufsern Form nicht entsprechende Bedeutung haben, d. h. weil die divergenten Reihen als arithmetisches Mittel aufgefasset werden können. Wäre diese Bedeutung der divergenten Reihen nicht ermittelt, so fiele die angedeutete Verschiedenheit zwischen den imaginären Ausdrücken und den divergenten Reihen ganz weg, und beide wären in ganz gleichem Falle.

Diesen Gesichtspunct hätten die Vertheidiger der divergenten Reihen bei ihren Argumenten festhalten sollen; sie hätten die divergenten Reihen als eine Art imaginärer Form des entsprechenden geschlossenen Ausdrucks betrachten müssen, welche durch eine den Gesetzen analytischer Rechnung gemäfse Transformation auf eine zur Werthberechnung geeignete Form desselben geschlossenen Ausdrucks reducirt werden kann: denn die ungegründete Behauptung der neuern Mathematiker (Vergl. Einleitung), dafs eine Transformation divergenter Reihen in identische und convergente geradezu unmöglich sei, wäre auch ohne Kenntnifs der Bedeutung der divergenten Reihen leicht zu widerlegen gewesen. Es würde sich dann wohl haben durchführen lassen, dafs es inconsequent sei, die divergenten Reihen aus der Analysis zu verbannen, während man die imaginären Ausdrücke zuläfst.

§. 17.

Angebliche fehlerhafte Resultate, die durch divergente Reihen veranlafst sein sollen.

Es ist sehr auffallend, dafs man sich dazu entschlossen hat, die divergenten Reihen aus der Analysis zu verstofsen, ohne dafs Fälle nachgewiesen worden sind, in welchen die Anwendung divergenter Reihen zu fehlerhaften Resultaten Veranlassung gegeben hat. Zwar sagt *Abel* in seiner Untersuchung über die Reihe $1+\frac{m}{2}x+\cdots$ (*Crelle's* Journal 1ter Bd. S. 311 seq.): „Die divergenten Reihen können zuweilen mit Nutzen als Symbole dienen, diese oder jene Sätze kürzer auszudrücken; aber man darf sie nie an die Stelle bestimmter Gröfsen setzen. Thut man es, so kann man beweisen was man will: Unmögliches sowohl als Mögliches." Und dieser Ausspruch ist oftmals wiederholt worden: aber ein ***Beweis*** der Behauptung findet sich nirgends. Sollte *Abel,* wie vielleicht aus seinem Briefe vom Jahre 1839 geschlossen werden könnte (S. Dr. *M. Ohm,* Geist der mathem. Analysis,) bei seinem Ausspruche blofs willkürliche numerische divergente Reihen vor Augen gehabt haben, so wäre derselbe allerdings vollkommen richtig, träfe aber alsdann gar nicht die Sache.

Eine numerische Reihe kann natürlich der specialisirte Ausdruck unendlich vieler verschiedener Functionen sein. Ist nun die Reihe convergent, so hat ihre Summe immer eine bestimmte Gröfse, möge sie der specialisirte Ausdruck der einen oder der andern Function sein, eben weil die convergente Reihe als Grenze der Summe ihrer Glieder aufgefasset werden kann. Der Werth einer divergenten Reihe, die keine Summe hat, sondern als arithmetisches Mittel aufgefasset werden mufs, ist eben deshalb von dem Ausdrucke der Function abhängig, durch deren Specialisirung man sie entstanden sich vorstellt. Eine numerische divergente Reihe, von der man nicht weifs, welcher Function sie ihre Entstehung verdankt, hat daher keinen bestimmten Werth, und darf nie an die Stelle einer bestimmten Gröfse gesetzt werden. Aber wie kann überall von einer Rechnung mit solchen willkürlichen numerischen Reihen die Rede sein? In der Analysis entstehen die unendlichen Reihen durch die Entwickelung gebrochener, irrationaler und transcendenter geschlossener Ausdrücke und erscheinen demnach als Ausdruck bestimmter Functionen; und wenn man sie auch häufig durch Annahme eines speciellen Werths der Variabeln in numerische Reihen verwandelt, so kann doch über deren Ursprung nie ein Zweifel sein. Zwar kann man bei analytischen Rechnungen, wenn man für jedes einzelne Glied einer unendlichen allgemeinen Reihe eine demselben gleichgeltende allgemeine Reihe substituirt und das Resultat nach den Potenzen der Variabeln ordnet, auf unendliche Zahlenreihen geführt werden, die daher selbstständig und nicht als specielle Werthe allgemeiner Reihen zu entstehen scheinen. Allein betrachtet man den Fall genauer, so liegt in der vorgenommenen analytischen Operation selbst die Nothwendigkeit, diese Reihen beziehungsweise als specialisirte Ausdrücke bestimmter allgemeiner Reihen zu behandeln. Und sollte in einzelnen Fällen ein Zweifel darüber entstehen können, welcher allgemeinen Reihe eine solche Zahlenreihe unterzuordnen sei, so wird dieser Zweifel immer dadurch beseitigt werden können, dafs man alle Glieder der gegebenen allgemeinen Reihe, der Reihe nach, mit steigenden Potenzen einer neuen Variabeln multiplicirt, alsdann die Substitution der allgemeinen unendlichen Reihen vollziehet und schliefslich die neue Variable $= 1$ setzt: denn man erhält alsdann nicht Zahlenreihen, sondern allgemeine Reihen, die nach Potenzen der neuen Variabeln geordnet sind, welche erst schliefslich durch den Werth 1 der neuen Variablen zu specialisiren sind. Die in der Analysis vorkommenden unendlichen numerischen Reihen erscheinen daher immer als Ausdrücke bestimmter Functionen und haben demnach immer einen bestimmten Werth.

Für solche Reihen also müfste die Wahrheit des *Abel*schen Ausspruchs bewiesen werden, wenn der Beweis den Gegenstand treffen sollte.

So viel mir bekannt, ist Professor *Schlömilch* der Einzige, der durch Beispiele nachzuweisen versucht hat, dafs die Anwendung divergenter Reihen zu sinnlosen Resultaten führen könne. Wenn gleich diese Beispiele meist Reihen betreffen, die nach dem Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, welche nicht Gegenstand dieser Abhandlung sind, so glaube ich doch auf dieselbe eingehen zu müssen, indem ich auf die in (§. 18.) enthaltenen Resultate Bezug nehme.

Die im *Grunert*schen Archiv (Theil V. Heft 4. S. 393) angeführte Gleichung

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \cdots = \tfrac{1}{2}$$

ist vollkommen richtig, wenn die Reihe als arithmetisches Mittel aufgefasset wird; und dies wird nach (§. 18.) eben dadurch bestätigt, dafs die Reihe für den Werth $x = \frac{1}{3}\pi$ sich in die Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \cdots$$

verwandelt, welche drei verschiedene Summenwerthe hat: $\frac{1}{2}$, 1 und 0; indem das arithmetische Mittel dieser Summenwerthe $= \frac{1}{2}$ ist. Eben so sind die von ***Euler*** aus der Reihe gezogenen Folgerungen

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0 \text{ und}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots = 0$$

vollkommen richtig, wenn diese Reihen als specialisirte Ausdrücke der Reihen

$$v - 2^2.v^2 + 3^2.v^3 - 4^2.v^4 + \cdots \text{ und}$$

$$v - 2^4.v^2 + 3^4.v^3 - 4^4.v^4 + \cdots$$

betrachtet werden; wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man den Werth dieser divergenten Reihen für $v = 1$ nimmt.

Was die übrigen in dem genannten Hefte (S. 394 bis 398) unter (n. 1 bis 3.) aufgeführten Beispiele und das im *Grunert*schen Archiv (Theil III. Heft 3. S. 275) angezogene Beispiel betrifft, so ist der Professor *Schlömilch* allerdings zu sinnlosen Resultaten gelangt: aber durch ein Verfahren, welches jedenfalls zu fehlerhaften Resultaten führen *mufste*. Er substituirt nemlich für jedes einzelne Glied einer unendlichen eine demselben gleichgeltende unendliche Reihe und ordnet das Resultat nach Potenzen der Variabeln; und zwar in allen den genannten Beispielen so, dafs die sämmtlichen Coëfficienten unendlich werden. Anstatt nun inne zu halten, indem eine nach Potenzen einer Variabeln geordnete Reihe, deren Coëfficienten unendlich sind, keine Bedeutung hat, setzt Professor *Schlömilch* die Rechnung fort und vergleicht nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten den geschlossenen Ausdruck, welchem die gegebene unendliche Reihe gleich gesetzt war; oder eine aus demselben entwickelte Reihe mit endlichen Coëfficienten, mit der ersten Reihe, deren Coëfficienten unendlich sind. Der Grund der fehlerhaften Resultate liegt folglich in dem Rechnungsverfahren, und es sind die fehlerhaften Resultate nicht durch die divergenten Reihen veranlafst, von welchen ausgegangen wurde.

V.

Allgemeinere Geltung der Bedeutung eines arithmetischen Mittels, und anderweite Auffassung der divergenten Reihen.

§. 18.

Allgemeinere Geltung der Bedeutung eines arithmetischen Mittels.

Wenn gleich nur diejenigen divergenten unendlichen Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln geordnet sind, Gegenstände dieser Abhandlung ausmachen, so glaube ich doch, hier zeigen zu müssen, dafs die für obige Reihen nachgewiesene Bedeutung eines arithmetischen Mittels auch bei andern unendlichen divergenten Reihen Statt findet.

Schon *Lexell* hat bemerkt, dafs man den Werth der unendlichen Reihen

$$\sin m + \sin(m+x) + \sin(m+2x) + \sin(m+3x) + \cdots,$$
$$\cos m + \cos(m+x) + \cos(m+2x) + \cos(m+3x) + \cdots$$

erhält, wenn man das arithmetische Mittel nimmt zwischen allen den verschiedenen Summen-Werthen, welche sich durch successives Addiren der Glieder der Reihen finden lassen. (Vergl. „*Lacroix*, Traité des différences et des séries. n. 950. 951.")

Es ist nemlich die endliche Summe von $u+1$ Gliedern der ersteren Reihe bekanntlich

$$S\sin(m+ux) = -\frac{\cos(m+(u+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x} + \frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x)},$$

und die der letzteren Reihe

$$S\cos(m+ux) = \frac{\sin(m+(u+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{\sin(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Die erste Reihe ist aber periodisch, und die verschiedenen partiellen Summen werden $=0$ am Ende jeder Periode, indem der obige Summen-Ausdruck für alle Werthe von u verschwindet, welche durch die Gleichung

$$m+(u+\tfrac{1}{2}x) = 2k\pi + m - \tfrac{1}{2}x \quad \text{oder} \quad (u+1)x = 2k\pi$$

gegeben sind, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet; und stehen x und π in einem rationalen Verhältnisse, so hat die Reihe, wenn $u=\infty$ ist, unendlich viele Perioden, aber nur eine bestimmte Zahl immer wiederkehrender Summen-Werthe. Setzt man in dem allgemeinen Summen-Ausdrucke successive $u=0$, $u=1$, $u=2$, ... $u=n$, so erhält man die $n+1$ verschiedenen Werthe von $S\sin(m+ux)$, nemlich:

$$-\frac{\cos(m+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$-\frac{\cos(m+\frac{3}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$-\frac{\cos(m+\frac{5}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\cos(m+\frac{1}{2}(2n+1)x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

und das arithmetische Mittel dieser Werthe ist

$$\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{(n+1)2\sin\frac{1}{2}x}[\cos(m+\tfrac{1}{2}x)+\cos(m+\tfrac{3}{2}x)+\cos(m+\tfrac{5}{2}x)+\cdots$$
$$\cdots+\cos(m+\tfrac{1}{2}(2n+1)x)].$$

Der allgemeine Summen-Ausdruck $S\cos(m+ux)$ giebt die Summe der in Klammern stehenden Reihe, wenn n statt u und $(m+\frac{1}{2}x)$ statt m gesetzt wird. Es ist daher diese Summe

$$=\frac{\sin(m+(n+1)x)}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{\sin m}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\cos(m+(\frac{1}{2}n+1)x)\sin(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin\frac{1}{2}x}=0,$$

weil nach der Voraussetzung $(n+1)x=2k\pi$ ist. Das arithmetische Mittel der verschiedenen Summenwerthe ist demnach $=\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}$: dies ist aber auch der analytische Ausdruck für die unendliche Reihe

$$\sin m+\sin(m+x)+\sin(m+2x)+\cdots,$$

wovon man sich durch Multiplication der Reihe mit dem Nenner leicht überzeugen kann.

Auf gleiche Weise findet man, dafs der analytische Ausdruck für die unendliche Reihe

$$\cos m+\cos(m+x)+\cos(m+2x)+\cdots=-\frac{\sin(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

das arithmetische Mittel der verschiedenen Summenwerthe ist.

Da nun bei den hier betrachteten Reihen, gleich wie bei den Reihen

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x},$$

$$1-x^2+x^3-x^5+x^6-\cdots=\frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

für den Werth 1 von x dieselben Summenwerthe sich fortwährend wiederholen, so dafs, bei dem Wegfall der Interpolation, die Operation des arithmetischen

Mittels sich auf das Nehmen des Mittels der verschiedenen Summenwerthe reducirt, so ergiebt sich, dafs die Bedeutung eines arithmetischen Mittels für die Reihen

$$\sin m + \sin(m+x) + \sin(m+2x) + \cdots,$$
$$\cos m + \cos(m+x) + \cos(m+2x) + \cdots$$

in ganz gleicher Weise Geltung findet, wie bei den nach Potenzen einer Variabeln geordneten Reihen.

Setzt man $m=0$, so erhält man Reihen, die nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten; für welche demnach die nemliche Bedeutung Statt findet.

Die obigen Formeln geben z. B. für $m=0$:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = \tfrac{1}{2},$$

oder

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = -\tfrac{1}{2}.$$

Setzt man $x = \frac{1}{3}\pi$, so wird die Reihe

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} \text{ etc.}$$

Die 6 verschiedenen Summenwerthe sind

$$\tfrac{1}{2},\ 0,\ -1,\ -1\tfrac{1}{2},\ -1,\ 0,$$

und deren arithmetisches Mittel ist

$$\tfrac{1}{6}[\tfrac{1}{2} + 0 - 1 - 1\tfrac{1}{2} - 1 + 0] = -\tfrac{1}{2}.$$

§. 19.

Anderweite Auffassung der divergenten Reihen.

Man kann die divergenten unendlichen Reihen noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten. Ist

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

eine Gleichung zwischen dem geschlossenen Ausdruck $f(x)$ und einer Reihe mit wechselnden Zeichen, oder einer Reihe mit bleibenden Zeichen, und ist x' der Werth von x, bei welchem die convergente Reihe in eine divergente übergeht, so ist die unendliche Reihe, in der gewöhnlichen Weise als Summe unendlich vieler Glieder betrachtet, so lange $x < x'$, eine continuirliche Function, welche für jeden Werth von x *einen* bestimmten Summenwerth hat. So wie aber x den Werth von x' erreicht und übersteigt, tritt eine Discontinuität ein, und die unendliche Reihe hat fortan für jeden Werth von $x > x'$

zwei Summenwerthe, gleich $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem die unendlich grofse Zahl der Glieder als gerade oder als ungerade angenommen wird.

Nach den Paragraphen (3 und 4.) gilt nun für jeden Werth von n die Gleichung $\frac{1}{2}(S_{n_1}+S_{n_2})=f(x)$; sie gilt mithin auch für $n=\infty$; alsdann sind zwar, wenn $x>x'$, $S_{n_1}=+\infty$, $S_{n_2}=-\infty$, immer aber ist $\frac{1}{2}(S_{n_1}+S_{n_2})=f(x)$. Ist $n=\infty$, so sind offenbar S_{n_1} und S_{n_2} die zwei verschiedenen Summenwerthe der unendlichen divergenten Reihe, welche einem Werthe von $x \gtreqless x'$ correspondiren. Man kann daher die Bedeutung der divergenten Reihen auch wie folgt darstellen.

So lange die unendliche Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

eine continuirliche Function bleibt, gilt die Gleichung

$$f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

für alle Werthe von x; tritt aber eine Discontinuität dieser Function ein, so ist der Ausdruck $f(x)$ gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Summenwerthen, welche der unendlichen Reihe für irgend einen Werth von x zukommen.

Dieses Gesetz ist dem Inhalte nach identisch mit den bekannten *Fourier*schen Theoremen für die Reihen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots,$$
$$F(x) = B_1\sin x+B_2\sin 2x+B_3\sin 3x+\cdots,$$

wo

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt,$$
$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(t)\sin nt\,dt;$$

nur dafs letztere beschränkter sind und die Discontinuität auf Seiten des geschlossenen Ausdrucks eintritt.

Ich enthalte mich für jetzt weiterer Reflexionen über dies Gesetz, welches eine Erweiterung bekommen wird, wenn die Bedeutung eines arithmetischen Mittels *mehrerer* Summenwerthe für alle divergenten Reihen allgemein bewiesen sein wird. Sollte mir die Mufse vergönnt werden, so beabsichtige ich die Ausführung dieses Beweises und die Erstreckung der Theorie auf alle unendliche divergente Formen zu versuchen, und da wäre dann der Ort, das obige Gesetz einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

In dieser Abhandlung ist bewiesen worden: dafs die divergenten unendlichen Reihen die Bedeutung eines arithmetischen Mittels, resp. eines Aggregats arithmetischer Mittel haben: dafs man im Stande ist, ihren Werth zu bestimmen, und dafs ihre Anwendung bei analytischen Rechnungen zu fehlerhaften Resultaten nicht Veranlassung geben kann.

Es folgt daraus, dafs die gegenwärtig herrschende Ansicht unbegründet ist und dafs sie beseitigt werden mufs, damit die Wissenschaft von einer unnöthigen, fast in alle Gebiete der höheren Analysis eingreifenden Beschränkung befreit werde.

Möge die Macht der Wahrheit meinem Worte Eingang verschaffen und die Mängel meiner Darstellung ersetzen!

Das alte Räthsel der Bedeutung divergenter Reihen ist offenbar gelöset. Zur vollständigen Begründung des in (§. 19.) für Reihen mit wechselnden Zeichen und für Reihen mit bleibenden Zeichen nachgewiesenen Gesetzes bedarf es indefs noch eines allgemeinen Beweises, der die Bedeutung eines arithmetischen Mittels *mehrerer* Summenwerthe auf alle divergenten Reihen erstreckt. Ich übergebe den Gegenstand der Öffentlichkeit, in dem Stadio, worin er sich befindet, damit durch gemeinsames Streben das Ziel desto eher erreicht werden möge.

Ratzeburg, den 6ten Juni 1850.