SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE
CHE AMMETTONO
UN GRUPPO CONTINUO DI TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI IN SÈ STESSE.

Nota di **Federigo Enriques**, in Bologna.

Adunanza del 14 maggio 1905.

La profonda analisi delle superficie che posseggono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse, iniziata dal sig. PICARD e completata (particolarmente nel caso ellittico) dal sig. PAINLEVÉ, ha condotto a determinare tre famiglie di superficie:

1) superficie con un gruppo ∞^1 razionale, riferibili a rigate;

2) superficie (ellittiche) con un gruppo ∞^1 ellittico, le quali vengono caratterizzate dall'esistenza di due fasci di curve di ugual modulo: un fascio, razionale o irrazionale, di curve ellittiche (traiettorie del gruppo), ed un fascio ellittico di curve di genere comunque elevato;

3) superficie (iperellittiche) con un gruppo permutabile ∞^2, rappresentabili mediante funzioni uniformi quattro volte periodiche di due parametri e riferibili alla varietà delle coppie di punti di una curva di genere due.

Ogni superficie che ammetta un gruppo continuo di trasformazioni birazionali appartiene ad una (almeno) delle tre famiglie sopraindicate, per cui è data una rappresentazione parametrica caratteristica *).

Le ricerche accennate esauriscono dunque il problema di classificare le superficie con un gruppo continuo di trasformazioni birazionali; sorge bensì un'altra questione cioè «se le tre famiglie di superficie che ammet-

*) Per le superficie che ammettono un gruppo più volte infinito di trasformazioni, vedasi l'estensione del teorema di SCHWARZ nella Nota di CASTELNUOVO-ENRIQUES (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 29 juillet 1895).

tono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali possano caratterizzarsi, separatamente o nel loro insieme, mediante i valori dei loro caratteri invarianti (il genere numerico p_a, il genere geometrico p_g, ed in generale i plurigeneri P_i) come accade nel caso delle curve ».

A tale domanda porge una risposta semplicissima la presente Nota. Si ha il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie, non razionale, ammetta un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè, è che il suo genere numerico sia negativo:

$$p_a < 0.$$

Le superficie per cui

$$p_a < -1$$

appartengono alla prima famiglia, cioè sono riferibili a rigate.

Le superficie per cui

$$p_a = -1$$

sono ellittiche (con un fascio di genere p_g di traiettorie) o iperellittiche, quest'ultimo caso presentandosi soltanto per $p_g = 1$.

Si possono distinguere i due casi, ellittico ed iperellittico, corrispondenti ai valori

$$p_a = -1, \qquad p_g = 1,$$

considerando il quadrigenere P_4: per

$$P_4 > 1 \qquad (p_a = -1)$$

si hanno superficie ellittiche possedenti UN *gruppo di trasformazioni ∞^1 e non più ampio; per*

$$P_4 = 1 \qquad (p_a = -1)$$

si hanno superficie iperellittiche possedenti un gruppo permutabile ∞^2, il quale in casi particolari (riducibilità dei periodi degli integrali) ammette *due* sottogruppi ellittici ∞^1.

È da notare che tra le superficie ellittiche con $p_g = 0$ trovansi in particolare superficie rientranti anche nella 1ª famiglia (rigate), le quali contengono infiniti gruppi ellittici ∞^1, ed anche gruppi più ampi.

A questo proposito mi sia permesso ricordare, come la famiglia delle rigate sia stata caratterizzata nei miei recenti lavori, che avrò occasione di citare fra un momento, mediante le condizioni:

$$P_4 = P_6 = 0.$$

Prima di svolgere brevemente la dimostrazione dei teoremi enunciati, dirò qualche parola intorno allo sviluppo delle idee che mi vi hanno condotto.

Questo studio costituisce una estensione di quello che recentemente ho compiuto sulle superficie di genere $p_g = 0$ *), riuscendo appunto a dimostrare che per

$$p_g = 0, \qquad p_a < -1$$

si hanno superficie appartenenti alla famiglia delle rigate, e per

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1$$

superficie (ellittiche) possedenti un gruppo ∞^1 di trasformazioni le cui traiettorie formano un fascio razionale.

Ma, mentre l'estensione riesce per una parte esente da una difficoltà essenziale propria all'ipotesi $p_g = 0$, essa esige d'altra parte la conoscenza d'un fatto nuovo.

Tale conoscenza viene fornita [oltrechè dalla conclusione a cui hanno portato gli studi di SEVERI, ENRIQUES, CASTELNUOVO — e d'altra parte di PICARD — sugli integrali appartenenti ad una superficie irregolare **)] da certe considerazioni sulle superficie, per cui alcuni integrali picardiani sono funzioni l'uno dell'altro, che dànno il teorema enunciato nel § 1.

Il sig. CASTELNUOVO ed io c'incontrammo nello sviluppo di queste considerazioni, ritraendone, indipendentemente, la veduta che esse permetterebbero di caratterizzare le superficie di genere $p_a < 0$, ciò che io attuo quì in rapporto alle mie ricerche precedentemente citate.

Frattanto venimmo a conoscere che il sig. DE FRANCHIS ***) ci aveva in parte preceduto, stabilendo che una superficie per cui un integrale picardiano è funzione di un altro (algebricamente indipendente) contiene un fascio irrazionale di curve, e deducendone in particolare che ogni superficie di genere $p_a < -1$ possiede sempre un tal fascio.

Il sig. DE FRANCHIS non ha avvertito che di quì era lecito senz'al-

---

*) *Sur les surfaces algébriques de genre zero* [Comptes Rendus, 27 février 1905]. *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 1-33 (adunanza del 5 marzo 1905)]. Citerò questa Memoria con (*A*).

**) Ad una superficie irregolare ($p_a < p_g$) appartengono $p_g - p_a$ integrali di 1ª specie, con $2(p_g - p_a)$ periodi. Cfr. CASTELNUOVO, Comptes Rendus, 23 janvier 1905. Vedasi poi la nuova dimostrazione di SEVERI: Comptes Rendus, 3 avril 1905. Cfr. d'altra parte PICARD, ibidem, 16 janvier et 3 avril 1905.

***) Cfr. la sua Nota in questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 49-54 (adunanza del 23 aprile 1905).

tro dedurre la « riferibilità a rigate delle superficie per cui $p_a < -1$ », in virtù di un noto procedimento *), che anzi io stesso ho avuto già occasione di applicare a questo caso concreto [anche ultimamente — in (A) — per giungere al medesimo teorema di riferibilità colla condizione aggiuntiva $p_g = 0$, che ora si è chiarita superflua].

D'altra parte, le considerazioni che il sig. DE FRANCHIS svolge per $p_a < -1$, venivano da noi riferite più generalmente al caso di un p_a qualunque abbastanza piccolo rispetto a p_g, come il sig. CASTELNUOVO esporrà in una Lettera resa pubblica in questi Rendiconti, insieme alla presente Nota.

1. Moviamo dal seguente teorema:

« Ogni superficie per cui

$$p_g > 2p_a + 3$$

contiene un fascio irrazionale, di genere > 1, di curve » **).

In particolare la diseguaglianza precedente è soddisfatta per

$$p_a < -1 \qquad (p_g \geqq 0).$$

Allora designando con $\rho > 1$ il genere del fascio, con π il genere delle curve K di esso, con $\Delta (\geqq 0)$ il numero delle K dotate d'un punto doppio e con $p^{(1)}$ il genere lineare della superficie, si può calcolare l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE in rapporto al fascio delle K, e si trova ***)

$$12p_a - p^{(1)} + 9 = \Delta + 4(\rho - 1)(\pi - 1) - 4,$$

da cui, essendo

$$p_a \leqq -2, \qquad \Delta \geqq 0, \qquad \rho \geqq 2,$$

si deduce

$$-7 - p^{(1)} \geqq 4\pi$$

e

$$p^{(1)} \leqq 7;$$

ciò che porta $\pi = 0$ e la riferibilità delle superficie ad una rigata di genere $-p_a > 1$ †).

Dunque le superficie per cui $p_a < -1$ sono riferibili a rigate ††).

*) CASTELNUOVO-ENRIQUES, Annali di Matematica, s. III, t. VI (1901), pp. 165-225.

**) Cfr. l'accennata Lettera del CASTELNUOVO al DE FRANCHIS [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 55-60 (adunanza del 14 maggio 1905)].

***) CASTELNUOVO-ENRIQUES, Annali di Matematica, l. c., n° 6, Oss. n° 21.

†) CASTELNUOVO-ENRIQUES, l. c., n° 21.

††) Allo stesso resultato giunge anche il sig. CASTELNUOVO nella citata Lettera.

2. Pongasi

$$p_a = -1,$$

e si distinguano i tre casi:

$$p_g = 0, \qquad p_g > 1, \qquad p_g = 1.$$

Il primo caso è già esaurito (*A*), e conduce a superficie ellittiche le cui traiettorie sono curve (ellittiche) di un fascio razionale.

3. Riferiamoci al 2° caso:

$$p_g > 1.$$

La diseguaglianza del § 1 è soddisfatta; pertanto alla superficie appartiene un fascio di genere $\rho > 1$ di curve K. E, conservando le designazioni del § 1, avremo similmente

$$12\,p_a - p^{(1)} + 9 = \Delta + 4(\rho - 1)(\pi - 1) - 4,$$

dove ora si ha:

$$\Delta \geqq 0, \qquad \rho > 1, \qquad p^{(1)} \geqq 1, \qquad p_a = -1;$$

si deduce quindi

$$\pi = 1, \qquad \Delta = 0.$$

La superficie possiede dunque un fascio di curve ellittiche, mediante le quali risulteranno composte le curve canoniche (NÖTHER); questa conclusione è d'accordo colla deduzione aritmetica del valore di $p^{(1)}$ tratto dalla relazione precedente:

$$p^{(1)} = 1.$$

Ripetiamo ora brevemente un ragionamento svolto in (*A*), § 3.

Anzitutto, essendo $\Delta = 0$, le curve K hanno tutte lo stesso modulo. Inoltre si può scegliere come modello proiettivo della superficie, una tale superficie, di un certo spazio S_r, che le K sieno curve ellittiche normali (di quello spazio o di spazi inferiori contenuti in S_r); allora due K generiche risultano proiettive in un numero finito n di modi, e, se si tien fermo un punto P in una K, sopra ogni altra K resta determinato razionalmente un gruppo (G_n) di n punti, omologhi a P. Il luogo dei gruppi G_n costituisce una curva C, n-secante le K, e le curve analoghe a C formano, sulla superficie, un fascio senza punti base.

Il fascio delle C può supporsi a priori razionale o ellittico; risulterà poi che (nelle date circostanze) ha luogo necessariamente il 2° caso.

Costruiamo sulla superficie le curve canoniche: esse si compongono di curve K o di parti di esse, e debbono segare sopra le C gruppi canonici.

Teniamo presente che nel fascio delle K si avranno in generale delle curve degeneri, le quali si riducono a componenti multiple

$$K_1, \quad K_2, \ldots$$

contate secondo certi numeri

$$s_1, \quad s_2, \ldots$$

maggiori dell'unità [(A), § 6]. Si riconosce quindi che le curve canoniche della superficie sono costituite:

1) da $2\rho - 2$ curve K, costituenti un gruppo della serie canonica $g_{2\rho-2}^{\rho-1}$ nel fascio di genere ρ;

2) e dalle componenti fisse

$$K_1, \quad K_2, \ldots$$

prese rispettivamente

$$s_1 - 1, \qquad s_2 - 1, \ldots$$

volte.

Pertanto il genere della superficie vale

$$p_g = \rho.$$

Ora il fascio delle K (di genere p_g) porta

$$p_g$$

integrali di Picard di 1ª specie della superficie, con

$$2p_g$$

periodi; il numero totale degli integrali è

$$p_g - p_a = p_g + 1,$$

e quello dei periodi

$$2(p_g + 1).$$

Per un noto teorema di Poincaré sulla riducibilità dei periodi degli integrali abeliani o di differenziali totali, alla superficie deve appartenere anche un integrale di 1ª specie I, i cui periodi si riducono a due soli distinti ω, ω'; le curve $I =$ cost., cui corrispondono valori assegnati di

$$\wp(I \mid \omega\,\omega'), \qquad \wp'(I \mid \omega\,\omega'),$$

costituiscono allora sulla superficie un fascio ellittico, che si potrebbe riconoscere non essere diverso da quello delle C, innanzi costruite.

Ma, come abbiamo notato in (A), § 4, la proprietà di contenere un fascio (razionale o irrazionale) di curve ellittiche K di ugual modulo, e un secondo fascio ellittico di curve C (proprietà che si riduce d'altronde alla rappresentazione parametrica di PAINLEVÉ, ibidem, § 5) caratterizza le superficie che ammettono un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni, aventi come traiettorie le curve K.

Concludiamo dunque che: le superficie per cui

$$p_a = -1, \qquad p_g > 1$$

ammettono un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni, le cui traiettorie sono le curve (ellittiche) di un fascio di genere p_g.

Questa conclusione è del tutto conforme a quella relativa al caso $p_g = 0$.

4. Discutiamo infine il terzo caso:

$$p_a = -1, \qquad p_g = 1.$$

Si avranno due integrali di PICARD di 1ª specie u, v, che, a priori, potrebbero supporsi l'uno funzione dell'altro; ma in tale ipotesi la superficie conterrebbe un fascio irrazionale di genere *due* *) e, pel ragionamento del § 3, dovrebbe essere una superficie ellittica di genere $p_g = 2$, ciò che contraddice al valore assegnato $p_g = 1$.

Ora, i due integrali u, v, essendo indipendenti, si possono considerare le coordinate x, y, z dei punti della superficie (limiti di integrazione) come funzioni di u, v.

Questo problema d'inversione è stato trattato in generale (indipendentemente dal valore di p_g e per un numero qualunque d'integrali) dai sigg. PICARD e PAINLEVÉ **); il sig. PICARD (l. c.) ha approfondito il problema speciale che nasce qui in corrispondenza all'ipotesi $p_g = 1$.

I resultati di tali ricerche, per quanto a noi interessa, dànno:

1) Gl'integrali u, v della superficie (F) riprendono un numero

---

*) Cfr. DE FRANCHIS e CASTELNUOVO, l. c.

**) Cfr.: PICARD, Journal de Mathématiques, IVe série, t. V (1889), pp. 135-319; PAINLEVÉ, Acta Mathematica, t. XXVII (1903), pp. 1-54.

finito di volte lo stesso valore, cioè la F si può rappresentare sopra una superficie iperellittica multipla (Ψ).

2) Se la superficie F è priva di curva canonica propriamente detta (non contandosi come vere parti di essa le curve, razionali, eccezionali, che del resto possono essere sempre soppresse) essa è iperellittica. Il sig. PICARD dopo avere stabilito questo resultato ha osservato che l'ipotesi della mancanza di una curva canonica (di genere > 0) doveva ritenersi superflua in base a ciò che dice il sig. NÖTHER sulle curve «ausgezeichnete»; ma siccome qualche nuovo esempio ha portato a modificare su tale riguardo le conclusioni dell'illustre geometra tedesco, così apparirà naturale che, riprendendo in esame la questione, si trovi, accanto al caso trattato da PICARD, anche un caso nuovo che corrisponde, come vedremo, a superficie del tipo ellittico.

Nel nostro esame prendiamo le mosse dal teorema 1), in base a cui: una superficie F, di generi $p_a = -1$, $p_g = 1$, si può rappresentare sopra una superficie iperellittica multipla Ψ, che è con F in una corrispondenza $[1, n]$. E per semplicità riteniamo Ψ ed F prive di curve eccezionali, ipotesi che è sempre lecito adottare *).

Consideriamo la corrispondenza $[1, n]$ tra Ψ ed F, e la curva di diramazione D (d'ordine $\geqq 0$) che essa ha su Ψ; di tale curva (quando essa abbia l'ordine > 0) supporremo per semplicità di ragionamento che sia irriducibile e ne designeremo con ρ il genere effettivo, con δ il numero dei punti doppi, con τ il numero delle cuspidi; avvertiamo che dovrà porsi $\rho = 1$, $\tau = 0$ se la curva D è mancante (d'ordine $= 0$).

Ora i generi numerici p_a, p'_a di F e Ψ saranno legati da una relazione stabilita dal sig. SEVERI **) che nel nostro caso (poichè Ψ non ha curva canonica propria ed è priva di curve eccezionali) si scrive:

$$24(p_a + 1) = 24n(p'_a + 1) + 6(\rho - 1) - 2\tau + 3\sum s.$$

In questa formula deve farsi

$$p_a = p'_a = -1$$

e

$$\sum s \geqq 0,$$

designandosi con s le molteplicità di eventuali punti fondamentali per la

---

*) CASTELNUOVO-ENRIQUES, Annali di Matematica, l. c., n° 18.

**) *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* [Rend. Istituto Lombardo, s. II, vol. XXXVI (1903), pp. 495-511], pag. 508, 510.

corrispondenza. Si deduce quindi

$$6(\rho - 1) \leqq 2\tau.$$

Ora mostriamo che « non può esistere su F una curva di genere effettivo $\rho > 1$, con

$$\tau \geqq 3(\rho - 1)$$

cuspidi ».

Invero una curva siffatta sarebbe trasformata dalle trasformazioni del gruppo iperellittico di Ψ in una serie continua di curve, parimenti di genere effettivo ρ, con δ punti doppi e τ cuspidi. Il genere virtuale di tali curve sarà

$$\rho + \delta + \tau,$$

ed il grado

$$2(\rho + \delta + \tau - 1),$$

essendo, per Ψ, $p_g = 1$, ed avendosi su di essa una curva canonica d'ordine 0.

Ma d'altra parte due curve infinitamente vicine della nostra serie, hanno 2δ intersezioni assorbite nei punti doppi e 3τ nelle cuspidi, perciò deve essere

$$2\delta + 3\tau \leqq 2(\rho + \delta + \tau - 1);$$

ma, ponendo in questa diseguaglianza

$$\tau \geqq 3(\rho - 1),$$

si ottiene

$$9(\rho - 1) \leqq 8(\rho - 1),$$

e quindi si deduce

$$\rho = 1 \quad \text{e} \quad \tau = 0. \qquad \text{C. D. D.}$$

Due casi sono dunque possibili:

a) sopra Ψ non vi è curva di diramazione (cioè D ha l'ordine $= 0$).

b) sopra Ψ vi è una curva di diramazione ellittica (o composta di curve ellittiche).

5. Nel caso *a*) possiamo riferirci al ragionamento di PICARD, ed anzi, avendo già esclusa la presenza di una curva di diramazione su Ψ, si può giungere assai rapidamente alla conclusione che la F è, come Ψ, una superficie iperellittica (con un gruppo ∞^2), nel modo che segue:

Si considerino i due gruppi di punti

$$P_1 \equiv (x_1 y_1 z_1), \ \ldots \ P_n \equiv (x_n y_n z_n)$$
$$P'_1 \equiv (x'_1 y'_1 z'_1), \ \ldots \ P'_n \equiv (x'_n y'_n z'_n)$$

corrispondenti a due punti

$$P \equiv (X\,Y\,Z), \qquad P' \equiv (X'\,Y'\,Z')$$

di Ψ.

Vi è una trasformazione birazionale di Ψ in cui si corrispondono P, P' e si ottiene quindi una corrispondenza *algebrica* tra i punti P_1, P'_1. Si tratta di dimostrare che P'_1 dipende da P_1 in modo *razionale*, e perciò occorre stabilire che se, nello spazio riemanniano F, P_1 descrive un ciclo lineare C_1, ritornando alla posizione iniziale, anche P'_1 descrive un cammino chiuso C'_1 e non si scambia (come a priori potrebbe supporsi) con $P'_2, \dots P'_n$. A tal fine si osserverà che a C_1 corrisponde su Ψ un ciclo lineare C, e che mentre P descrive C, P' descrive un ciclo lineare che si può dedurre da C con una deformazione continua; ora mentre C si deforma per continuità su Ψ, divenendo C', e ciò *senza contenere mai dei punti di diramazione*, anche C_1, si deformerà su F senza mai cessare di essere un cammino chiuso, e finalmente si trasformerà in un ciclo lineare C'_1 descritto da P'_1. C. D. D.

6. Discutiamo il caso *b*).

Se la superficie iperellittica Ψ contiene una curva ellittica, questa appartiene ad un fascio ellittico di curve, trasformate di essa nelle ∞^2 trasformazioni del gruppo iperellittico, e vi è un integrale di PICARD di 1ª specie, i cui periodi si riducono a due distinti; vi sarà dunque un altro integrale di PICARD di 1ª specie parimenti riducibile, e quindi un secondo fascio ellittico di curve ellittiche su Ψ.

Ora alle curve del 1° fascio cui appartiene la D (o le sue componenti), corrisponderanno su F le curve ellittiche K di un fascio ellittico, ed in questo si troveranno un certo numero di curve, multiple secondo certi numeri interi $s_1, s_2, \dots$ (maggiori dell'unità), le quali, prese rispet. $s_1 - 1$, $s_2 - 1$, ... volte, comporranno la curva D' omologa a D; D' costituirà la curva canonica di F *).

Alle curve del 2° fascio considerato su Ψ, corrisponderanno invece in F curve C, di un certo genere $\pi > 1$, componenti del pari un fascio ellittico.

Si deduce quindi che la F ammette un gruppo ∞^1 ellittico di trasformazioni, che ha come traiettorie le curve K.

*) ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* [Memorie Acc. Torino, s. II, t. XLIV (1903)]. — Cfr. anche SEVERI, l. c.

7. Ora come si potranno distinguere i due casi *a*) e *b*)?

Nel caso *a*) mancano, insieme alla curva canonica, tutte le curve pluricanoniche, cioè esse sono d'ordine $= 0$, quindi tutti i plurigeneri sono eguali all'unità:

$$P_i = 1.$$

Consideriamo invece il caso *b*). Abbiamo una curva canonica D', la cui composizione potrà designarsi in generale col simbolo

$$D' = \sum \frac{K}{s}(s-1);$$

quindi (anche nel caso in cui la sommatoria contenga un solo termine) $4\,D'$ si comporrà di almeno due curve del fascio ellittico, oltre a componenti fisse, ed apparterrà perciò ad un sistema lineare di dimensione $\geqq 1$; ciò si esprime scrivendo che il quadrigenere

$$P_4 > 1.$$

8. Abbiamo dimostrato che le superficie per cui $p_a = -1$ sono ellittiche o iperellittiche, assegnando i caratteri di distinzione fra i due casi. Importa rilevare esplicitamente che le superficie iperellittiche ed ellittiche hanno sempre $p_a = -1$. Per il caso iperellittico la cosa è ben nota, conoscendosi perfettamente un modello delle superficie iperellittiche, per gli studi di Picard e Humbert.

Per le superficie ellittiche basta a riferirsi alla rappresentazione loro sopra un cilindro ellittico multiplo

$$f(x, y) = y_2 - 4\,x_3 - g_2 x - g_3 = 0$$

con curva di diramazione composta di sezioni piane $z =$ cost.

La formula di Severi dà allora il genere numerico

$$p_a = -1.$$

Avvertiremo infine che *l'anzidetta rappresentazione permette di costruire effettivamente tutti i tipi di superficie ellittiche;* abbiamo indicato ciò in modo particolareggiato nella memoria (*A*), pel caso $p_g = 0$; e l'estensione al caso di p_g qualunque richiede soltanto poche modificazioni facilmente visibili.

9. Riunendo i resultati qui ottenuti con quelli dati in (A) possiamo rappresentarli nella seguente tabella:

	$p_a < -1$	$p_a = -1$	$p_a = 0$
$P_4 + P_6 = 0$ $(P_4 = 0,\ P_6 = 0)$	rigate di genere $-p_a$	rigate ellittiche	rigate razionali
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 \neq 1$	impossibile	superficie ellittiche con *un* gruppo ∞^1	
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 = 1$ $(p_g = 1,\ P_4 = 1)$	impossibile	superficie iperellittiche con un gruppo permutabile ∞^2	

Bologna, 29 aprile 1905.

F. ENRIQUES.