Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

1. In dem endlichen Intervalle (a, b) sei eine beliebige Punktmenge x' definirt. Nun betrachte man ein System von Theilungen dieses Intervalles von der Art, dass jede durch Zerlegung der in der vorausgehenden vorkommenden Theilintervalle von (a, b) entsteht und zwar nach einem solchen Gesetze, dass von einer bestimmten Theilung $\mathfrak{T}_m$ angefangen alle folgenden das gegebene Intervall (a, b) in Theile zerlegen, deren jeder kleiner ist als eine vorgegebene Zahl δ. Führt man im Intervalle (a, b) ein System von unbegrenzt vielen solchen Theilungen: $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n, \ldots$ aus und zählt nach jeder Theilung diejenigen Intervalle zusammen, die Punkte der gegebenen Menge x' enthalten, so erhält man Streckensummen $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, welche der Relation genügen $S_1 \geqq S_2 \geqq \cdots \geqq S_n$. *Demnach existirt ein endlicher Grenzwerth* $\lim_{n=+\infty} S_n = L$, *wobei* $L \geqq 0$. Zugleich ist $S_n \geqq L$.

2. Die soeben definirte Zahl L ist von dem betrachteten Systeme von Theilungen $\mathfrak{T}_n$ unabhängig, so dass *zu jeder im Intervalle* (a, b) *befindlichen Punktmenge* x' *eine bestimmte Zahl* $L \geqq 0$ *gehört, welche ihre Intervallgrenze heissen mag.*

Wendet man anstatt des Systemes $\mathfrak{T}_n$ ein anderes von denselben Eigenschaften: $\mathfrak{T}_n'$ an, so ergiebt sich damit auf dem oben bezeichneten Wege eine Zahl $L' \geqq 0$, von der gezeigt werden kann, dass sie gleich L ist. Durch Vereinigung der Theilungen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_1'$; $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_2'$; $\ldots$; $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ erhält man ein drittes System von Theilungen $\mathfrak{T}_n''$ mit dem Grenzwerthe L''. Dabei ist $S_n \geqq S_n''$, also $L \geqq L''$. Da $\lim S_n'' = L''$ ($\lim n = +\infty$), so existirt eine bestimmte Theilung $\mathfrak{T}_m''$, so dass

$$(1) \qquad L'' + \varepsilon > S_m'',$$

wie klein auch die positive Zahl ε sein mag. Die Theilung $\mathfrak{T}_m''$, welche sowohl die Theilpunkte von $\mathfrak{T}_m$ als auch die von $\mathfrak{T}_m'$ enthält, möge im Ganzen p Intervalle MN liefern, die Punkte der Menge x' enthalten.

Ihre Summe ist eben S''_m. Construirt man in (a, b) noch die Punkte der Theilungen $\mathfrak{T}_{m+1}, \mathfrak{T}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{T}_{m+r}$, so ergeben sich wieder diejenigen Intervalle, deren Summen oben mit $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots, S_{m+r}$ bezeichnet sind. Da ausserhalb der Intervalle MN kein Intervall der Summe S_{m+r} fallen kann, so folgt unmittelbar, wenn Δ_{m+r} das grösste Intervall, welches nach Ausführung der Theilung $\mathfrak{T}_{m+r}$ in (a, b) noch vorhanden ist, bedeutet:

$$S''_m + 2p\,\Delta_{m+r} > S_{m+r} \geqq L$$

und nach (1)

$$L'' + \varepsilon + 2p\,\Delta_{m+r} > L.$$

Nimmt man r so gross, dass

$$2p\,\Delta_{m+r} < \varepsilon,$$

so folgt

$$L'' + 2\varepsilon > L \geqq L''$$

und somit $L'' = L$. Ebenso erschliesst man $L'' = L'$ somit $L = L'$.

3. Denkt man sich das Intervall (a, b) in beliebig viele Theile $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ getheilt, und die Summe S derjenigen gebildet, welche Punkte der Menge x' enthalten; so erscheint S als Function der Veränderlichen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ in unbegrenzter Anzahl, die mit Ausnahme der Relation

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k = b - a \qquad (b > a)$$

von einander völlig unabhängig sind. Man sagt, eine solche Function nähert sich bei unbegrenzter Abnahme der δ_r einem endlichen Grenzwerthe L, falls zu jeder beliebigen positiven Zahl ε eine Zahl Δ gehört in der Art, dass immer $| S - L | < \varepsilon$, wenn nur jedes der Intervalle δ_r kleiner ist als Δ*).

Auch in dem hier betrachteten Falle hat man $\lim S = L$ für $\lim \delta_r = 0$. Es ist zweckmässig, bei dem Beweise dieses Satzes den Satz von Nr. 2 nicht als bekannt vorauszusetzen. Wir nehmen demnach nur an, dass der *einem* bestimmten Systeme von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$ entsprechende Grenzwerth L vorhanden sei, so dass für $n > m$

(2) $$L \leqq S_n < L + \varepsilon.$$

Die Anzahl der in S_n zusammengefassten Intervalle der Theilung $\mathfrak{T}_n$ sei p_n, das kleinste der durch sie gelieferten Intervalle sei E_n, das grösste Δ_n. Für die zunächst beliebige Theilung $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ sollen p, E, Δ die analoge Bedeutung haben. Indem man n so gross nehmen kann, dass $\Delta_n \leqq \mathsf{E}$, so folgt, dass jedes der Intervalle in S_n entweder vollständig innerhalb eines der in S vorkommenden liegt oder doch nur mit *einem* Ende über ein solches Intervall hinausragt. Es ist demnach sicher

(3) $$S_n < S + 2p\,\Delta_n$$

*) Vgl. diese Annalen Bd. XVIII, p. 270.

d. i. da Δ_n beliebig klein sein kann $L < S + \varepsilon$, also $L \leqq S$. Nehmen wir nunmehr an, dass $\Delta \leqq \mathsf{E}_n$, so ergiebt sich auf die nämliche Art

$$S < S_n + 2p_n\Delta \tag{4}$$

und nach (2)

$$0 \leqq S - L < \varepsilon + 2p_n\Delta.$$

Nimmt man n so gross an, dass (2) besteht und macht Δ so klein, dass sowohl $\Delta \leqq \mathsf{E}_n$ als auch $2p_n\Delta < \varepsilon$ gilt, so folgt schliesslich, was zu beweisen war:

$$0 \leqq S - L < 2\varepsilon.$$

4. Diejenigen Punktmengen wozu der Grenzwerth $L = 0$ gehört, stimmen überein mit den von Herrn A. Harnack als *discret* bezeichneten Mengen*). Nach seiner Definition lassen sich die Punkte einer discreten Menge in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen, deren Summe $S < \varepsilon$. Es ist somit $L < \varepsilon$ d. i. $L = 0$.

Falls $L > 0$, kann man die Punktmenge nach Hrn. Harnack's Vorschläge passend als eine *lineare* bezeichnen. Unter denselben sind die in allen Theilen des Intervalles (a, b) überall-dichten Punktmengen durch den Grenzwerth $L = b - a$ charakterisirt.

5. Es ist offenbar, dass die in Nr. 1 angestellte Betrachtung auch auf *Punktmengen, die in einem ebenen, von einfachen Rändern begrenzten endlichen Flächenstücke* $\mathfrak{F}$ *sich befinden*, ausgedehnt werden kann. Wir schliessen $\mathfrak{F}$ durch gerade Linien ein, theilen dieses Polygon in *geradlinig begrenzte Zellen* und bilden die Summe derjenigen Zellen, welche Punkte der gegebenen Menge enthalten. Dann wird jedem Systeme von Theilungen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$, deren jeder Theilchen stets in einem Theile der vorhergehenden vollständig enthalten sind, ein endlicher Grenzwerth L entsprechen: $\lim\limits_{n=+\infty} S_n = L$.

Nun ist zu zeigen, dass wenn $\mathfrak{F}$ auf beliebige Weise in Theile $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ zerlegt wird, die Summe S derjenigen Flächenstücke, welche Punkte der Menge enthalten, bei abnehmenden Δ_t einem endlichen Grenzwerthe $L \geqq 0$ zustrebe, welche man die *Flächengrenze der ebenen Punktmenge* nennen mag.

Würde man die Theile Δ_t durch Parallele zu zwei festen Geraden herstellen, so dass $\Delta_t| = \delta_r\, \varepsilon_s \sin\omega$, so wäre nachzuweisen, dass jeder positiven Zahl ε Zahlen Δ, E zugeordnet werden können, in der Art, dass $|S - L| < \varepsilon$ wenn nur alle $\delta_r < \Delta$, und alle $\varepsilon_s < \mathsf{E}$. Es ist nicht schwierig, diesen Satz zu zeigen. Wir wollen aber etwas allgemeiner verfahren, indem wir bezüglich der Zellen Δ_t nur voraussetzen, dass sie gewöhnliche Polygone seien. Um auszudrücken, dass dieselben

*) Vergl. diese Annalen Bd. XIX, p. 238. — Herr P. du Bois-Reymond nennt sie „integrabel" (Allg. Functionentheorie I, p. 190) und erwähnt a. a. O., dass solche Punktmengen dem Satze in Nr. 2 genügen.

nach den beiden Dimensionen der Ebene unendlich klein werden, lassen wir den grössten Abstand b_t zweier Punkte des Umfanges der Zelle Δ_t unter jede Grösse sinken. Der Kürze halber mag die Länge b_t, die entweder eine Diagonale oder eine Seite des Polygones Δ_t sein muss, als die grösste Sehne desselben bezeichnet werden. Man wird leicht bemerken, dass die Fläche Δ_t jedenfalls kleiner ist als ein Quadrat von der Seite $b_t : \Delta_t < b_t^2$. Es soll nun gezeigt werden, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\beta > 0$ entspricht in der Art, dass $| S - L | < \varepsilon$, *wenn nur die Theile Δ_t gewöhnliche Polygone sind, deren grösste Sehne kleiner als β ist.*

Ausgehend, wie in Nr. 3, von dem Grenzwerthe L, welcher *einem* Systeme von Theilungen $\mathfrak{T}_n$ entspricht, kann man wieder die Relation (2) ansetzen. Es seien ferner B_n die grösste Sehne aller durch die Theilung $\mathfrak{T}_n$ hervorgebrachten Stücke, E_n das kleinste unter ihnen, p_n die Anzahl der in S_n eintretenden Zellen, Q_n der Gesammtumfang derselben. Bezüglich einer zunächst willkürlichen Theilung $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k)$ haben B, E, p, Q die analoge Bedeutung, während q_t den Umfang einer Zelle Δ_t bezeichnen soll. Nimmt man n so gross an, dass sämmtliche der Theilung $\mathfrak{T}_n$ entsprechenden Stücke E an Grösse nicht übertreffen, so wird jedes derselben entweder völlig innerhalb eines der Stücke Δ_t liegen oder in ein, vielleicht auch in mehrere Δ_t eintreten, in keinem Falle aber zwei derselben vollständig überziehen. Es ist ferner klar, dass keine in S_n vorkommende Zelle ganz ausserhalb aller in S zusammengefassten Zellen Δ_t liegen kann und umgekehrt. — Von dem aus Theilen von Zellen, die zur Theilung $\mathfrak{T}_n$ gehören, gebildeten Saume, der eine Zelle Δ_t umgiebt, kann man behaupten, dass er unter der Grenze $\mathsf{B}_n q_t + \pi B_n^2$ liegt.*) Mithin ergiebt sich sofort die Relation

$$(5) \qquad S_n < S + \mathsf{B}_n Q + \pi p \mathsf{B}_n^2,$$

und daraus nach (2) $L < S + \varepsilon$, da B_n beliebig klein gemacht werden kann. Es ist somit $L \leqq S$.

Setzt man nunmehr voraus, dass sämmtliche $\Delta_t \leqq \mathsf{E}_n$ seien, so kann man auf dieselbe Art schliessen:

$$(6) \qquad S < S_n + \mathsf{B} Q_n + \pi p_n \mathsf{B}^2,$$

und ferner nach (2)

$$0 \leqq S - L < \varepsilon + \mathsf{B} Q_n + \pi p_n \mathsf{B}^2.$$

Hat man nun n so gross angenommen, dass die Relation (2) gilt, und

---

*) Um das einzusehen, denke man sich über den Seiten eines *convexen* Polygones Δ_t nach *aussen* Rechtecke von der Höhe B_n errichtet und verbinde ihre ausserhalb der Zelle Δ_t liegenden Ecken durch Kreisbögen vom Radius B_n, welche von den Ecken der Zelle zu beschreiben sind. — Die Relation gilt übrigens auch, falls das Polygon Δ_t nicht convex ist.

denkt sich B so klein, dass sowohl $\Delta_t < \mathsf{B}^2 < \mathsf{E}_n$ als auch $\mathsf{B}\, Q_n + \pi p_n \mathsf{B}^2 < \varepsilon$ sind, so folgt, wie oben, $0 \leqq S - L < 2\varepsilon$.*)

Ist die Flächengrenze L gleich Null, so wird die Punktmenge als *discret***); falls $L > 0$, als *eben* bezeichnet werden können.

6. Die Theilungen des Gebietes $\mathfrak{F}$ werden meist durch zwei Curvensysteme bewerkstelligt. Bezeichnen x, y Parallelcoordinaten, so setzt man

$$x = \varphi(p, q), \qquad y = \psi(p, q),$$

wobei p, ψ stetige Functionen von p, q sein sollen. Jedem Werthsysteme p, q entspricht *ein* System x, y und umgekehrt, so dass an Stelle des Gebietes $\mathfrak{F}$ ein anderes $\mathfrak{G}$ in p, q gesetzt werden kann. Die Paare p, q; $p + \Delta p, q$; $p, q + \Delta q$; $p + \Delta p, q + \Delta q$ bestimmen ein Viereck $M\,M'\,M''\,M'''$. Damit die Seiten und Diagonalen desselben unter einer Zahl β liegen, braucht man nur für $|\Delta p|$, $|\Delta q|$ solche Grenzen A, B festzusetzen, dass die Differenzen der Coordinaten der eben genannten Punkte dem absoluten Betrage nach eine gewisse Zahl β' nicht erreichen. Sind $x\,y$, $x'\,y'$ u. s. w. die Coordinaten von M, M' u. s. w., so hat man

$$x' - x = \Delta p \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \varrho'(\Delta p)\right\}, \quad x'' - x = \Delta q \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \varrho''(\Delta q)\right\}$$

$$x''' - x = (x''' - x'' - x' + x) + (x'' - x) + (x' - x),$$

$$x''' - x'' - x' + x = \Delta p\, \Delta q \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + X(\Delta p, \Delta q)\right\}.$$

Aus diesen Formeln wird man Grenzen A, B ableiten können, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q}$ endliche Functionen im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}$ darstellen und wenn die Formeln

$$\lim_{\Delta p = 0} \varrho'(\Delta p) = 0, \qquad \lim_{\Delta q = 0} \varrho''(\Delta q) = 0, \qquad \lim_{\Delta p = 0,\, \Delta q = 0} X(\Delta p, \Delta q) = 0$$

in dem Sinne bestehen, dass ϱ', ϱ'', X sich jedem Grenzwerthe 0 *gleichmässig für alle Stellen p, q des Gebietes* $\mathfrak{G}$ nähern. Die genannten Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn die Functionen $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q}$ in dem Gebiete $\mathfrak{G}$ mit Einschluss seiner Begrenzung stetig sind.

Innsbruck, 26. Juli 1883.

---

*) Die hier benutzte Methode, die Existenz des Grenzwerthes L zu beweisen, ist auch zur strengen Begründung eines fundamentalen Satzes in der Theorie der Doppelintegrale (vgl. z. B. A. Harnack, Elemente der Differential- und Integralrechnung p. 310) brauchbar.

**) Dass der Begriff einer discreten Punktmenge in der Ebene der Begründung bedürfe und worauf es dabei im Wesentlichen ankomme, theilte mir schon vor einiger Zeit Herr C. Adler mit.