

MEMORIE E COMUNICAZIONI

SULLE SINGOLARITÀ DELLA JACOBIANA

DI TRE CURVE PIANE.

Nota di **F. Gerbaldi**, in Palermo.

Adunanze del 24 dicembre 1893 e 28 gennaio 1894.

Il prof. G. B. GUCCIA al § VI della sua importante Memoria « *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie* » (*) si è occupato di varie interessanti proprietà della Jacobiana di tre curve. La lettura di questa Memoria mi ha fatto sorgere l'idea di ricercare tutti i casi, in cui un punto singolare, di molteplicità r_1, r_2, r_3 , per tre curve algebriche piane ha per la Jacobiana una molteplicità maggiore di quella data in generale dalla formola $r_1 + r_2 + r_3 - 2$; e così ebbe origine la presente Nota (**), la quale ha per oggetto la soluzione di tale questione.

1. Siano date tre curve piane algebriche C_1, C_2, C_3 rispettivamente de' gradi n_1, n_2, n_3 . Consideriamo un punto qualunque O

(*) Vedi questi *Rendiconti*, t. VII, pag. 193-255.

(**) Questa Nota è, con qualche aggiunta, la riproduzione di un'altra litografata nel settembre passato.

Rend. Circ. Matem., t. VIII, parte 1^a.—Stampato il 15 febbrajo 1894. 1

del piano, e supponiamo che la curva C_i passi per O con r_i rami ($i=1, 2, 3$); nel caso di $r_i=n_i$ la curva C_i degenera in n_i rette uscenti da O , del resto è $r_i < n_i$; quando la curva C_i non passa per O porremo $r_i=0$.

Facendo uso di coordinate omogenee x, y, z , e prendendo il punto O come punto $(0, 0, 1)$, le equazioni delle tre curve, ordinate secondo le potenze discendenti di z , sono della forma

$$(1) \quad C_i \equiv z^{n_i-r_i} \varphi_i + z^{n_i-r_i-1} \psi_i + \dots = 0 \quad (i=1, 2, 3),$$

dove le φ_i rappresentano forme binarie in x, y del grado r_i , non identicamente nulle, e le ψ_i sono forme binarie del grado r_i+1 , che possono anche essere nulle identicamente. L'equazione $\varphi_i=0$ rappresenta il gruppo G_i delle r_i tangenti in O alla curva C_i ; queste potranno essere tutte distinte, ovvero potranno comunque avere delle coincidenze.

2. Denotando per semplicità con f', f'', f''' le tre derivate parziali d'una funzione f delle variabili x, y, z , l'equazione della Jacobiana J delle tre curve C_1, C_2, C_3 è

$$J \equiv \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \\ C_1''' & C_2''' & C_3''' \end{vmatrix} = 0,$$

ed, in virtù delle identità

$$n_i C_i = x C_i' + y C_i'' + z C_i''',$$

si può scrivere

$$Jz = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \\ n_1 C_1 & n_2 C_2 & n_3 C_3 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$0 = J\chi =$$

$$\begin{vmatrix} \chi^{n_1-r_1}\varphi'_1 + \chi^{n_1-r_1-1}\psi'_1 + \dots, & \chi^{n_2-r_2}\varphi'_2 + \chi^{n_2-r_2-1}\psi'_2 + \dots, & \chi^{n_3-r_3}\varphi'_3 + \chi^{n_3-r_3-1}\psi'_3 + \dots \\ \chi^{n_1-r_1}\varphi''_1 + \chi^{n_1-r_1-1}\psi''_1 + \dots, & \chi^{n_2-r_2}\varphi''_2 + \chi^{n_2-r_2-1}\psi''_2 + \dots, & \chi^{n_3-r_3}\varphi''_3 + \chi^{n_3-r_3-1}\psi''_3 + \dots \\ n_1\chi^{n_1-r_1}\varphi_1 + n_1\chi^{n_1-r_1-1}\psi_1 + \dots, & n_2\chi^{n_2-r_2}\varphi_2 + n_2\chi^{n_2-r_2-1}\psi_2 + \dots, & n_3\chi^{n_3-r_3}\varphi_3 + n_3\chi^{n_3-r_3-1}\psi_3 + \dots \end{vmatrix}.$$

Scomponendo l'ultimo determinante a colonne polinomie nella somma di determinanti a colonne monomie, si vede subito che i termini di grado più elevato in χ si ottengono dal determinante formato colle prime tre colonne parziali; che, i termini di grado immediatamente più basso si ottengono dai tre determinanti formati con una seconda e due prime colonne parziali; ecc. Di guisa che, posto

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \varphi''_3 \\ n_1\varphi_1 & n_2\varphi_2 & n_3\varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{vmatrix} \psi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \psi''_1 & \varphi''_2 & \varphi''_3 \\ n_1\psi_1 & n_2\varphi_2 & n_3\varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \psi'_2 & \varphi'_3 \\ \varphi''_1 & \psi''_2 & \varphi''_3 \\ n_1\varphi_1 & n_2\psi_2 & n_3\varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \psi'_3 \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \psi''_3 \\ n_1\varphi_1 & n_2\varphi_2 & n_3\psi_3 \end{vmatrix}$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$$

$$N = n_1 + n_2 + n_3 - 3, \quad R = r_1 + r_2 + r_3 - 2,$$

si hanno i primi termini della Jacobiana ordinata secondo le potenze discendenti di χ :

$$(2) \quad J \equiv \chi^{N-R}\Phi + \chi^{N-R-1}\Psi + \dots$$

3. L'ordine della Jacobiana è N .

Esclusi per un momento i casi, in cui due, o tutti e tre, i numeri r_1, r_2, r_3 sono nulli, si ha $R \geq 0$, e per la (2) si conclude

che il punto O è in generale R^{plo} per la Jacobiana. Le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè la molteplicità del punto O sia per la Jacobiana maggiore di R , sono espresse dall'annullarsi identico di Φ ; le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè la detta molteplicità sia maggiore di $R+1$, sono espresse dall'annullarsi identico, e simultaneo, di Φ e di Ψ ; ecc.

Osserviamo ora che, se due dei numeri r , per es. r_2, r_3 sono nulli, saranno φ_2 e φ_3 delle costanti, per cui $\varphi'_2 = \varphi'_3 = \varphi''_2 = \varphi''_3 = 0$, e però anche $\Phi = 0$ per identità. Allora è $R = r_1 - 2$, il primo termine di J è $\chi^{N-r_1+1}\Psi$, e però il punto O è $(r_1 - 1)^{\text{plo}}$, ossia $(R + 1)^{\text{plo}}$ per la Jacobiana.

Osserviamo infine che, se tutte tre le r sono nulle, le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono costanti, per cui Φ e Ψ sono identicamente nulli. Allora è $R = -2$, il primo termine di J comincia in generale colla potenza $(N - R - 2)^{\text{ma}}$, ossia N^{ma} di χ ; in questo caso la Jacobiana in generale non passa, come è naturale, per O ; e noi possiamo dire che essa ha in O un punto $(R + 2)^{\text{plo}}$, perchè qui $R + 2 = 0$.

Concludiamo adunque senza restrizioni:

1° il punto O è per la curva Jacobiana un punto R^{plo} , se Φ non si annulla identicamente; allora il gruppo T delle tangenti in O alla Jacobiana è rappresentato dall'equazione $\Phi = 0$;

2° il punto O è per la Jacobiana un punto $(R + 1)^{\text{plo}}$, se identicamente si annulla Φ ma non Ψ ; allora il gruppo T delle tangenti in O alla Jacobiana è rappresentato dall'equazione $\Psi = 0$;

3° il punto O è per la curva Jacobiana un punto per lo meno $(R + 2)^{\text{plo}}$, se insieme si annullano identicamente Φ e Ψ .

Noi ci proponiamo qui di studiare appunto le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il punto O , che in generale è R^{plo} , sia $(R + 1)^{\text{plo}}$, ed anche $(R + 2)^{\text{plo}}$, per la curva Jacobiana.

4. A questo scopo conviene introdurre i numeri

$$(3) \quad \sigma_1 = r_2 n_3 - r_3 n_2, \quad \sigma_2 = r_3 n_1 - r_1 n_3, \quad \sigma_3 = r_1 n_2 - r_2 n_1,$$

i quali soddisfano alle equazioni

$$r_1 \sigma_1 + r_2 \sigma_2 + r_3 \sigma_3 = 0$$

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3 = 0.$$

Supporremo, per fissare le idee,

$$\frac{r_1}{n_1} \geq \frac{r_2}{n_2} \geq \frac{r_3}{n_3},$$

e allora sarà

$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \leq 0, \quad \sigma_3 \geq 0.$$

Quando i tre numeri σ_1 , $-\sigma_2$, σ_3 sono tutti tre diversi da zero, li divideremo per il loro massimo comun divisore σ , e denoteremo con m_1 , m_2 , m_3 i quozienti, sicchè

$$\sigma_1 = m_1 \sigma, \quad \sigma_2 = -m_2 \sigma, \quad \sigma_3 = m_3 \sigma;$$

saranno m_1 , m_2 , m_3 numeri interi e positivi, primi fra loro; le espressioni $n_1 m_1 + n_3 m_3$ e $n_2 m_2$ avranno uno stesso valore che chiameremo n , così pure le espressioni $m_1 r_1 + m_3 r_3$ e $m_2 r_2$ avranno uno stesso valore che chiameremo r .

Quando uno solo dei tre numeri σ_1 , σ_2 , σ_3 è nullo, gli altri due sono di segno contrario; per fissare le idee supporremo allora

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 < 0, \quad \sigma_3 = 0,$$

divideremo i numeri σ_1 , $-\sigma_2$ per il loro massimo comun divisore σ , e denoteremo con m_1 , m_2 i quozienti; si avrà

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

questo caso rientra nel precedente col supporre $m_3 = 0$.

Se due dei tre numeri σ_1 , σ_2 , σ_3 sono nulli, è nullo anche il terzo, e si ha

$$r_1 : r_2 : r_3 = n_1 : n_2 : n_3,$$

cioè le molteplicità del punto O per le tre curve C_1 , C_2 , C_3 sono proporzionali ai loro gradi. In questo caso dopo d'aver diviso i numeri $r_2 r_3$, $r_3 r_1$, $r_1 r_2$ per il loro massimo comun divisore, denote-

remo con p_1, p_2, p_3 i quozienti, con v il valor comune dei prodotti $p_1 n_1, p_2 n_2, p_3 n_3$, e con ρ il valor comune dei prodotti $p_1 r_1, p_2 r_2, p_3 r_3$.

5. Quando i tre numeri $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ non sono tutti tre nulli, considereremo le due curve degeneri

$$K_1 \equiv C_1^{m_1} C_3^{m_3}, \quad K_2 \equiv C_2^{m_2}$$

composte la prima della curva C_1 contata m_1 volte e della C_3 contata m_3 volte, la seconda della C_2 contata m_2 volte.

I primi termini delle equazioni di queste due curve degeneri, ordinate rispetto alle potenze discendenti di x , sono

$$(4) \quad \begin{aligned} K_1 &\equiv x^{n-r} \varphi_1^{m_1} \varphi_3^{m_3} + x^{n-r-1} \varphi_1^{m_1-1} \varphi_3^{m_3-1} (m_1 \varphi_3 \psi_1 + m_3 \varphi_1 \psi_3) + \dots = 0 \\ K_2 &\equiv x^{n-r} \varphi_2^{m_2} + m_2 x^{n-r-1} \varphi_2^{m_2-1} \psi_2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Le due curve degeneri considerate sono dello stesso grado n , ed hanno in O un punto della stessa molteplicità r ; il gruppo di tangenti in O alla prima è $G_1^{m_1} G_3^{m_3}$ (cioè l'insieme dei due gruppi di tangenti alle curve C_1, C_3 contati rispettivamente m_1, m_3 volte); ed il gruppo di tangenti in O alla seconda è $G_2^{m_2}$ (cioè il gruppo di tangenti alla curva C_2 contato m_2 volte).

Quando uno solo dei numeri σ si annulla ed è $\sigma_3 = 0$, le curve degeneri K_1, K_2 si riducono a $C_1^{m_1}, C_2^{m_2}$ ed i loro rispettivi gruppi di tangenti in O sono $G_1^{m_1}, G_2^{m_2}$.

Finalmente, quando tutti tre i numeri σ sono nulli, scompaiono le curve K_1, K_2 ; in loro vece considereremo le tre curve degeneri

$$\Gamma_1 \equiv C_1^{p_1}, \quad \Gamma_2 \equiv C_2^{p_2}, \quad \Gamma_3 \equiv C_3^{p_3},$$

cioè le curve C_1, C_2, C_3 contate rispettivamente p_1, p_2, p_3 volte; queste sono di uno stesso grado v , hanno in O un punto della stessa molteplicità ρ , ed hanno ivi per tangenti i gruppi $G_1^{p_1}, G_2^{p_2}, G_3^{p_3}$.

Le curve K_1, K_2 determinano un fascio (K_1, K_2) di curve di

grado n , che hanno tutte il punto O r^{plo} . — Le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, che considereremo quando $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, determinano una rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ di curve di grado v , che hanno tutte il punto O r^{plo} .

6. Premesse queste cose, occupiamoci del primo termine Φ , che si presenta nell'equazione della Jacobiana delle tre curve C_1, C_2, C_3 , per metterlo sotto una forma, che si presta alla interpretazione geometrica.

In virtù della identità

$$r_i \varphi_i = x \varphi'_i + y \varphi''_i,$$

si ha :

$$\Phi y = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ r_1 \varphi_1 & r_2 \varphi_2 & r_3 \varphi_3 \\ n_1 \varphi_1 & n_2 \varphi_2 & n_3 \varphi_3 \end{vmatrix},$$

ossia

$$\Phi y = \sigma_1 \varphi'_1 \varphi_2 \varphi_3 + \sigma_2 \varphi_1 \varphi'_2 \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \varphi'_3,$$

donde

$$\varphi_1^{m_1-1} \varphi_2^{m_2-1} \varphi_3^{m_3-1} \Phi y = \sigma \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1^{m_1} \varphi_2^{m_2} \varphi_3^{m_3}).$$

Ed ora osservando che il Jacobiano di due forme binarie u, v d'uno stesso grado n si può scrivere

$$[u, v] = u'v'' - u''v' = \frac{n}{y} (v u' - v' u) = \frac{n v^2}{y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v} \right),$$

e che le forme $\varphi_1^{m_1} \varphi_3^{m_3}, \varphi_2^{m_2}$ sono dello stesso grado r , si ha

$$(5) \quad \varphi_1^{m_1-1} \varphi_2^{m_2-1} \varphi_3^{m_3-1} \Phi = \frac{\sigma}{r} [\varphi_1^{m_1} \varphi_3^{m_3}, \varphi_2^{m_2}].$$

Osserviamo infine che il Jacobiano delle due forme $\varphi_1^{m_1} \varphi_3^{m_3}, \varphi_2^{m_2}$ uguagliato a zero dà un'equazione, che rappresenta i raggi doppi dell'involuzione, di prima specie e grado n , determinata dai due gruppi

di rette $G_1^{m_1} G_3^{m_3}, G_2^{m_2}$; e che questa è l'involuzione dei gruppi di tangenti alle curve del fascio (K_1, K_2) (n° 5); concluderemo per la (5) che *il gruppo dei raggi doppi di questa involuzione consta dei gruppi G_1, G_2, G_3 presi rispettivamente $m_1 - 1, m_2 - 1, m_3 - 1$ volte e del gruppo T delle tangenti in O alla Jacobiana delle curve C_1, C_2, C_3 .*

Nel caso in cui è $m_3 = 0$, la (5) si semplifica, avendosi

$$\varphi_1^{m_1-1} \varphi_2^{m_2-1} \Phi = \frac{\sigma}{r} [\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}] = \frac{\sigma m_1 m_2}{r} \varphi_1^{m_1-1} \varphi_2^{m_2-1} \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2],$$

donde

$$(5') \quad \Phi = \frac{\sigma}{r} \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2];$$

dunque, *se le molteplicità di O per le due curve C_1, C_2 sono proporzionali ai loro gradi, il gruppo T di tangenti in O alla curva Jacobiana di C_1, C_2, C_3 si compone del gruppo G_3 e del gruppo Jacobiano dei due gruppi G_1, G_2 .*

7. Nel caso in cui $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, Φ si annulla identicamente. L'annullarsi identico di Φ avviene inoltre ancora quando le due forme dello stesso grado $\varphi_1^{m_1} \varphi_3^{m_3}$ e $\varphi_2^{m_2}$ differiscono soltanto per un fattore costante, il che, in ciò che precede, è stato implicitamente escluso. All'infuori di questi casi, Φ non si può annullare identicamente.

Si conchiude che *la molteplicità del punto O per la curva Jacobiana supera R allora, e allora soltanto: 1° quando le molteplicità del punto O per le curve C_1, C_2, C_3 sono proporzionali ai loro gradi; 2° quando i due gruppi $G_1^{m_1} G_3^{m_3}$ e $G_2^{m_2}$ coincidono in un unico gruppo G , o con altre parole, quando le curve del fascio (K_1, K_2) oltre ad avere in O la stessa molteplicità, hanno quivi anche le stesse tangenti.*

8. Analiticamente le condizioni, affinchè la Jacobiana abbia nel punto O una molteplicità maggiore di R , sono espresse dall'essere identicamente

$$(6) \quad \sigma_1 \varphi_1' \varphi_2 \varphi_3 + \sigma_2 \varphi_1 \varphi_2' \varphi_3 + \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3' = 0,$$

il che, come si è visto, equivale all'essere identicamente

$$(7) \quad \varphi_2^{m_2} = k \varphi_1^{m_1} \varphi_3^{m_3},$$

o, ciò che è lo stesso,

$$(7') \quad \varphi_1^{\sigma_1} \varphi_2^{\sigma_2} \varphi_3^{\sigma_3} = k',$$

dove k, k' sono costanti.

Le dette condizioni si possono anche mettere sotto altre forme.

Anzitutto, partendo dalla definizione di Φ , si ha subito

$$(8) \quad n_1 \varphi_1 [\varphi_2, \varphi_3] + n_2 \varphi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + n_3 \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2] = 0,$$

e questa relazione dev'essere identica affinchè siano soddisfatte le nostre condizioni.

Se poi con questa si tien presente l'identità

$$r_1 \varphi_1 [\varphi_2, \varphi_3] + r_2 \varphi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + r_3 \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2] = 0,$$

che ha sempre luogo fra tre forme binarie dei gradi r_1, r_2, r_3 e le loro Jacobiane, alla relazione identica (8) si possono sostituire le relazioni identiche

$$(9) \quad \frac{[\varphi_2, \varphi_3]}{\sigma_1 \varphi_2 \varphi_3} = \frac{[\varphi_3, \varphi_1]}{\sigma_2 \varphi_3 \varphi_1} = \frac{[\varphi_1, \varphi_2]}{\sigma_3 \varphi_1 \varphi_2}.$$

Soddisfatte le condizioni in discorso, nel fascio di curve (K_1, K_2) che, come si è detto, hanno in O un punto r^{plo} colle stesse tangenti, ve ne ha una K^ con punto $(r+1)^{\text{plo}}$ in O ; il gruppo U di tangenti in O a questa curva è dato dalla equazione*

$$U = k \varphi_1^{m_1-1} \varphi_3^{m_3-1} (m_1 \varphi_3 \psi_1 + m_3 \varphi_1 \psi_3) - \varphi_2^{m_2-1} \psi_2 = 0,$$

ossia

$$(10) \quad \sigma U = \frac{\varphi_2^{m_2}}{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} (\sigma_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_1 + \sigma_2 \varphi_3 \varphi_1 \psi_2 + \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \psi_3) = 0.$$

9. Siano $t_1, t_2, t_3, \dots, t_q$ q rette diverse uscenti da O , secondo le quali si diramano tutte le tangenti in O alle curve C_1, C_2, C_3 ; e precisamente nella retta t_i coincidano s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} rette dei gruppi G_1, G_2, G_3 ; sarà

$$0 \leq s_{i1} \leq r_1, \quad 0 \leq s_{i2} \leq r_2, \quad 0 \leq s_{i3} \leq r_3,$$

(escluso $s_{i1} = s_{i2} = s_{i3} = 0$)

$$\sum_1^q s_{i1} = r_1, \quad \sum_1^q s_{i2} = r_2, \quad \sum_1^q s_{i3} = r_3.$$

Se m_1, m_2, m_3 non sono tutti tre nulli, nella retta t_i cadono $m_{i1}s_{i1} + m_{i3}s_{i3}$ rette del gruppo $G_1^{m_1} G_3^{m_3}$ e $m_2 s_{i2}$ rette del gruppo $G_2^{m_2}$; le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè questi due gruppi siano identici, sono

$$(II) \quad m_1 s_{i1} + m_3 s_{i3} = m_2 s_{i2}.$$

per tutti i valori di i da 1 a q . — Queste condizioni inoltre sono verificate quando $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, qualunque siano le s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} .

Dunque *affinchè il punto O sia per la curva Jacobiana per lo meno $(R+1)^{\text{plo}}$ è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le (II), o, ciò che è lo stesso, che si annullino tutti i determinanti*

$$(II') \quad \begin{vmatrix} s_{i1} & s_{i2} & s_{i3} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}. \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

In particolare pertanto il punto O è $(R+1)^{\text{plo}}$ per la Jacobiana:

a) quando tutte le tangenti in O a C_1, C_2, C_3 coincidono in una sola retta t_i ($q=1, s_{i1}=r_1, s_{i2}=r_2, s_{i3}=r_3$) (*);

b) quando è $r_2 = r_3 = 0$; per cui, se una curva C_1 ha in O un punto r_1^{plo} , e le curve C_2, C_3 non passano per O , la Jacobiana ha in O un punto $(r_1-1)^{\text{plo}}$ (**);

(*) Cfr. GUCCIA, l. c. Teorema XXVI.

(**) Cfr. GUCCIA, l. c. Teorema XII.

c) quando le curve C_1, C_2, C_3 sono dello stesso grado, ed hanno in O la stessa molteplicità; per cui la Jacobiana di una rete di curve che hanno in O un punto r^{plo} ha in O un punto $(3r-1)^{plo}$;

d) quando le molteplicità di O per due curve C_1, C_2 sono proporzionali ai gradi, e nello stesso tempo il gruppo $G_1^{r_1}$ coincide col gruppo $G_2^{r_2}$, qualunque sia la molteplicità in O della curva C_3 ; in questo caso le (11') si riducono più semplicemente a

$$s_{i1} : s_{i2} = r_1 : r_2.$$

Tutte le volte che la molteplicità di O per la Jacobiana non supera R , in ogni retta t_i coincidono

$$m_1 s_{i1} + m_2 s_{i2} + m_3 s_{i3} - 1$$

raggi doppi dell'involuzione determinata dai gruppi $G_1^{m_1}, G_3^{m_3}, G_2^{m_2}$; e quindi, pel teorema del n° 6, in ogni retta t_i coincidono

$$m_1 s_{i1} + m_2 s_{i2} + m_3 s_{i3} - 1 - (m_1 - 1)s_{i1} - (m_2 - 1)s_{i2} - (m_3 - 1)s_{i3}$$

ossia $s_{i1} + s_{i2} + s_{i3} - 1$ tangenti della Jacobiana (*).

10. Ed ora passiamo ad occuparci anche del secondo termine Ψ , che si presenta nella equazione (2) della Jacobiana delle tre curve C_1, C_2, C_3 . Supporremo sempre verificate le condizioni per cui Φ si annulla identicamente. Inoltre per ora supporremo m_1, m_2, m_3 , e quindi anche $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, non tutti nulli, riservandoci di studiare a parte questo caso. Allora, dall'annullarsi dei determinanti (11') segue

$$(12) \quad \frac{n_3 s_{i2} - n_2 s_{i3}}{\sigma_1} = \frac{n_1 s_{i3} - n_3 s_{i1}}{\sigma_2} = \frac{n_2 s_{i1} - n_1 s_{i2}}{\sigma_3} = \alpha_i$$

per $i = 1, 2, \dots, q$. Così ad ogni retta t_i corrisponde un numero α_i ; i numeri α_i possono avere valori interi o frazionarii, positivi o

(*) Cfr. Guccia, l. c. Teorema XXV.

negativi, o nulli. La loro somma è in ogni caso uguale ad uno; infatti si ha

$$\sum \alpha_i = \frac{n_3 \sum s_{i2} - n_2 \sum s_{i3}}{\sigma_1} = \frac{n_3 r_2 - n_2 r_3}{\sigma_1} = 1.$$

Ciò posto, consideriamo la funzione ω definita da

$$\omega = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} \dots u_q^{\alpha_q},$$

dove con u_i intendiamo il fattor lineare omogeneo in x, y , che posto uguale a zero rappresenta la retta t_i ; ω è una funzione algebrica, in generale irrazionale, omogenea di primo grado in x, y ; le potenze $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, di ω sono funzioni algebriche frazionarie, e si ha

$$(13) \quad \omega^{\sigma_1} = \frac{\varphi_2^{n_3}}{\varphi_3^{n_2}}, \quad \omega^{\sigma_2} = \frac{\varphi_3^{n_1}}{\varphi_1^{n_3}}, \quad \omega^{\sigma_3} = \frac{\varphi_1^{n_2}}{\varphi_2^{n_1}}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \omega^{\sigma_1} &= u_1^{n_3 s_{12} - n_2 s_{13}} u_2^{n_3 s_{22} - n_2 s_{23}} \dots u_q^{n_3 s_{q2} - n_2 s_{q3}} = \\ &= (u_1^{s_{12}} u_2^{s_{22}} \dots u_q^{s_{q2}})^{n_3} (u_1^{s_{13}} u_2^{s_{23}} \dots u_q^{s_{q3}})^{-n_2} = \varphi_2^{n_3} \varphi_3^{-n_2}, \end{aligned}$$

e similmente si dimostrano le altre relazioni (13).

11. Introdotta così la funzione ω possiamo dare a Ψ una forma notevole. In virtù delle identità:

$$r_i \varphi_i = x \varphi'_i + y \varphi''_i, \quad (r_i + 1) \psi_i = x \psi'_i + y \psi''_i,$$

si ha

$$\Psi_1 y = \begin{vmatrix} \psi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ (r_1 + 1) \psi_1 & r_2 \varphi_2 & r_3 \varphi_3 \\ n_1 \psi_1 & n_2 \varphi_2 & n_3 \varphi_3 \end{vmatrix},$$

che si può scrivere

$$\psi_1^{\sigma_1-1} \varphi_2^{\sigma_2-n_3-1} \varphi_3^{\sigma_3+n_2-1} \Psi_1 y = \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1^{\sigma_1} \varphi_2^{\sigma_2-n_3} \varphi_3^{\sigma_3+n_2}),$$

ossia

$$\frac{\psi_1^{\sigma_1-1} \varphi_2^{\sigma_2-1} \varphi_3^{\sigma_3-1}}{\omega^{\sigma_1}} \Psi_1 y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_1^{\sigma_1} \varphi_2^{\sigma_2} \varphi_3^{\sigma_3}}{\omega^{\sigma_1}} \right);$$

e dividendo ambi i membri per $\varphi_1^{\sigma_1} \varphi_2^{\sigma_2} \varphi_3^{\sigma_3}$, che è costante (n° 8), si ha

$$\frac{1}{\psi_1 \varphi_2 \varphi_3} \left(\frac{\psi_1}{\omega \varphi_1} \right)^{\sigma_1} \Psi_1 y = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\psi_1}{\omega \varphi_1} \right)^{\sigma_1} \right],$$

donde

$$(14) \quad \frac{1}{\omega \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} \Psi_1 y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_1 \psi_1}{\omega \varphi_1} \right).$$

Espressioni analoghe si hanno per Ψ_2 , Ψ_3 ; quindi, essendo $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$, si conclude

$$(15) \quad \frac{1}{\omega \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} \Psi y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_1 + \sigma_2 \varphi_3 \varphi_1 \psi_2 + \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \psi_3}{\omega \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} \right).$$

12. Di qui si vede che, se Ψ è identicamente nullo, deve sussistere la relazione identica

$$(16) \quad \sigma_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_1 + \sigma_2 \varphi_3 \varphi_1 \psi_2 + \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \psi_3 = l \omega \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$$

dove l è una costante.

Affinchè questa identità possa essere verificata con $l \neq 0$, deve anzitutto la funzione ω essere razionale, e quindi i numeri α_i debbono essere interi; in secondo luogo, osservando che il secondo membro contiene il fattore lineare u_i alla potenza $s_{i1} + s_{i2} + s_{i3} + \alpha_i$, e che il primo membro contiene lo stesso fattore ad una potenza per lo meno uguale al più piccolo dei numeri: $s_{i2} + s_{i3}$, $s_{i3} + s_{i1}$, $s_{i1} + s_{i2}$; si conclude che ogni numero α_i , quando è negativo, non può in valore assoluto superare il più grande dei numeri s_{i1} , s_{i2} , s_{i3} .

Se i numeri α_i non soddisfano alle ora menzionate condizioni, bisogna assumere la costante $l = 0$, e le condizioni per l'annullarsi identico di Ψ sono espresse dalla relazione identica

$$(16') \quad \sigma_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_1 + \sigma_2 \varphi_3 \varphi_1 \psi_2 + \sigma_3 \varphi_1 \varphi_2 \psi_3 = 0.$$

13. Per interpretare geometricamente le condizioni (16) o (16'), basta tener presente il gruppo U di tangenti in O alla curva K^* del fascio (K_1, K_2) , che ha in O un punto $(r+1)^{\text{plo}}$. In virtù della (10) alla relazione (16) si può dare la forma

$$(17) \quad U = l \omega \varphi_2^{m_2},$$

donde si vede che, se $l \neq 0$, aumentando di α_i la molteplicità con cui ogni retta t_i è contenuta nel gruppo G , si ottengono le rette del gruppo U ; e, se $l = 0$, la curva K^* ha in O un punto $(r+1)^{\text{plo}}$.

Adunque: *se le molteplicità in O delle curve C_1, C_2, C_3 non sono proporzionali ai loro gradi, la Jacobiana avrà nel punto O un punto $(R+2)^{\text{plo}}$ allora, ed allora soltanto:*

1° ($l \neq 0$) *quando nel fascio (K_1, K_2) vi è una curva K^* dotata in O di punto $(r+1)^{\text{plo}}$, il cui gruppo di tangenti U si ottiene dal gruppo G delle tangenti comuni alle curve del fascio, aumentando di α_i la molteplicità con cui ogni retta t_i è contenuta nel gruppo G (per il che, come si è visto, è necessario, ma non sufficiente, che i numeri α_i siano tutti interi, e che ogni numero negativo α_i non superi in valore assoluto il maggiore dei tre numeri corrispondenti s_{i1}, s_{i2}, s_{i3});*

2° ($l = 0$) *quando nel fascio (K_1, K_2) vi è una curva K^* dotata in O di punto $(r+2)^{\text{plo}}$.*

14. Passiamo ora a considerare il caso $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, in cui le molteplicità di O per le curve C_1, C_2, C_3 sono proporzionali ai loro gradi; cosicchè

$$\frac{n_1}{r_1} = \frac{n_2}{r_2} = \frac{n_3}{r_3} = \frac{\nu}{\rho}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{y} \begin{vmatrix} \psi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ (r_1+1)\psi_1 & r_2\varphi_2 & r_3\varphi_3 \\ n_1\psi_1 & n_2\varphi_2 & n_3\varphi_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{y} \begin{vmatrix} \psi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \psi_1 & 0 & 0 \\ n_1\psi_1 & n_2\varphi_2 & n_3\varphi_3 \end{vmatrix}, \\ -\Psi_1 &= \frac{\nu}{\rho y} \psi_1 \begin{vmatrix} \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ r_2\varphi_2 & r_3\varphi_3 \end{vmatrix} = \frac{\nu}{\rho} \psi_1 [\varphi_2, \varphi_3]. \end{aligned}$$

Espressioni analoghe si hanno per Ψ_2, Ψ_3 ; dunque in questo caso si trova

$$(18) \quad -\frac{\rho}{v} \Psi = \psi_1[\varphi_2, \varphi_3] + \psi_2[\varphi_3, \varphi_1] + \psi_3[\varphi_1, \varphi_2].$$

15. Per interpretare ora geometricamente l'annullarsi di Ψ , considereremo le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ definite al n° 5; esse determinano una rete che ha per equazione

$$(19) \quad \chi^{v-\rho}(\lambda_1 \varphi_1^{\rho_1} + \lambda_2 \varphi_2^{\rho_2} + \lambda_3 \varphi_3^{\rho_3}) + \\ \chi^{v-\rho-1}(\lambda_1 p_1 \varphi_1^{\rho_1-1} \psi_1 + \lambda_2 p_2 \varphi_2^{\rho_2-1} \psi_2 + \lambda_3 p_3 \varphi_3^{\rho_3-1} \psi_3) + \dots = 0.$$

Distingueremo tre casi: 1° le $\varphi_1^{\rho_1}, \varphi_2^{\rho_2}, \varphi_3^{\rho_3}$ non differiscono che per fattori costanti; 2° tra le $\varphi_1^{\rho_1}, \varphi_2^{\rho_2}, \varphi_3^{\rho_3}$ passa una relazione lineare; 3° le $\varphi_1^{\rho_1}, \varphi_2^{\rho_2}, \varphi_3^{\rho_3}$ sono linearmente indipendenti.

Nel primo caso tutte le curve della rete ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$) hanno in O un punto ρ^{plo} colle stesse tangenti; e, supposto

$$\frac{\varphi_1^{\rho_1}}{a_1} = \frac{\varphi_2^{\rho_2}}{a_2} = \frac{\varphi_3^{\rho_3}}{a_3},$$

nella rete vi è un fascio di curve, i cui parametri soddisfano all'equazione

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 = 0,$$

le quali hanno in O un punto $(\rho + 1)^{\text{plo}}$. Allora si ha l'identità

$$0 = [\varphi_2^{\rho_2}, \varphi_3^{\rho_3}] = p_2 p_3 \varphi_2^{\rho_2-1} \varphi_3^{\rho_3-1} [\varphi_2, \varphi_3];$$

quindi $[\varphi_2, \varphi_3]$ si annulla identicamente; lo stesso avviene similmente di $[\varphi_3, \varphi_1]$, $[\varphi_1, \varphi_2]$, e per conseguenza, in virtù della (18), anche di Ψ . Dunque, *se le molteplicità in O delle tre curve C_1, C_2, C_3 sono proporzionali ai loro gradi, e se le curve della rete ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$) hanno in O un punto base ρ^{plo} colle tangenti fisse, la Jacobiana ha sempre in O un punto $(R + 2)^{\text{plo}}$. In particolare la Jacobiana di una rete*

di curve, che hanno in O un punto base r^{plo} colle tangenti fisse, ha in O un punto $(3r)^{\text{plo}}$ (*).

16. Consideriamo in secondo luogo il caso, in cui $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e tra le $\varphi_1^{p_1}$, $\varphi_2^{p_2}$, $\varphi_3^{p_3}$ passa una relazione lineare

$$(20) \quad a_1 \varphi_1^{p_1} + a_2 \varphi_2^{p_2} + a_3 \varphi_3^{p_3} = 0.$$

Tra le curve della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ ve ne ha una Γ^* , corrispondente ai parametri $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$, $\lambda_3 = a_3$, che ha in O un punto $(\rho + 1)^{\text{plo}}$; i gruppi di tangenti in O alle altre curve della rete costituiscono una involuzione di prima specie e grado ρ ; il gruppo V di tangenti in O alla curva Γ^* è dato dall'equazione

$$V = p_1 a_1 \varphi_1^{p_1-1} \psi_1 + p_2 a_2 \varphi_2^{p_2-1} \psi_2 + p_3 a_3 \varphi_3^{p_3-1} \psi_3 = 0.$$

Qui conviene ora distinguere tre sottocasi: 1° uno dei coefficienti della (20), per es. a_1 , è nullo; allora i due gruppi $G_2^{p_2}$, $G_3^{p_3}$ coincidono in uno, e si ha $[\varphi_2, \varphi_3] = 0$; invece $[\varphi_3, \varphi_1]$, e $[\varphi_1, \varphi_2]$ non possono essere identicamente nulli, altrimenti si cadrebbe nel caso del n° 15; 2° nessuno dei coefficienti a_1 , a_2 , a_3 è nullo, ed uno almeno degli esponenti p_1 , p_2 , p_3 , per es. p_1 , è uguale ad 1; allora il grado di una curva, C_1 , è multiplo comune dei gradi delle altre due curve C_2 , C_3 ($n_1 = p_2 n_2 = p_3 n_3$), ed il gruppo G_1 appartiene all'involuzione determinata dai gruppi $G_2^{p_2}$, $G_3^{p_3}$; in questo sottocaso niuno dei Jacobiani $[\varphi_2, \varphi_3]$, $[\varphi_3, \varphi_1]$, $[\varphi_1, \varphi_2]$ può essere identicamente nullo, perchè, se fosse per es. $[\varphi_2, \varphi_3] = 0$ per identità, il gruppo $G_2^{p_2}$ coinciderebbe col gruppo $G_3^{p_3}$, e si cadrebbe nel sottocaso precedente; 3° nessuno dei coefficienti a_1 , a_2 , a_3 è nullo, e nessuno degli esponenti p_1 , p_2 , p_3 è uguale ad 1; allora, come dimostrò Halphen, φ_1 , φ_2 , φ_3 possono essere solamente

- α) le forme del diedro: ($r_1=2$, $r_2=r$, $r_3=r$; $p_1=r$, $p_2=2$, $p_3=2$)
- β) le forme del tetraedro: ($r_1=4$, $r_2=4$, $r_3=6$; $p_1=3$, $p_2=3$, $p_3=2$)
- γ) le forme dell'ottaedro: ($r_1=6$, $r_2=8$, $r_3=12$; $p_1=4$, $p_2=3$, $p_3=2$)
- δ) le forme dell'icosaedro: ($r_1=12$, $r_2=20$, $r_3=30$; $p_1=5$, $p_2=3$, $p_3=2$);

(*) Questa proposizione è anche contenuta (per $r'=r+1$) nel Teorema XXXV della citata Memoria del prof. GUCCIA.

e però i gruppi di tangenti in O alle curve della rete ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$) sono rappresentati da una delle equazioni del diedro, o del tetraedro, o dell'ottaedro, o dell'icosaedro.

Nel primo sottocaso si può scrivere

$$V = a_3 \frac{\varphi_3^{p_3-1}}{\varphi_2} (p_3 \psi_3 \varphi_2 - p_2 \psi_2 \varphi_3);$$

inoltre l'identità

$$r_1 \varphi_1 [\varphi_2, \varphi_3] + r_2 \varphi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + r_3 \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2] = 0$$

si trasforma in

$$p_3 \varphi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + p_2 \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2] = 0;$$

così che, tenendo presente la (18) e ponendo

$$A = \frac{[\varphi_1, \varphi_3]}{a_2 p_2 \varphi_2^{p_2-1}} = \frac{[\varphi_1, \varphi_2]}{a_3 p_3 \varphi_3^{p_3-1}},$$

si ha

$$(21) \quad \frac{\rho}{v} \Psi = AV.$$

Nel secondo e nel terzo sottocaso, derivando la (20), si ha identicamente

$$p_1 a_1 \varphi_1^{p_1-1} \varphi_1' + p_2 a_2 \varphi_2^{p_2-1} \varphi_2' + p_3 a_3 \varphi_3^{p_3-1} \varphi_3' = 0$$

$$p_1 a_1 \varphi_1^{p_1-1} \varphi_1'' + p_2 a_2 \varphi_2^{p_2-1} \varphi_2'' + p_3 a_3 \varphi_3^{p_3-1} \varphi_3'' = 0,$$

e di qui, denotando con A un fattore di proporzionalità, si ricava

$$Ap_1 a_1 \varphi_1^{p_1-1} = [\varphi_2, \varphi_3], \quad Ap_2 a_2 \varphi_2^{p_2-1} = [\varphi_3, \varphi_1], \quad Ap_3 a_3 \varphi_3^{p_3-1} = [\varphi_1, \varphi_2];$$

donde, tenendo presente la (18), si deduce ancora come nel primo sottocaso la (21); con questa differenza però che nel secondo sottocaso si ha

$$A = \frac{1}{a_1} [\varphi_2, \varphi_3];$$

e nel terzo sottocaso A è una costante, diversa da zero, perchè si ha

$$r_1 + r_2 + r_3 - 2 = p_1 r_1 = p_2 r_2 = p_3 r_3.$$

In tutti tre i sottocasi A non può annullarsi identicamente, per le osservazioni fatte; quindi, per la (21), dall'annullarsi identico di Ψ segue l'annullarsi identico di V , e viceversa. Dunque:

Se le molteplicità in O delle curve C_1, C_2, C_3 sono proporzionali ai loro gradi, ed i gruppi di tangenti in O alle curve della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ formano una involuzione di prima specie e grado ρ , la Jacobiana di C_1, C_2, C_3 ha in O un punto $(R+2)^{p_0}$ allora, ed allora soltanto, quando nella rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ vi è una curva Γ^ con un punto $(\rho+2)^{p_0}$ in O . In particolare: in una rete di curve, che hanno in O un punto base r^{p_0} , dove i gruppi di tangenti formano una involuzione di prima specie, la Jacobiana ha in O un punto $(3r)^{p_0}$ allora, ed allora soltanto, quando nella rete vi è una curva con un punto $(r+2)^{p_0}$ in O .*

Se invece il punto O è soltanto $(\rho+1)^{p_0}$ per una curva Γ^ della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ segue dalla (21) che il gruppo di tangenti in O alla Jacobiana: nel primo sottocaso si ottiene dal gruppo V di tangenti alla curva Γ^* , aggiungendo a questo il gruppo Jacobiano di G_1 e G_2 (ovvero di G_1 e G_3) e togliendo il gruppo $G_3^{p_3-1}$ (ovvero $G_2^{p_2-1}$); nel secondo sottocaso è il gruppo V di tangenti alla curva Γ^* aumentato del gruppo Jacobiano di G_2 e G_3 ; e nel terzo sottocaso è semplicemente il gruppo V di tangenti alla curva Γ^* . In particolare, dal secondo sottocaso si ha, che: in una rete di curve, la quale ha in O un punto base r^{p_0} , dove i gruppi di tangenti formano una involuzione di prima specie, e contiene una curva, C^* , con un punto $(r+1)^{p_0}$ in O , la Jacobiana ha un punto $(3r-1)^{p_0}$ in O , ed ha quivi per tangenti le tangenti della curva C^* ed i raggi doppi dell'involuzione suddetta (*).*

17. Resta ad esaminare il caso in cui $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e le $\varphi_1^{p_1}, \varphi_2^{p_2}, \varphi_3^{p_3}$ sono linearmente indipendenti. In questo caso i gruppi di tangenti in O alle curve della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ formano una involuzione di seconda specie e grado ρ .

(*) Questa proposizione è anche contenuta (per $r' = r+1$) nel Teorema XXXIV della citata Memoria del prof. GUCCIA.

Supporremo in primo luogo che le curve C_1, C_2, C_3 siano dello stesso grado ν ed abbiano in O la stessa molteplicità ρ ; allora $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, e le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sono niente altro che le C_1, C_2, C_3 .

La rete (C_1, C_2, C_3) ha per equazione

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 + \dots = 0,$$

ed, essendo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linearmente indipendenti, non conterrà alcuna curva con punto $(\rho + 1)^{\text{plo}}$.

In una rete siffatta vi sono sempre delle curve che presentano in O cicli per lo meno di second'ordine e seconda classe; le tangenti in O a questi cicli sono le rette, in cui coincidono due almeno delle ρ tangenti in O ad una curva della rete, e che tagliano inoltre la stessa curva almeno in $\rho + 2$ punti coincidenti in O ; per tali tangenti debbono essere soddisfatte le equazioni

$$\lambda_1 \varphi'_1 + \lambda_2 \varphi'_2 + \lambda_3 \varphi'_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \varphi''_1 + \lambda_2 \varphi''_2 + \lambda_3 \varphi''_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 = 0,$$

donde, eliminando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, si ha

$$\begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \varphi''_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\psi_1[\varphi_2, \varphi_3] + \psi_2[\varphi_3, \varphi_1] + \psi_3[\varphi_1, \varphi_2] = 0;$$

ma questa equazione per la (18) coincide con $\Psi = 0$; dunque: *In una rete di curve che hanno in un punto O un punto base ρ^{plo} , dove i gruppi di tangenti formano una involuzione di seconda specie, ve ne sono $3\rho - 1$, che presentano in O cicli di almeno second'ordine e se-*

conda classe, e le loro tangenti sono le $3\rho - 1$ tangenti in O alla Jacobiana. Questa avrà in O un punto $(3\rho)^{\text{plo}}$, allora ed allora soltanto, quando tutti i cicli d'ordine uguale o superiore al secondo, coll'origine in O , appartenenti a curve della rete, sono di classe uguale o superiore alla seconda.

18. Quando le curve C_1, C_2, C_3 sono di gradi diversi, purchè proporzionali alle molteplicità del punto O , consideriamo la rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$; avendo supposto $\varphi_1^{p_1}, \varphi_2^{p_2}, \varphi_3^{p_3}$ linearmente indipendenti, in questa rete considereremo le curve che presentano in O cicli per lo meno di second'ordine e seconda classe; tenuta presente l'equazione (19) della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, abbiamo le tangenti in O ai detti cicli date dall'equazione

$$\begin{vmatrix} p_1 \varphi_1^{p_1-1} \varphi'_1 & p_2 \varphi_2^{p_2-1} \varphi'_2 & p_3 \varphi_3^{p_3-1} \varphi'_3 \\ p_1 \varphi_1^{p_1-1} \varphi''_1 & p_2 \varphi_2^{p_2-1} \varphi''_2 & p_3 \varphi_3^{p_3-1} \varphi''_3 \\ p_1 \varphi_1^{p_1-1} \psi_1 & p_2 \varphi_2^{p_2-1} \psi_2 & p_3 \varphi_3^{p_3-1} \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\varphi_1^{p_1-1} \varphi_2^{p_2-1} \varphi_3^{p_3-1} \{ \psi_1 [\varphi_2, \varphi_3] + \psi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + \psi_3 [\varphi_1, \varphi_2] \} = 0;$$

dunque, per la (18), quando le molteplicità del punto O per le tre curve C_1, C_2, C_3 sono proporzionali a' loro gradi, ed i gruppi di tangenti in O alle curve della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ formano una involuzione di seconda specie, allora, tolti i gruppi G_1, G_2, G_3 presi $p_1 - 1, p_2 - 1, p_3 - 1$ volte, le altre tangenti in O ai cicli di almeno second'ordine e seconda classe appartenenti a curve della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ sono le tangenti in O alla Jacobiana di C_1, C_2, C_3 ; e la Jacobiana avrà in O un punto $(R + 2)^{\text{plo}}$ allora, ed allora soltanto, quando ogni ciclo di almeno second'ordine, coll'origine in O , appartenente ad una curva della rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ è anche almeno della seconda classe.

19. Con ciò sono esauriti tutti i casi in cui la Jacobiana di tre curve C_1, C_2, C_3 può avere in O un punto $(R + 2)^{\text{plo}}$. Affinchè questo avvenga, oltre alle condizioni che già si debbono verificare

per la presenza del punto $(R + 1)^{\text{plo}}$, deve essere soddisfatta identicamente la (16), quando $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ non sono tutti nulli; e deve annullarsi identicamente la (18), quando $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Analiticamente si possono esprimere le condizioni per la presenza del punto $(R + 2)^{\text{plo}}$ in maniera da evitare la distinzione dei due casi. Basta tener presenti le relazioni (9), donde segue, qualunque siano ψ_1, ψ_2, ψ_3 , la relazione identica

$$\frac{[\varphi_2, \varphi_3]}{\sigma_1 \varphi_2 \varphi_3} = \frac{[\varphi_3, \varphi_1]}{\sigma_2 \varphi_3 \varphi_1} = \frac{[\varphi_1, \varphi_2]}{\sigma_3 \varphi_1 \varphi_2} = \frac{\psi_1 [\varphi_2, \varphi_3] + \psi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + \psi_3 [\varphi_1, \varphi_2]}{\sigma_1 \psi_1 \varphi_2 \varphi_3 + \sigma_2 \psi_2 \varphi_3 \varphi_1 + \sigma_3 \psi_3 \varphi_1 \varphi_2},$$

mercè la quale si può conchiudere che *in ogni caso le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il punto O sia $(R + 2)^{\text{plo}}$ per la Jacobiana sono espresse analiticamente dal doversi avere per identità*

$$(22) \quad \begin{aligned} \psi_1 [\varphi_2, \varphi_3] + \psi_2 [\varphi_3, \varphi_1] + \psi_3 [\varphi_1, \varphi_2] &= l \sigma_2 \sigma_3 \omega \varphi_1 [\varphi_2, \varphi_3] \\ &= l \sigma_3 \sigma_1 \omega \varphi_2 [\varphi_3, \varphi_1] = l \sigma_1 \sigma_2 \omega \varphi_3 [\varphi_1, \varphi_2] \end{aligned}$$

dove l è una costante arbitraria, che può anche essere nulla.

20. Giovandoci dei risultati precedenti risolviamo ora la questione: *determinare tutti i casi, in cui la Jacobiana ha punti doppi, e tutti i casi in cui essa ha punti tripli.*

Si considerino un punto O , due curve C_1, C_2 della rete pasanti per O , e un'altra curva C_3 della rete non appartenente al fascio (C_1, C_2) .

Supponiamo in primo luogo che la C_3 passi anch'essa per O ; sarà O un punto base della rete, e $r_1 \geq 1, r_2 \geq 1, r_3 \geq 1$. — Se $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, la rete $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ coincide colla (C_1, C_2, C_3) ; pei n° 15, 16 il punto O è in generale doppio per la Jacobiana, e diventa triplo soltanto in due casi: 1° se tutte tre le curve C_1, C_2, C_3 hanno in O la stessa tangente; 2° se nella rete (C_1, C_2, C_3) vi è una curva con punto triplo in O . — Se $r_1 = r_2 = 1, r_3 = 2$, si ha $m_1 = m_2 = 1, m_3 = 0$; il fascio (K_1, K_2) si riduce al fascio (C_1, C_2) ; per il n° 7 il punto O è in generale doppio per la Jacobiana, e diventa triplo soltanto se C_1 e C_2 hanno la stessa tangente

in O .—Nel caso $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 2$, e nel caso $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 3$, il punto O è triplo per la Jacobiana; negli altri casi in cui r_1, r_2, r_3 hanno valori maggiori, la molteplicità di O per la Jacobiana supera 3.

Supponiamo in secondo luogo che la curva C_3 non passi per O , e che O sia multiplo per tutte le curve del fascio (C_1, C_2) . Escluso il caso in cui questa molteplicità supera 2, nel quale $R > 3$, supporremo O doppio per tutte le curve del fascio ($r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = 0; m_1 = m_2 = 1, m_3 = 0$); il fascio (C_1, C_2) coincide col fascio (K_1, K_2) ; pel n° 7 il punto O in generale è doppio per la Jacobiana, e diventa triplo soltanto se C_1, C_2 hanno le stesse tangenti in O , ovvero, ciò che è lo stesso, se una delle curve del fascio, che può anche essere C_1 o C_2 , ha in O un punto triplo.

Supponiamo infine che la C_3 non passi per O , e che O sia un punto semplice per le curve del fascio (C_1, C_2) ; se O appartiene alla Jacobiana, in questo fascio (come è noto) vi è una curva con punto multiplo, scegliamola come curva C_1 . Escluso $r_1 > 4$, perchè allora $R > 3$, dobbiamo considerare: 1° $r_1 = 4, r_2 = 1, r_3 = 0$; il punto O è triplo per la Jacobiana; 2° $r_1 = 3, r_2 = 1, r_3 = 0, (m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2)$; per il n° 7 il punto O è in generale doppio per la Jacobiana, e diventa triplo se il gruppo $G_1 G_3^2$ coincide col gruppo G_2^3 , cioè se le tre tangenti di C_1 in O coincidono colla tangente di C_2 in O ; 3° $r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 0 (m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 1)$; pel n° 7 il punto O è in generale semplice per la Jacobiana, e diventa doppio se il gruppo $G_1 G_3$ coincide col gruppo G_2^2 , cioè se le due tangenti di C_1 in O coincidono colla tangente di C_2 in O ; affinchè diventi triplo occorre inoltre (n° 13) che la curva K^* del fascio (C_1, C_3, C_2^2) dotata di punto triplo in O abbia anch'essa le tre tangenti coincidenti colla tangente di C_2 , oppure che essa abbia un punto quadruplo in O .

Dalla discussione precedente si rileva:

a) Un punto O è doppio per la Jacobiana d'una rete soltanto in uno dei quattro casi seguenti:

1° O è un punto base della rete, semplice, a tangente mobile; e nella rete vi è una curva con punto *doppio* in O ;

2° O determina un fascio di curve, che tutte hanno ivi punto *doppio*, con almeno una tangente mobile;

3° O determina un fascio di curve, che hanno ivi un punto semplice e la tangente comune, ad eccezione d'una curva che ha in O un punto triplo, di cui le tre tangenti non coincidono tutte colla tangente comune alle altre curve del fascio;

4° O determina un fascio di curve, che hanno ivi punto semplice e la tangente comune, ad eccezione d'una curva per cui O è cuspidale, e tangente cuspidale è la tangente comune alle altre curve del fascio; escluse le ulteriori condizioni sotto indicate ai casi 6° e 7° per la presenza del punto triplo.

b) Affinchè un punto O sia triplo per la Jacobiana di una curva deve verificarsi uno dei sette casi seguenti :

1° O è un punto base della rete, semplice e a tangente fissa; o, ciò che val lo stesso, O è un punto base semplice per la rete, e doppio per un fascio di curve contenuto nella rete;

2° O è un punto base della rete, semplice, a tangente mobile; e nella rete vi è una curva con punto *triplo* in O ;

3° O determina un fascio di curve, che hanno in O un punto doppio colle tangenti fisse; o, ciò che val lo stesso, O determina un fascio di curve, che hanno in O un punto doppio, ad eccezione di una che ha ivi punto triplo;

4° O determina un fascio di curve, che hanno ivi punto semplice e la tangente comune, ad eccezione di una curva, che ha in O un punto quadruplo;

5° O determina un fascio di curve, che hanno ivi punto semplice e la tangente comune, ad eccezione di una curva che ha in O un punto triplo, di cui le tre tangenti coincidono tutte colla tangente comune alle altre curve del fascio;

6° O determina un fascio di curve, che hanno ivi punto semplice e la tangente comune, ad eccezione di una, C_1 , per cui O è cuspidale, e tangente cuspidale è la tangente comune alle altre curve del fascio; inoltre, se C_2 è una di queste curve, e C_3 è una curva della rete non passante per O , nel fascio determinato dalle curve composte C_1 , C_3 e C_2^2 vi è una curva, che ha in O punto quadruplo;

7° sono verificate le condizioni del caso 6°, con questa differenza che, nel fascio determinato dalle curve composte C_1 , C_3 e C_2^2 vi è una curva che ha in O un punto triplo, di cui le tre tangenti coincidono tutte colla tangente cuspidale di C_1 .

Viceversa, se sono verificate le condizioni indicate per ciascuno dei sette casi considerati, la molteplicità di O per la Jacobiana è $R \equiv 3$.

Palermo, dicembre 1893.

F. GERBALDI.
