Über ein Dreikant, dessen Seitensumme zwei Rechte beträgt.

Von L. Klug in Budapest.

1. Durch den Eckpunkt C des spitzwinkeligen Dreieckes ABC legen wir in der Weise die Gerade CD, daß die Winkel ACD, BCD mit den Winkeln α, β des Dreieckes bei den Scheiteln A, B gleich seien. Die Seiten des entstandenen Dreikants $C(ABD)$ stimmen daher überein mit den Winkeln des Dreieckes ABC, ihre Summe beträgt daher zwei Rechte.

Wählt man den Punkt D auf der Kante CD des Dreikants so, daß $CD = AB$, dann sind die Flächen CDA, DCB und BAD des Vierflachs $ABCD$ mit der Fläche ABC kongruent, so wie auch die vier Dreieckkanten in den Ecken, endlich sind nicht nur die Gegenkanten, sondern auch die Flächenwinkel bei denselben einander gleich.

Um eine Beziehung zwischen den Winkeln des Dreikants, oder was dasselbe ist, zwischen den Winkeln dieses gleichseitigen Vierflachs zu finden, legen wir die drei parallelen Ebenenpaare durch die Gegenkanten des Vierflachs. Dieselben bilden ein rechtwinkeliges Parallelepipedon (Fig. 1), denn die rechtwinkelige Projektion der Kanten des Vierflachs auf eine zu einem Gegenkantenpaare parallele Ebene ist ein Rechteck, da Gegenseiten und Diagonalen des Viereckes gleich sind. Die Flächen dieses Parallelepipedons halbieren die Außenwinkel des Vierkants. Daraus folgt aber, wenn die Winkel des Dreikants $C(ABD)$ bei den Kanten CA, CB und CD, φ, ψ und χ betragen, daß die Neigungswinkel der Fläche ABC des Vierkants $ABCD$ zu den in einer Ecke E des Parallelepipedons zusammenstoßenden Flächen desselben CBE, CAE und ABE bzw. $90^0 - \frac{\varphi}{2}$, $90^0 - \frac{\psi}{2}$ und $90^0 - \frac{\chi}{2}$ betragen, und daß daher $\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\chi}{2} = 1$ ist. Also:

Beträgt die Seitensumme eines Dreikants zwei Rechte, so besteht folgende Beziehung zwischen seinen Winkeln φ, ψ und χ:

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\chi}{2} = 1.$$

2. Um ein solches Dreikant aus seinen Seiten $\alpha\,\beta\,\gamma$ und seinen denen gegenüber liegenden Winkeln $\varphi\,\psi\,\chi$ zu bestimmen, braucht man nur zwei dieser Bestandteile. Hiebei haben wir bloß folgende drei Aufgaben:

Konstruktion des Dreikants

1. aus zwei Winkeln φ, ψ;
2. aus einer Seite und einem der anliegenden Winkel β, φ;
3. aus einer Seite und dem Gegenwinkel α, φ.

Wir betrachten die drei Aufgaben als gelöst, wenn wir ein Dreieck finden, dessen Winkel den Seiten des gesuchten Dreikants gleich sind.

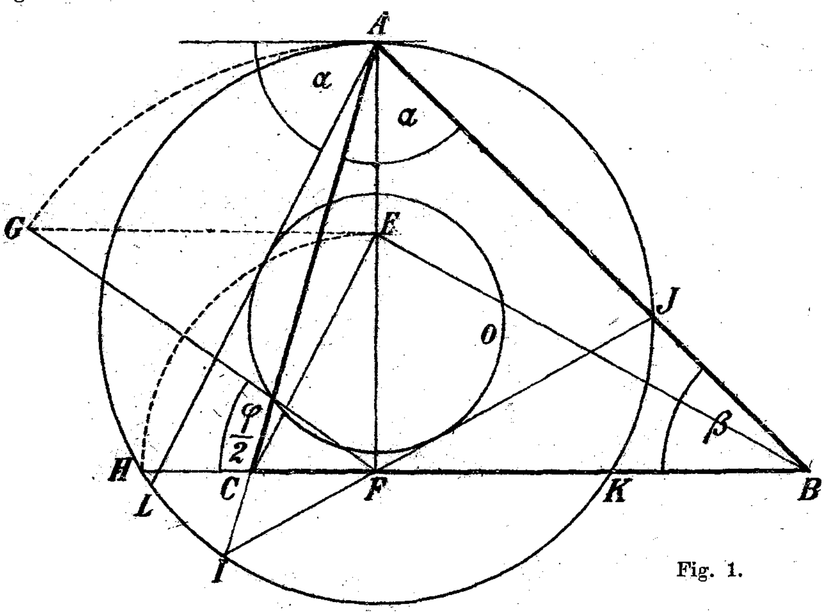

Fig. 1.

Konstruiert man eine schiefe Ebene, welche sich zu den Mongeschen zwei Bildebenen unter den Winkeln $90^0 - \frac{\varphi}{2}$, $90^0 - \frac{\psi}{2}$ neigt, so bilden die Spuren dieser Bildebenen und die Spur auf einer Seitenrißebene ein Dreieck, dessen Winkel mit den Seiten eines Dreikants übereinstimmen, dessen Winkel die gegebenen Winkel $\varphi\,\psi$ sind — und damit ist die 1. Aufgabe erledigt.

Um die 2. Aufgabe zu lösen, haben wir ein Dreieck ABC (oder ein damit ähnliches) aus folgenden Daten zu konstruieren: Die Seite BC ist parallel zur Bildebene; die Ebene desselben bildet mit dieser Bildebene den Winkel $90^0 - \frac{\varphi}{2}$, ein Winkel bei der Seite BC ist β, endlich muß die orthogonale Projektion des Dreieckes auf die Bildebene ein bei E rechtwinkeliges Dreieck EBC sein (Fig. 2).

Lösung (Fig. 2): Vom Punkte A des Schenkels AB vom Winkel $ABC = \beta$ fällt man die Senkrechte AF auf den anderen Schenkel BFC; ist $\sphericalangle\, CFG = \frac{\varphi}{2}$, $FG = FA$, $GE \perp AF$, $EC \perp BE$, dann ist ABC das Dreieck, dessen Winkel den Seiten des durch β und φ gegebenen Dreikants mit der Seitensumme 180^0 gleich sind.

Bei der 3. Aufgabe hat man zur Bestimmung des Dreieckes ABC folgende Daten: den Winkel α bei A; den Neigungswinkel

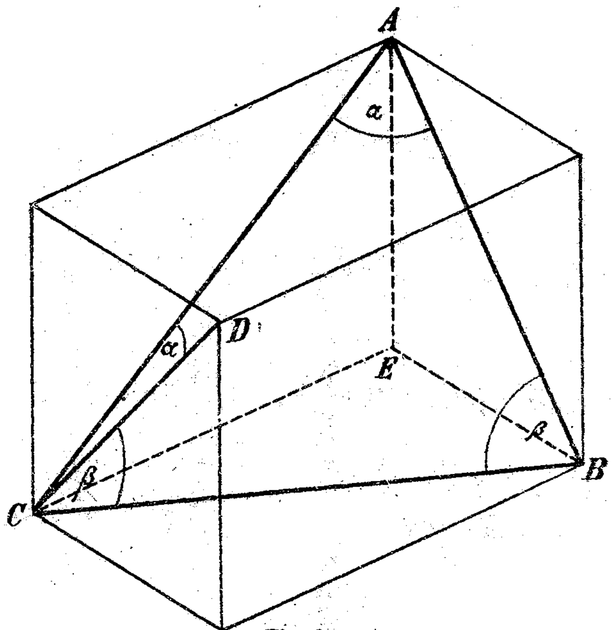

Fig. 2.

$90^0 - \frac{\varphi}{2}$ seiner Ebene zu einer mit der Gegenseite BC parallelen Bildebene; endlich die Bedingung, daß die orthogonale Projektion BEC des Dreieckes BAC auf diese Bildebene bei F rechtwinkelig sei (Fig. 2).

Lösung (Fig. 2): Durch den Halbierungspunkt E der Strecke HK zieht man die Geraden FG und FE so, daß $\sphericalangle\, HFG = \frac{\varphi}{2}$, $FE \perp HF$; $HF = FE$, $EG \perp FE$, $FA = FG$, wo A auf der Geraden FE liegt.

In dem Umkreis des Dreieckes HAK wird die Sehne AL so bestimmt, daß der Peripheriewinkel über ihr gleich sei α und der mit HAK konzentrische Kreis o so beschrieben, daß er die Sehne AL berühre. Legt man dann von F aus eine Tangente an o, so ist die Projektion ihrer Treffpunkte IJ aus dem Punkte A auf die Gerade HK: C und B, und ABC ist schon das gesuchte Dreieck.

Man sieht nämlich leicht, daß der Winkel $BAC = \alpha$ ist; ferner wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CIF, JFB ist

$$CF : FI = JF : FB,$$

daher

$$CF . FB = JF . FI = HF . FK = \overline{FE}^2$$

und also der Winkel CEB ein Rechter. Daraus folgt aber, daß ABC das gewünschte Dreieck ist, dessen Winkel mit den Seiten des durch die Daten der 3. Aufgabe bestimmten Dreikants übereinstimmen.

Die zweite Tangente aus F zu o gibt keine neue Lösung, doch hat die Aufgabe keine reelle Lösung, wenn $\operatorname{tg} \alpha < \sin \varphi$ ist.

Anmerkung. Die zwei letzteren Dreikantaufgaben kann man in dem Falle, daß $\varphi = 90^0$ ist, aus dem Umstande, daß dann die zur Seite BC gehörige Höhe AF des Dreieckes ABC im Höhenpunkt halbiert wird, etwas einfacher lösen.

3. Das Polardreikant des betrachteten Dreikants hat die Eigenschaft, daß die Winkelsumme gleich ist vier Rechten und daß zwischen den Seiten α', β', γ' die Relation

$$\cos^2 \frac{\alpha'}{2} + \cos^2 \frac{\beta'}{2} + \cos^2 \frac{\gamma'}{2} = 1$$

besteht. Da nun jede Diagonale eines orthogonalen Parallelepipedons sich zu den aus einem Eckpunkt ausstrahlenden Kanten unter solchen Winkeln $\frac{\alpha'}{2}$, $\frac{\beta'}{2}$, $\frac{\gamma'}{2}$ neigt, welche obiger Relation genügen, so bilden die übrigen drei Diagonalen desselben die Kanten eines Dreikants, dessen Winkelsumme vier Rechte beträgt. Daraus folgt umgekehrt:

Beliebige drei Diagonalen eines orthogonalen Parallelepipedons bilden die Kanten von vier Scheiteldreikanten; dasjenige desselben, in dessen Raume sich die vierte Diagonale befindet und also seine Schwerlinie ist, hat die Eigenschaft, daß seine Winkelsumme vier Rechte beträgt.

Fällt man von einem Endpunkte dieser vierten Diagonale die Senkrechten auf die Flächen des Dreikants, so bilden dieselben die Kanten eines Dreikants mit der Seitensumme von zwei Rechten.

Dieses Dreikant kann man aber auch unabhängig von anderen wie folgt konstruieren:

Schneidet man ein Dreibein $O(ABC)$ (Dreikant mit drei Rechten) mit einer Ebene in dem Dreiecke ABC und sind die Fußpunkte der vom Scheitel O auf die Seiten BC, CA und AB gefällten Senkrechten: $A_1 B_1$ und C_1, so beträgt die Seitensumme von $O(A_1 B_1 C_1)$ zwei Rechte. Das Vierflach $OA_1 B_1 C_1$ hat aber wegen der Relationen $A_1 B_1 . B_1 C_1 = \overline{OB}_1^2, \ldots$ die Eigenschaft, daß die Dreiecke $OA_1 B_1$, $C_1 OB_1$, $C_1 A_1 O$ ähnlich sind.

Will man daher über ein beliebiges Dreieck eine Pyramide errichten, dessen Seitenflächen ähnlich sind, so legt man durch die drei Außenwinkelhalbierenden desselben die drei paarweise aufeinander senkrechten Ebenen, ihr Schnittpunkt ist der Scheitel der Pyramide.