SUI SISTEMI LINEARI

DI

CURVE PIANE ALGEBRICHE DI GENERE p.

Di Corrado Segre

Estratto di lettera al dott. G. B. Guccia

(Seduta del 24 aprile 1887)

Nella Sua importante Nota intitolata « *Generalizzazione di un teorema di Nöther* » Ella si è occupata di una ricerca che può pure svolgersi seguendo un'altra via, per la quale si giunge inoltre a nuovi risultati.

Anzitutto il Suo Teorema X si può modificare ponendolo sotto la forma seguente, più completa ed applicabile più largamente.

TEOREMA I. — *Un sistema lineare k volte infinito di curve piane di genere p, determinato dai punti base, ma del resto assolutamente qualunque, abbia D punti d'intersezione variabili. Se $D > 2p - 2$, sarà*

$$k = D - p + 1,$$

vale a dire le condizioni imposte al sistema da tutto l'insieme dei suoi punti base, qualunque siano i vincoli da cui questi possono essere legati, sono tante quante sarebbero quelle imposte dai singoli punti base, quando ciascuno di essi si prendesse isolatamente.

La dimostrazione di questa proposizione è semplicissima. Considerando una determinata curva f del sistema, la quale non abbia punti singolari fuori dei punti base, è chiaro che le altre formano una ∞^k

di sue *curve aggiunte* (di specie particolare in quanto che hanno in ogni punto r-plo di f un punto multiplo non solo secondo $r-1$ ma secondo r) e determinano su f una serie lineare $k-1$ volte infinita di gruppi di D punti. Nell'ipotesi fatta $D > 2p-2$, questa serie non potrà essere speciale *(Special-Schaar)* e quindi sarà (vedi Brill e Nöther, *Math. Annalen*, VII, p. 278): $k-1 = D-p$, che è appunto lo asserto. (*)

Questo ragionamento si estende al caso estremo di $p = 0$. Per questo e pel caso $p = 1$, essendo sempre soddisfatta la condizione $D > 2p-2$, si ottengono i due corollari seguenti.

Qualunque sistema lineare di curve razionali determinato dai punti base e tale che due sue curve s'incontrano in D punti variabili, è $D+1$ volte infinito.

Qualunque sistema lineare di curve ellittiche determinato dai punti base e avente $D > 0$ intersezioni variabili è D volte infinito.

Osservando poi che, se una superficie (a due dimensioni) *appartenente* ad uno spazio qualunque è rappresentabile sul piano mediante un sistema lineare di curve contenuto in un altro il quale rappresenti un'altra superficie (appartenente ad uno spazio superiore), la prima superficie sarà projezione della seconda, il Teorema I darà subito che:

Ogni superficie a sezioni lineari di genere p, il cui ordine D superi $2p-2$ e che sia rappresentabile sul piano appartiene ad uno spazio di $D-p+1$ dimensioni, oppure è projezione di una superficie d'ordine D appartenente ad un tale spazio (**).

(*) Ragionando nello stesso modo si prova che: se $D = 2p-2$, sarà $k = D-p+2$, oppure $k = D-p+1$ (secondo che la serie di gruppi di punti considerata è speciale o no).

(**) Questa proposizione mi pare debba riuscire molto utile nello studio delle superficie. Da essa, mediante il successivo Teorema II e procedendo inversamente si potrebbe dedurre (ma con minor generalità) il Teorema I. Si può infatti dimostrarla direttamente e completarla nel seguente modo (che comunicai a Del Pezzo sul principio di quest'anno). Una superficie d'ordine D a sezioni lineari del genere p sia rappresentata univocamente sul piano, mediante le curve di genere p di un sistema lineare con punti fondamentali ordinari e con D intersezioni variabili. Il sistema lineare di curve dello stesso ordine e genere, definito da quei punti fondamentali come sole condizioni, sia infinito k volte; e suppongasi inoltre che queste

Per non dilungarmi troppo tralascio di fare altre applicazioni di quel teorema e passo invece ad un altro, che pure può essere di molta utilità nello studio dei sistemi di curve, sia da sè, sia collegato al I°

TEOREMA II. — *Qualunque sistema lineare $k > 2$ volte infinito di curve d' ordine n e genere p con D intersezioni variabili costituisce sempre, se $D > 2p$, la rappresentazione piana univoca di una superficie di ordine D di uno spazio a k dimensioni S_k.*

È chiaro in fatti che stabilendo una corrispondenza lineare tra le curve del sistema e gli S_{k-1} di S_k, alle curve passanti per un punto qualunque del piano corrisponderanno gli S_{k-1} passanti per un determinato punto di S_k, e che il luogo di questo al variare del primo punto nel piano sarà appunto una superficie d'ordine D in corrispondenza univoca col piano, *purchè* non accada che tutte le curve del sistema passanti per un punto arbitrario del piano passino in conseguenza per un certo numero x di altri punti determinati da quello e variabili con esso, poichè *allora* ad ogni punto della superficie ottenuta corrisponderebbero $x + 1$ punti del piano. Ora supposto che appunto quel fatto accada e considerando ancora la curva f del sistema e la serie $k - 1$ volte infinita, non speciale se $D > 2p - 2$, di gruppi di D punti determinata su essa dalle altre curve del sistema, il teorema, già adoperato prima, di Brill e Nöther dice in sostanza che $D - p$ punti di

---

condizioni siano $x\,(\geqq 0)$ di meno di quante sarebbero imposte dai singoli punti fondamentali presi isolatamente. Dalle tre equazioni che esprimeranno k, p, e D in funzione dell'ordine delle curve del sistema e delle moltiplicità dei punti base si trarrà subito la seguente: $k = D - p + 1 + x$.

Ora questa, ricordando la definizione di k, prova che la superficie considerata è projezione di una superficie d'ordine D a sezioni lineari del genere p appartenente ad uno spazio di $D - p + 1 + x$ dimensioni. Se $D > 2p - 2$, la sezione di quest'ultima superficie appartenente ad un S_{D-p+x}, essendo di genere p ed ordine D, dovrà stare in un S_{D-p}, e quindi sarà $x = 0$. — Come Ella vede, non solo si ritrova la proposizione di cui si tratta, ma si può levando la restrizione $D > 2p - 2$ enunciare quest'altra: *Ogni superficie d'ordine D a sezioni lineari di genere p la quale stia in uno spazio inferiore ad S_{D-p+1} e sia rappresentabile sul piano è sempre projezione di una superficie dello stesso ordine appartenente a questo spazio.*

un gruppo di quella serie si possono prendere ad arbitrio e che da essi rimangono determinati i rimanenti p.

Ma per l' ipotesi fatta, ciascuno di quei $D-p$ punti ne determina altri x: dunque sarà

$$x(D-p) \leqq p,$$

e quindi a fortiori

$$D-p \leqq p,$$

cioè $D \leqq 2p$. Per conseguenza se $D > 2p$ quell'ipotesi è impossibile e la rappresentazione della superficie è univoca, (*) come volevo dimostrare.

Questo teorema permette di trasportare ai sistemi lineari di curve con $D > 2p$ tutte le proposizioni relative alle superficie rappresentabili, e particolarmente quelle molto importanti ottenute recentemente da Del Pezzo.

Così siccome ogni sistema lineare ∞^{D+1} di curve razionali con D intersezioni variabili rappresenta una superficie d'ordine D appartenente allo spazio di $D+1$ dimensioni e Del Pezzo ha provato che una tal superficie per $D > 4$ è rigata e per $D \leqq 4$ è rappresentabile nel piano mediante un sistema di coniche, osservando inoltre che due rappresentazioni piane univoche di una stessa superficie sono sempre trasformazioni Cremoniane l'una dell'altra, risulta dalla rappresentazione minima ben nota delle rigate razionali che ogni sistema lineare di curve razionali si potrà mediante una trasformazione Cremoniana ridurre a certi tipi che sono appunto quelli del Teorema V della Sua Nota.

Abbiasi poi nel piano un sistema lineare qualunque di curve del genere $p > 0$. Al n.° 3 della Nota: « *Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazi a più dimensioni* » (Rendiconti della R. Accademia di Napoli di febbrajo scorso) Del Pezzo assegna il valor massimo dell'ordine di una superficie rappresentabile le cui sezioni lineari siano del genere p. Quel numero sarà

(*) Se $D = 2p$ si ottiene $x = 1$ e ne segue che un sistema per cui $D = 2p$ che non sia rappresentativo di una superficie deve comporsi di curve iperellittiche, sì che le loro intersezioni variabili siano p coppie di punti *coniugati* su esse.

dunque il *massimo del numero D delle intersezioni variabili delle curve del sistema considerato*, e mediante il Teorema I se ne trae che *l'ordine d' infinità di un sistema lineare di curve del genere $p > 0$ non può superare un determinato limite* (il quale sarebbe appunto il numero $p + a + 2$ di Del Pezzo).

Se si trovano le rappresentazioni piane di tutte le superficie a sezioni lineari del genere p, esse daranno mediante trasformazioni Cremoniane del piano tutti i sistemi lineari di curve del genere p. (*) Si ha così un metodo molto importante per stabilire certi tipi da cui tutti questi sistemi si deducono con trasformazioni razionali, ottenendo così pei sistemi di genere $p > 0$ quella generalizzazione di un teorema di Nöther che per $p = 0$ costituiva l'oggetto della Sua Nota. (**)

Applicando questo metodo al caso di $p = 1$, si ottiene la proposizione seguente: *tutti i sistemi lineari di curve ellittiche si possono ridurre mediante trasformazioni Cremoniane a sistemi di cubiche piane, oppure di quartiche con due punti doppi.* In fatti in una lettera del 10 gennajo Del Pezzo mi comunicava che le sole superficie d'ordine D dello spazio a D dimensioni le quali non siano rigate sono: una certa $D = 8$ che è rappresentata sul piano dal sistema delle quartiche con due dati punti doppi, un'altra $D = 9$ rappresentata dalle cubiche del piano, ed infine le projezioni di quest'ultima negli spazi inferiori. Ed è appunto da ciò che mediante le considerazioni precedenti io ottenevo subito fin d' allora quella proposizione notevole sui sistemi di curve ellittiche.

E similmente lo stesso metodo applicato a $p = 2$ dà che: *tutti i sistemi lineari di curve del genere 2 si possono ridurre mediante trasformazioni Cremoniane a sistemi di quartiche con un punto doppio, o di quintiche con un punto doppio ed uno triplo, o di sestiche con otto punti doppi.*

Torino, 9 aprile 1887.

CORRADO SEGRE.

(*) Eccettuati solo quelli che non costituissero rappresentazioni univoche di superficie, nè fossero contenuti in altri sistemi del genere p rappresentativi di superficie. Di questa restrizione va tenuto conto anche in ciò che dirò poi.

(**) È però chiaro che anche il metodo da Lei usato per $p = 0$ si può estendere a valori superiori di p.