25.

Beweis eines geometrischen Satzes.

(Von Hrn. Dr. *Ferd. Minding.*)

An eine krumme Fläche werde, in einer darauf befindlichen Curve A, eine abwickelbare Berührungsfläche angelegt, und hierauf die Curve abgewickelt. Es sei R der Krümmungshalbmesser der Curve A, in irgend einem Puncte, i die Neigung der Berührungsebene der Fläche gegen die Ebene des Krümmungskreises, ϱ der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve in dem entsprechenden Puncte; so findet bekanntlich zwischen den genannten drei Gröfsen eine sehr einfache Gleichung Statt, nämlich: $\varrho \cos i = R$.

Dieser interessante Satz kann auf folgende Art streng bewiesen werden:

Es seien $ab = ac\,[= ds]$ (Fig. 21.) zwei auf einander folgende unendlich kleine Elemente der Curve A, also bac die Ebene des Krümmungskreises; ferner sei ad der Durchschnitt der durch die beiden Elemente ab und ac gehenden Berührungsebenen der Fläche; mithin bad und dac diese Berührungsebenen. Man verlängere ba über a hinaus; es sei $\angle dac = \alpha$, $dae = \alpha + \varepsilon$, $cae = \beta$. Da β der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten der Curve A ist, so ist bekanntlich $R\beta = ds$. In der Ebene bad nehme man $\angle daf = dac = \alpha$, so ist $fae = \varepsilon$ der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten der abgewickelten Curve, und folglich $\varrho\varepsilon = ds$. Um den Punct a werde eine Kugel beschrieben, so bestimmen die drei Halbmesser ad, ae, ac ein sphärisches Dreieck dec, worin Seite $dc = \alpha$, $de = \alpha + \varepsilon$, $ec = \beta$, $\angle dec = i$ ist. Folglich hat man:

$$\cos\alpha = \cos(\alpha+\varepsilon)\cos\beta + \cos i \sin(\alpha+\varepsilon)\sin\beta,$$

oder, wenn man nach Potenzen der unendlich kleinen Gröfsen ε und β entwickelt, und nur die ersten beibehält: $0 = -\varepsilon\sin\alpha + \beta\sin\alpha\cos i$, mithin

$$\varepsilon = \beta\cos i,$$

oder, weil $\varepsilon = \frac{ds}{\varrho}$, $\beta = \frac{ds}{R}$ ist,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos i}{R},$$

w. z. b. w.
