

2. *Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie;* *von R. J. Humm.*

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde ich auf die Vermutung geführt, daß die Einsteinschen Energiegleichungen als Bewegungsgleichungen anzusehen sind. Die Bestätigung dieser Vermutung gelang mir dadurch, daß ich von den einfachen Verhältnissen der gewöhnlichen Mechanik ausging und darin diejenige Formulierung und Interpretation des Energiesatzes suchte, die sich auf das allgemein-relativistische Problem übertragen läßt. Abgesehen von der Anzahl der unabhängigen Variablen herrscht zwischen beiden Problemen völlige Analogie; die Verallgemeinerung, die das zweite dem ersten gegenüber nachweist, ist kaum mehr als bloß formal, jedenfalls nicht derart, daß alle Überlegungen, die z. B. auf die Hamilton-Jacobischen oder den kanonischen Gleichungen führen, sich nicht direkt übertragen ließen. Auch die Frage nach den Energiegleichungen wird beim allgemeineren Problem dieselbe Behandlung erfahren, wie wir sie in der Mechanik vornehmen wollen.

Der Energiesatz der Mechanik wird für uns zu einem regulativen Prinzipie hinsichtlich des zeitlichen Ablaufes des Weltgeschehens, sowohl im einzelnen wie im ganzen, wie wir jetzt in einer etwas schwerfälligen, aber der Verallgemeinerung fähigen Weise begründen wollen.

1.

Bedeutet Θ die absolute Zeit und ξ_i , im einfachsten Falle, die Lageparameter eines bewegten Massenpunktes, so erhält man die Werte dieser ξ_i , ausgedrückt als Funktionen der Zeit, dadurch, daß man sie innerhalb eines Zeitabschnittes

1) R. J. Humm, Ann. d. Phys. 57. p. 68, als l. c. erwähnt.

um $\delta \xi_i$ variiert und dann die so entstehende Variation einer Funktion H

$$(1) \quad H = \int L \left(\frac{d\xi_i}{d\Theta}, \xi_i \right) d\Theta$$

gleich Null setzt:

$$(2) \quad \delta H = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_i} - \frac{d}{d\Theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) \delta \xi_i d\Theta = 0; \quad \dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{d\Theta}.$$

Die so gewonnenen Lagrangeschen Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{d}{d\Theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0$$

stellen uns dann den gewünschten Zusammenhang zwischen ξ_i und Θ dar.

Das Energieprinzip wird gewöhnlich aus diesen Gleichungen abgeleitet; bei dieser Ableitung kommt aber seine regulative Bedeutung nicht ganz zur Geltung wie bei einer Ableitung aus den Gleichungen (2) selbst, die mehr enthalten als die (3), da wir darin noch die Möglichkeit haben,* über die $\delta \xi_i$ ein Näheres auszusagen. Die Ableitung aus dem Variationsprinzip ist auch deshalb vorzuziehen, weil man bei solchen Prinzipien das Resultat viel genauer versteht, sofern man sich vorher klargemacht, wie man variieren soll; die Art des Variierens ist für die Bedeutung des Resultates charakteristisch.

Um unseren Gedanken in einem einfachen Falle durchzuführen, setzen wir $n = 1$ und denken uns in der (ξ, Θ) -Ebene eine Kurve C gegeben, die uns die Abhängigkeit der Funktion ξ von Θ angibt. Unter ξ können wir auch die Gesamtheit der Funktionen ξ_i verstehen. Dann denken wir uns im Raume ξ die Bahnkurve festgelegt — etwa durch das Jacobische Prinzip — und stellen durch ein Gesetz, das in unserem Falle beliebig sein darf, eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Bahnkurve und den Punkten längs der Zeitachse her. Dieses Gesetz sei z. B. dadurch festgelegt, daß wir längs der Bahnkurve gleiche Abstände a abtragen, dadurch Parallelen zur Θ -Achse ziehen und durch deren Schnittpunkte mit der Kurve C neue Parallelen zur ξ -Achse. Dadurch wird auf der Θ -Achse eine Folge von Punkten P_1, P_2, \dots ausgeschnitten, die kontinuierlich wird, wenn man $a \rightarrow 0$ konvergieren läßt. Die Tatsache nun, daß

der infinitesimale Abstand zweier Punkte P vom Parameter θ abhängt, drücken wir einfach durch den Satz aus: Die Punktfolge P ist eine Funktion $\bar{\theta}$ von θ .

In der Zeit θ liegt also eine gewisse Schar von Zeitpunkten, denen nach einem bestimmten Gesetze bestimmte Punkte der Bahnkurve zugeordnet sind. Die Funktion $\bar{\theta}(\theta)$ nennen wir die *Ablaufsfunktion*, denn jede Punktfolge ist ein Abbild des zeitlichen Ablaufes der Bewegung längs der Bahnkurve; sie zeigt uns an, wie die Bahnkurve durchlaufen wird.

Nun wollen wir diese Punktfolge variieren im Einklang mit dem Zuordnungsgesetz; wir sprechen dann von einer virtuellen Verrückung der Punkte P . Kommt nämlich *denselben* Punkte P eine neue Lage zu, die durch einen anderen Wert der Koordinate θ festgelegt ist, so soll diesem Punkte immer noch *derselbe* Wert der ξ , also derselbe Punkt der Bahnkurve zugeordnet sein, d. h. er soll den Wert von ξ mitgenommen haben; die Werte der Funktionen ξ_i sollen an den Punkten P_i gewissermaßen *haften*. Dies hat eine Verrückung der Kurve C zur Folge, die durch eine Verschiebung parallel zur Zeitachse zustande kommt. Die Bahnkurve im ξ -Raume bleibt dieselbe, so daß wir auch sagen können, wir hätten einfach ihrem zeitlichen Durchlauf oder den zeitlichen Verlauf der Bewegungen variiert.

In einem ins Auge gefaßten Zeitpunkte θ besitzt die Funktion ξ_i infolge dieser Verrückung den neuen Wert $\bar{\xi}_i$, der sich um $\delta_{\bar{\theta}}\xi_i$ von den früheren unterscheidet. Der Index $\bar{\theta}$ an δ soll bedeuten, daß die Variation induziert ist, und zwar durch eine Variation $\delta\bar{\theta}$ der Funktion $\bar{\theta}(\theta)$. Es liegt nun im Variationsprinzip (2) enthalten, daß man unter dem dort vorkommenden $\delta\xi_i$ die Variation von ξ_i an der Stelle θ verstehen soll; die $\delta\xi_i$ selbst sind aber vollkommen beliebig und brauchen nicht voneinander unabhängig zu sein. Indem wir darunter unsere induzierte Variation $\delta_{\bar{\theta}}\xi_i$ verstehen, lassen wir alle $\delta\xi_i$ von der einen Variation $\delta\bar{\theta}$ abhängen und werden infolgedessen auch eine einzige Variationsableitung bekommen, deren Verschwinden uns eine Gleichung für jene Funktion, die wir variiert hatten, also für die Ablaufsfunktion $\bar{\theta}(\theta)$ liefern wird. Diese Bestimmung von $\bar{\theta}(\theta)$ wird jedoch nur in gewissem Sinne eindeutig sein. Bevor man das Zuordnungs-

gesetz festgelegt hat, hängen nämlich die $\bar{\xi}_i$ und $\bar{\Theta}$ noch willkürlich zusammen: bei jeder Festlegung dieses Gesetzes hat man die ξ_i als bestimmte Funktionen von $\bar{\Theta}$ einzuführen und wird dann aus dem Variationsprinzip das zum betreffenden Gesetze zugehörige $\bar{\Theta}(\Theta)$ erhalten. Die Zuordnung, die wir als Beispiel wählten, ist allerdings die naheliegendste und natürlichste, da sie sich auf gleichentfernte Bahnkurvenpunkte bezieht.

Man darf diese virtuelle Verrückung der Punktfolge P nicht mit einer infinitesimalen Transformation der Zeitkoordinate verwechseln; denn erstens würden wir mit einer solchen Transformation aus dem Rahmen der mechanischen Invarianzverhältnisse herausfallen, und dann, auch abgesehen davon, wollen wir eben unter $\delta_{\bar{\Theta}} H$ nicht den Unterschied von H verstehen, wenn man einmal diese und einmal jene Zeitkoordinate verwendet, sondern wir wollen darin den Unterschied erblicken, der unter Beibehaltung derselben Zeitmessung sich ergibt, wenn wir die Durchlaufgeschwindigkeit innerhalb der etwa als Röhre aufgefaßten Bahnkurve variieren.

Unsere Aufgabe ist jetzt, die Abhängigkeit der Variation $\delta_{\bar{\Theta}} \xi_i$ von $\delta \bar{\Theta}$ zu finden, und dies geschieht in der einfachsten Weise. Nach der Variation nämlich kommt demselben Zeitpunkt Θ ein anderer Wert $\bar{\xi}_i$ von ξ_i zu. Der Wert ξ_i kommt einem Zeitpunkte Θ' zu, der um

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta}$$

von Θ entfernt ist. Von Θ' ausgerechnet ist demnach die Entfernung von Θ gleich $-\varepsilon$, und in dieser Entfernung hat ξ_i nach der Variation gemäß der abgebrochenen Taylorentwicklung den Wert

$$\bar{\xi}_i = \xi_i - \frac{d\xi_i}{d\Theta} \varepsilon = \xi_i - \frac{d\xi_i}{d\Theta} \frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta}.$$

Somit bekommen wir

$$(5) \quad \delta_{\bar{\Theta}} \xi_i = \bar{\xi}_i - \xi_i = - \frac{d\xi_i}{d\Theta} \frac{d\Theta}{d\bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta}.$$

Diesen Wert führen wir an Stelle von $\delta \xi_i$ in (2) ein und erhalten

$$\delta_{\bar{\Theta}} H = - \int \left[\frac{\partial L}{\partial \xi_i} \cdot \frac{d \xi_i}{d \Theta} - \frac{d}{d \Theta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) \frac{d \xi_i}{d \Theta} \right] \frac{d \Theta}{d \bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta} d \Theta = 0.$$

Wir addieren und subtrahieren

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} \cdot \dot{\xi}_i$$

innerhalb der Klammer; dann kommt, da L von Θ explicite nicht abhängt:

$$\int \left[\frac{d L}{d \Theta} - \frac{d}{d \Theta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \dot{\xi}_i \right) \right] \frac{d \Theta}{d \bar{\Theta}} \delta \bar{\Theta} d \Theta = 0.$$

Daraus folgt, wegen der Willkür von $\delta \bar{\Theta}$, sofern

$$\frac{d \Theta}{d \bar{\Theta}} \neq 0:$$

$$(6) \quad \frac{d E}{d \Theta} = 0, \quad E = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \dot{\xi}_i.$$

Der Fall

$$\frac{d \Theta}{d \bar{\Theta}} = 0$$

findet durch eine Transformation der ξ_i seine Erledigung. Gleichung (6) ist aber der Energiesatz, und die Funktion E ist die durch Legendresche Transformation der Lagrange'schen Funktion L entstandene Energiefunktion. Das Energieprinzip ist für uns eine Gleichung zur Bestimmung von $\bar{\Theta}$, und da diese Funktion ein Abbild des zeitlichen Verlaufes der Bewegung ist, können wir sagen: Nachdem wir die Gestalt der Bahnkurve gegeben haben, z. B. durch das Jacobi'sche Prinzip, tritt noch das Energieprinzip hinzu und regelt deren zeitlichen Durchlauf in der Weise, daß dieser weder rascher noch langsamer stattfinden darf, als es eben geschehen soll. Für unsere Zwecke werden wir die Bedeutung einer Gleichung für $\bar{\Theta}$ (Θ) in den Vordergrund halten, weil sich diese Auffassung auf das relativistische Problem verallgemeinern läßt.

2.

Bevor wir das eigentlich relativistische Gebiet betreten, wollen wir einen allgemeineren, einfachen Fall erledigen. Wir denken uns in einem vierdimensionalen Raume x_1, x_2, x_3, x_4 n Funktionen α_i gegeben, deren Gesamtheit wir

als α_i -Feld bezeichnen wollen, und zur Bestimmung dieser Funktionen ein Variationsproblem von der folgenden Form:

$$(7) \quad \delta H = \int A(\alpha_{i,n}, \alpha_i) d\omega = 0,$$

wo

$$\alpha_{i,n} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n}; \quad d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

ist. Aus (7) folgt:

$$(8) \quad \int \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{i,n}} \right) \delta \alpha_i d\omega = 0.$$

Genau so wie wir im mechanischen Falle vorgegangen sind, stellen wir zwischen den α_i — die wir auch die Lageparameter des Feldes nennen wollen und deren Wert wir uns im α_i -Raume durch eine gewisse Fläche (das Analogon zur Bahnkurve) festgelegt denken — und den Punkten des R_4 eine Beziehung her, indem wir den α_i eine κ -parametrische Schar von $F_{4-\kappa}$ zuordnen, in der Weise, daß die α_i bei einer Verrückung der ganzen Schar daran *haften* bleiben.¹⁾ Solche Zuordnung können wir uns beliebig viel ausdenken und können sie ebenso wie früher geometrisch deuten in einem $(n+4)$ -dimensionalen Raume; es würden dann die Kurven F_1 der Schar etwa als Schnittlinie des R_4 und einer Schar von n dimensional Flächen aufzufassen sein. Die Gleichungen der Kurvenschar seien $x_i = x_i(\xi_n)$; variieren wir ξ_n innerhalb eines begrenzten Gebietes des R_4 um $\delta \xi_n$ und lassen wir die n Variationen $\delta \alpha_i$ virtuell von den vier Variationen $\delta \xi_n$ abhängen, so werden sich aus (8) vier Gleichungen ergeben, welche uns die Kurvenschar bestimmen, und zwar werden wir verschiedene Kurvenscharen erhalten, je nach dem Zuordnungsgesetze, das zwischen den α_i und den ξ_n besteht. Die Variation $\delta_\xi \alpha_i$ hat den Wert

$$(9) \quad \delta_\xi \alpha_i = - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} \varepsilon_n,$$

wo ε_n der Abstand zwischen einem Punkte x_n und dem Punkte \bar{x}_n für den nach der Variation die Funktionen α_i denselben Wert haben wie vor der Variation in x_n . Es hängt ε_n mit $\delta \xi_i$ gemäß der Gleichung

$$(10) \quad \varepsilon_n = \frac{\partial x_n}{\partial \xi_i} \delta \xi_i$$

1) Wir haben hier $\kappa = 3$.

zusammen; wir können aber ε_n selbst als beliebig kleine und vollkommen willkürliche Größe auffassen. Aus (9) und (8) folgt

$$\delta_\varepsilon H = - \int \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_h} - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_{in}} \right) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_h} \right] \varepsilon_h d\omega = 0$$

und nach Addition und Subtraktion von

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_{in}} \alpha_{ihn}$$

unter der Klammer kommt, sofern A die x_n explizite nicht enthält:

$$(11) \quad \int \left[\frac{\partial A}{\partial x_h} - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_{in}} \alpha_{ihn} \right) \right] \varepsilon_h d\omega = 0,$$

d. h. wegen der Willkür von ε_n :

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \left(A \delta_h^n - \frac{\partial A}{\partial \alpha_{in}} \alpha_{ihn} \right) = 0.$$

Diese Gleichungen von Divergenzcharakter stellen uns das zu der Lagrangeschen Funktion A gehörige *Energieprinzip* dar, und die 16 Funktionen:

$$(13) \quad E_h^n = \frac{1}{2} \left(A \delta_h^n - \frac{\partial A}{\partial \alpha_{in}} \alpha_{ihn} \right),$$

die zu A gehörigen *Energiekomponenten* des Feldes α_i , die, wie wir sehen, durch eine verallgemeinerte Legendresche Transformation aus A entstehen.

3.

Und nun gehen wir zur Relativitätstheorie über und untersuchen, wie sich darin die Verhältnisse gemäß der speziellen Besonderheiten des Problems ändern. Wir setzen $n = 14$ und verstehen unter den α_i die 10 Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ und die 4 elektrodynamischen Potentiale q_s . Als Lagrangesche Funktion A nehmen wir:

$$(14) \quad \mathfrak{L}(g^{\mu\nu}, g_h^{\mu\nu}, q_s, q_{,h}) = \mathfrak{R}^*(g^{\mu\nu}, g_h^{\mu\nu}) + \mathfrak{M}(g^{\mu\nu}, q_s, q_{,h}).$$

Wir stellen uns vor, daß deren Feld von dem Verlaufe einer dreiparametrischen Linienschar $x_i = x_i(\xi_n)$ abhängt, die wir die Weltlinien der Materie oder die *materiellen Weltlinien* bezeichnen wollen. Die Gesetze, die diese Weltlinien mit den Potentialen verbinden, kennen wir nicht, und wir brauchen

sie auch nicht zu kennen für unsere Zwecke¹⁾; es genügt uns bloß zu wissen, daß sie nicht wie unter 2. willkürliche, sondern eindeutige Zuordnungen, der Feldkomponenten zu diesen Weltlinien sind, in der Weise, daß sich diese Linienschar von jeder anderen, die man sich in der Welt x_1, x_2, x_3, x_4 denken kann, auszeichnen, und daß bei einer virtuellen Verrückung der Schar die Feldkomponenten in einer der Zuordnung gemäßen Weise daran haften.

Wir stellen also zwischen der im Raume der $g_{\mu\nu}, q_s$ (etwa vermöge eines Analogons zum Jacobischen Prinzip) als gegeben betrachteten Konstellation der Funktionen $g_{\mu\nu}, q_s$ und den Punkten des Raumes x_i vier intermediäre Funktionen $\xi_\mu = \xi_\mu(x_i)$ auf, so daß ξ_i und $g_{\mu\nu}, q_s$ in eindeutiger und allerdings nicht näher bekannter Weise abhängen. Wir denken uns im Variationsproblem alles als Funktion dieser ξ_i ausgedrückt, variieren diese dann als Funktionen der x_μ , in der Weise, daß die Abhängigkeit von den Feldparametern nicht gestört bleibt, und bekommen vier Gleichungen zu ihrer Bestimmung. Wir suchen also die Gleichungen der materiellen Weltlinien ohne deren Abhängigkeit vom Felde explicite anzugeben, und werden sonach Gleichungen bekommen, die diesen Verlauf nur implicite enthalten, genau wie das mechanische Energieprinzip nur implicite die Ablaufsfunktionen enthält. Näheres werden wir nicht angeben können, solange wir das Zuordnungsgesetz, das uns auf den aus den Feldern konstruierten Begriff der Materie²⁾ führen wird, nicht haben.

Dadurch, daß wir früher³⁾ in der Zuordnung des Feldes zu den Weltlinien einen Schritt weitergingen, indem wir nämlich der Weltlinienschar eine ebensoviel parametrische Schar von inneren Feldern zuordneten (anstatt jener Feldwerte, die sich auf deren Verlauf befinden und die erst durch Superposition der inneren Felder entstehen), sind wir auf den Begriff der gravitoelektromagnetischen Masse gekommen, in dem sich vielleicht derjenige der ponderablen Materie erschöpft. In unserem Zusammenhange müssen wir mehr an der Oberfläche bleiben und eine Variation vornehmen, die derjenigen gleich-

1) Man kann sie bloß näherungsweise in ganz einfachen Fällen angeben.

2) l. c. p. 79.

3) l. c. p. 75 und 78.

kommt, die wir unter 4. (l. c. p. 74) an erster Stelle erledigten.¹⁾

Eine virtuelle Verrückung der Weltlinien ist jedoch wohl zu unterscheiden von einer infinitesimalen Koordinatentransformation; denn diese ändert an den Invarianzverhältnissen nicht das geringste, wohl aber eine virtuelle Verrückung. Nehmen wir in der Tat eine solche um die Entfernung ε vor, dann haben die Weltlinien in der verrückten Lage die Werte $g_{\mu\nu}$ mitgeführt: Durch eine die Invarianz nicht beeinträchtigende Koordinatentransformation $x' = x - \varepsilon$ bekommt die verrückte Weltlinienschar ihre ursprünglichen Koordinatenwerte wieder; aber die $g_{\mu\nu}$ haben sich geändert in $g'_{\mu\nu}$; die daraus gebildeten Invarianten sind also nicht dieselben. Die Weltlinienscharen haben verschiedene Maßverhältnisse.²⁾

Nehmen wir die Verrückung vor, so führt uns die spezielle Gestalt des relativistischen Problems auf eine Schwierigkeit. Wir haben unter 2. alle α_i gleichmäßig behandelt; hier aber zerfallen sie in zwei scharf geschiedene Gruppen in den 10 $g_{\mu\nu}$ und in 4 q_s , von denen die $g_{\mu\nu}$ die metrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit bestimmen, während die q_s gewissermaßen darin eingebettet sind. Um die richtige Einsteinsche Energie zu bekommen, müssen wir unter dem Mitgenommensein des Vektors q_s durch die Weltlinie bei der Verrückung eine etwas andere Annahme machen.

Die Variation der $g^{\mu\nu}$ setzen wir genau so an, wie jene der α_i , nämlich

$$(15) \quad \delta_{\xi} g^{\mu\nu} = - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_h} \varepsilon_h, \quad \varepsilon_h = \frac{\partial x_h}{\partial \xi_{\alpha}} \delta \xi_{\alpha}.$$

Daraus folgt nach (11) für den Anteil \mathfrak{R}^* der Lagrange-schen Funktion:

1) Wir sagten dort, daß das elektromagnetische Feld unverändert bleibt; in Wirklichkeit wird es mitgenommen. Wir durften aber so sagen, weil wir eine entsprechende Variationsauffassung hatten. Dort bedeutet δ den Unterschied der Werte zwischen verrücktem und unverrücktem Kurvenpunkt — hier verstehen wir aber darunter den Unterschied vor und nach der Variation in demselben Weltpunkte. Die Integration schafft das gleiche Resultat (vgl. etwa K. Schwarzschild, Gött. Nachr. 1903, p. 129).

2) Darin unterscheidet sich diese Verrückung auch von derjenigen von H. Weyl (Ann. d. Phys. 54. p. 121).

$$(16) \quad \delta \int \mathfrak{R}^* d\omega = \int \frac{\partial t_h^*}{\partial x_n} \epsilon_h d\omega,$$

wo

$$(17) \quad t_h^* = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{R}^* \delta_h^* - \frac{\partial \mathfrak{R}^*}{\partial g_{\mu\nu}} g_h^{\mu\nu} \right)$$

ist. Das ist aber der bekannte Energiepseudotensor des Gravitationsfeldes.

Nehmen wir auch für die q_s eine Variation von der Art (9) vor, so bekommen wir für den elektromagnetischen Energieanteil einen Ausdruck, der nur innerhalb der projektiven Gruppe mit dem von Einstein gegebenen übereinstimmt. Um die richtige Energie zu bekommen, müssen wir die Variation des Vektors q so vornehmen, daß q in bezug auf die Weltlinie derselbe bleibt, d. h., daß das skalare Produkt $q \cdot dx$ bei der Verrückung erhalten bleibt.¹⁾ Dies bedeutet: Ist q_s der Wert der s -ten Komponente von q im Punkte $x_n(\xi_i)$ vor der Verrückung, und \bar{q}_s der Wert im Punkte $x(\xi_i) = x_n + \epsilon_n$ nach der Verrückung, so soll

$$(18) \quad q_n dx_n = \bar{q}_n d\bar{x}_n$$

sein. Setzen wir

$$\bar{q}_s = q_s + \delta q_s,$$

so bekommen wir für δq_s den Wert

$$\delta q_s = -q_n \frac{\partial \epsilon_n}{\partial x_s}.$$

Nach der Verrückung ist der Wert von q_s im Punkte x gegeben durch

$$\bar{q}_s = \bar{q}_s - \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x_h} \epsilon_h$$

und somit ist

$$(19) \quad \bar{q}_s - q_s = \delta q_s = -\frac{\partial q_s}{\partial x_h} \epsilon_h - q_h \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x_s}.^{2)}$$

Dabei haben wir alle Glieder höherer Ordnung in ϵ_h weggelassen, da uns später nur der Koeffizient von ϵ_h interessieren wird.

1) Das ist nicht selbstverständlich, da wir es nicht mit Koordinatentransformation zu tun haben.

2) Diese Variation von q_s finde ich auch bei F. Klein, Gött. Nachr. 1917. p. 469. Formel (13).

Für den Teil \mathfrak{M} der Lagrangeschen Funktion ergibt sich

$$(20) \quad \delta \int \mathfrak{M} d\omega = \int \delta \mathfrak{M} d\omega = \int \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \right) \delta q_i \right] d\omega.$$

Wir rechnen jetzt die eckige Klammer um, dabei alle Glieder von Divergenzcharakter, denen wir begegnen werden, einfach weglassend, da sie ausintegriert Null geben, wegen des Verschwindens der Variationen am Rande. Wir erhalten

$$\underbrace{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} g_{\sigma}^{\mu\nu} \epsilon_{\sigma}}_1 + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_i} q_{i\sigma} \epsilon_{\sigma}}_2 + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_i} q_{\sigma} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i}}_3 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \right) M_{\sigma i} \epsilon_{\sigma}}_4 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \right) \frac{\partial (q_{\sigma} \epsilon_{\sigma})}{\partial x_i}}_5.$$

$$3. = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_i} q_{\sigma} \right) \epsilon_{\sigma}.$$

$$\begin{aligned} 4. + 5. &= - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ni}} \right) M_{\sigma i} \epsilon_{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \right) \frac{\partial (q_{\sigma} \epsilon_{\sigma})}{\partial x_i} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ni}} M_{\sigma i} \right) \epsilon_{\sigma} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ni}} \frac{\partial M_{\sigma i}}{\partial x_n} \epsilon_{\sigma} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \frac{\partial^2 (q_{\sigma} \epsilon_{\sigma})}{\partial x_i \partial x_n} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ni}} M_{\sigma i} \right) \epsilon_{\sigma} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \left[\frac{\partial M_{\sigma i}}{\partial x_n} \epsilon_{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(q_{\sigma i} \epsilon_{\sigma} + q_{\sigma} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ni}} M_{\sigma i} \right) \epsilon_{\sigma} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \left(\frac{\partial q_{i\sigma}}{\partial x_n} \epsilon_{\sigma} - \frac{\partial q_{\sigma i}}{\partial x_n} \epsilon_{\sigma} + \frac{\partial q_{\sigma i}}{\partial x_n} \epsilon_{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + q_{\sigma i} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_n} + q_{\sigma n} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i} + q_{\sigma} \frac{\partial^2 \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i \partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} q_{\sigma i} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_n} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} q_{\sigma n} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} q_{\sigma i} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_n} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} q_{\sigma n} \frac{\partial \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i} = 0.$$

Somit

$$4. + 5. = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ni}} M_{\sigma i} \right) \epsilon_{\sigma}}_A + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} \frac{\partial q_{in}}{\partial x_{\sigma}} \epsilon_{\sigma}}_B + \underbrace{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{in}} q_{\sigma} \frac{\partial^2 \epsilon_{\sigma}}{\partial x_i \partial x_n}}_C.$$

Nun aber ist

$$1. + 2. + B. = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_o} \varepsilon_o.$$

Also ist, sofern wir in einem bestimmten Koordinatensystem

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_o}{\partial x_i \partial x_n} = 0$$

setzen (eine linear-invariante Beziehung die sich mit den anderen Bedingungen für ε_o verträgt):

$$(22) \quad \delta \int \mathfrak{M} d\omega = - \int \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathfrak{M} \delta_o^k - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_k} q_o - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ik}} M_{i,o} \right) \varepsilon_o d\omega.$$

Diese Beziehung gibt uns also den elektromagnetischen Energieanteil zu

$$(23) \quad \mathfrak{X}_h^k = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{M} \delta_h^k - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_k} q_h - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial M_{ih}} M_{i,h} \right).$$

Nach einer von Hilbert¹⁾ angegebenen Formel läßt sich dafür der Ausdruck

$$(24) \quad \mathfrak{X}_h^k = - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu h}} g^{\mu k}$$

finden, der mit dem bekannten übereinstimmt.

Wir sind somit auf die Gleichung

$$(25) \quad \int \frac{\partial (\mathfrak{X}_n^k + \mathfrak{I}_n^k)}{\partial x_k} \varepsilon_n d\omega = 0.$$

geführt worden, welche die erste von einer unendlichen Reihe von Gleichungen ist, die sich ergeben würden, wenn in (15) und (19) die vollständigen Taylorentwicklungen stehen würden. Aus (25) folgen die Einsteinschen Energiegleichungen:

$$(26) \quad \frac{\partial (\mathfrak{X}_h^k + \mathfrak{I}_h^k)}{\partial x_k} = 0.$$

Die virtuelle Verrückung, die wir vorgenommen haben, entspricht derjenigen, die l. c. unter 4. an erster Stelle behandelt wurde, und die uns zum d'Alembertschen Prinzip der Elektrodynamik, wonach die virtuelle „Arbeit“ der Gesamtkräfte verschwindet, führte. Dasselbe bedeutet auch Gleichung (25), während (26) bedeutet, daß die Gesamtkräfte

1) Gleichungen (18) und (19) in „Die Grundlagen der Physik, 1. Mitteilung“. Göttinger Nachr. 1915.

selbst verschwinden, daß also die Kräfte des Gravitations- und des elektromagnetischen Feldes sich an jeder Stelle vernichten.

Beim elektromagnetischen Felde sind wir gezwungen worden, die virtuellen Bedingungen durch die Forderung (18) in einer Hinsicht zu präzisieren und durch (21) einzuschränken; der Unterschied zwischen mechanischem und allgemein relativistischem Problem liegt also nur in den Bedingungen für die virtuelle Verrückung. Warum wir so verrücken müssen, können wir a posteriori begründen: es muß nämlich die von Einstein angegebene Energie herauskommen. A priori aber müssen wir offen zugeben, es noch nicht zu verstehen; denn wir wissen noch nicht, was wir uns unter dem elektromagnetischen Felde vorstellen sollen. Während durch den Gedanken der allgemeinen Invarianz die Parameter des Gravitationsfeldes festgelegt sind und eine anschauliche Bedeutung erhalten haben, besitzen wir für die elektrischen Parameter keinen ähnlichen Gedanken. Wir sagen, es seien Vektoren; aber deren innere geometrische Bedeutung, deren geometrische Fixierung geht uns noch ab. A priori können wir die Bedingungen, wie sie von den Weltlinien mitgenommen werden, nicht angeben. Die Tatsache, die in der Formel (18) ihren Ausdruck findet, läßt uns auf einen sehr innigen Zusammenhang zwischen materieller Weltlinie und elektromagnetischem Felde schließen, da er durch die Verrückung nicht gestört werden darf.

Es ist interessant, zu sehen, daß, wenn wir den historischen Weg Mechanik—Elektrodynamik—Gravitation mitmachen, wir Schwierigkeiten haben, die Gravitationsenergie zu verstehen, da uns diese *experimentell* ferner liegt, während der aus Prinzipien in umgekehrtem Sinne verlaufende Weg uns sofort die richtige Gravitationsenergie liefert und uns bei der elektromagnetischen Energie Schwierigkeiten bereitet, weil diese den *Prinzipien* ferner steht. Wir wollen auf diese Dinge nicht näher eingehen; uns genügt es hier, den Zusammenhang zwischen Energiegleichungen und materiellen Weltlinien hervorgehoben zu haben.

Göttingen, den 24. August 1914.

(Eingegangen 1. September 1918.)