11. *Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft;*

von Eduard Riecke.

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Im Jahre 1881 habe ich in den „Göttinger Nachrichten“ und in „Wiedemann's Annalen“ eine Untersuchung über die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde veröffentlicht.[1]) Die gefundenen Gesetze haben später durch die an die Erscheinung der Kathodenstrahlen sich knüpfenden Maassbestimmungen erhöhte Bedeutung gewonnen. Mit Rücksicht auf verschiedene Erscheinungen, bei denen elektrische und magnetische Wirkungen im Spiele sind, schien es mir nützlich, die frühere Untersuchung auf den Fall auszudehnen, dass ein homogenes elektrisches Feld mit einem homogenen magnetischen sich überlagert.

1. Die ponderable Masse des betrachteten elektrischen Teilchens sei μ, seine elektrische Ladung ε; seine Coordinaten in einem rechtwinkligen System x, y, z. Das elektrostatische Potential sei gegeben durch $V = -\mathsf{A}x - \mathsf{B}y - \Gamma z$; die ganze Intensität des elektrischen Feldes sei F; das magnetische Potential sei $P = -Ax - By - Cz$; die ganze Intensität des magnetischen Feldes sei $\mathfrak{H}$, v sei die Lichtgeschwindigkeit. Die Bewegungsgleichungen sind:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{d^2 x}{d t^2} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{v}\left\{\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{d z}{d t} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{d y}{d t}\right\},\\ \mu\frac{d^2 y}{d t^2} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{v}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{d x}{d t} - \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{d z}{d t}\right\},\\ \mu\frac{d^2 z}{d t^2} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{v}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{d y}{d t} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{d x}{d t}\right\}.\end{aligned}\right.$$

---

1) E. Riecke, Göttinger Nachr., 2. Febr. 1881; Wied. Ann. **13.** p. 192. 1881.

2. Das Integral der lebendigen Kraft ist gegeben durch:

$$\frac{\mu}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=-\varepsilon V+\text{const.}$$

Wir bezeichnen mit ds das Element der von dem Teilchen ε durchlaufenen Bahn, dann ist

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Setzen wir ferner die Bahngeschwindigkeit des Teilchens

$$\frac{ds}{dt}=\sigma,$$

so lässt sich das Integral der Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$\sigma^2=\sigma_0^2+\frac{2\varepsilon}{\mu}(V_0-V), \tag{2}$$

wo σ_0 der Wert der Bahngeschwindigkeit, welcher dem Potential V_0 entspricht. So oft die Bahn des Teilchens dieselbe Potentialfläche schneidet, ist auch seine Geschwindigkeit wieder dieselbe.

3. Führen wir an Stelle der Potentiale V und P die Componenten der elektrostatischen und der magnetischen Kräfte ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}\mu\frac{d^2x}{dt^2}&=\varepsilon\mathsf{A}-\frac{\varepsilon}{v}\left\{B\frac{dz}{dt}-C\frac{dy}{dt}\right\},\\ \mu\frac{d^2y}{dt^2}&=\varepsilon\mathsf{B}-\frac{\varepsilon}{v}\left\{C\frac{dx}{dt}-A\frac{dz}{dt}\right\},\\ \mu\frac{d^2z}{dt^2}&=\varepsilon\Gamma-\frac{\varepsilon}{v}\left\{A\frac{dy}{dt}-B\frac{dx}{dt}\right\}.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

4. Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C, so ergiebt sich durch Addition:

$$\mu\left\{A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}\right\}=\varepsilon(A\mathsf{A}+B\mathsf{B}+C\Gamma)$$

oder

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}\{Ax+By+Cz\}=\varepsilon(A\mathsf{A}+B\mathsf{B}+C\Gamma). \tag{4}$$

Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung der magnetischen Kraftlinien $\mathfrak{H}$, und den Radiusvector r nach dem Teilchen ε; *wir legen durch dieses Teilchen eine Ebene senkrecht zu der Richtung* $\mathfrak{H}$. Sie schneidet diese in einem *Punkt h*, dessen Abstand vom Anfangspunkt des Coordinatensystems durch denselben Buchstaben h bezeichnet werden soll. Dann ist

$$h = r\left\{\frac{A}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{x}{r} + \frac{B}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{y}{r} + \frac{C}{\mathfrak{H}}\cdot\frac{z}{r}\right\},$$

$$h\,.\,\mathfrak{H} = A x + B y + C z. \tag{5}$$

Substituiren wir diesen Wert in Gleichung (4), so ergiebt sich:

$$\frac{d^2 h}{d t^2} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\mathfrak{F}\cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}). \tag{6}$$

Der Punkt h rückt somit auf der den magnetischen Kraftlinien parallelen Axe $\mathfrak{H}$ *mit gleichförmiger Beschleunigung fort.*

5. Multipliciren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit A, B, Γ, so ergiebt sich durch Addition:

$$\mu\left\{\mathsf{A}\frac{d^2 x}{d t^2} + \mathsf{B}\frac{d^2 y}{d t^2} + \Gamma\frac{d^2 z}{d t^2}\right\} = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v}\begin{vmatrix} A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt}\end{vmatrix},$$

oder:

$$\mu\,\frac{d^2}{d t^2}.\{\mathsf{A}\,x + \mathsf{B}\,y + \Gamma\,z\} = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{d}{d t}\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Summe unterliegt einer ganz ähnlichen Interpretation, wie der analoge Term des vorhergehenden Paragraphen. Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung $\mathfrak{F}$ der elektrostatischen Kraftlinien. *Durch die augenblickliche Lage des Teilchens* ε *legen wir eine Ebene senkrecht zu der Richtung* $\mathfrak{F}$; sie schneide diese letztere in einem *Punkt f*, dessen Abstand von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems gleich f sei. Dann ist:

$$f\,\mathfrak{F} = \mathsf{A}\,x + \mathsf{B}\,y + \Gamma\,z. \tag{8}$$

Wir erhalten daher die Gleichung:

$$\mu\,\mathfrak{F}\,\frac{d^2 f}{d t^2} = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2 + \frac{\varepsilon}{v}\cdot\frac{d}{d t}\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma\end{vmatrix}. \tag{8'}$$

6. Von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems aus ziehen wir eine *Linie N so, dass sie senkrecht steht auf* $\mathfrak{H}$ *und auf* $\mathfrak{F}$, und so, dass die Reihenfolge N, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ gleichsinnig ist mit der Reihenfolge der Axen x, y, z. Die Richtungscosinusse von N seien ν_1, ν_2, ν_3; dann ist:

$$(9) \qquad \begin{cases} \varrho \nu_1 = B\Gamma - C\mathsf{B}, \\ \varrho \nu_2 = C\mathsf{A} = A\Gamma, \\ \varrho \nu_3 = A\mathsf{B} = B\mathsf{A}, \end{cases}$$

wo:

$$(9') \qquad \varrho = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Multipliciren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\varrho\nu_1$, $\varrho\nu_2$, $\varrho\nu_3$, so ergiebt sich durch Addition:

$$\begin{aligned} \frac{v}{\varepsilon} \cdot \mu \varrho \frac{d^2}{dt^2}(\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z) = &- \left(B\frac{dz}{dt} - C\frac{dy}{dt}\right)(B\Gamma - C\mathsf{B}), \\ &- \left(C\frac{dx}{dt} - A\frac{dz}{dt}\right)(C\mathsf{A} - A\Gamma), \\ &- \left(A\frac{dy}{dt} - B\frac{dx}{dt}\right)(A\mathsf{B} - B\mathsf{A}). \end{aligned}$$

Wir legen durch die jeweilige Lage des Teilchens ε eine Ebene senkrecht zu der Linie N; ihr Schnittpunkt mit N sei n, der Abstand des Punktes n vom Anfangspunkt des Coordinatensystems sei n; dann ist:

$$(10) \qquad n = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z$$

und wir erhalten die Gleichung:

$$(10') \qquad \mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{dt^2} = - \frac{\varepsilon\mathfrak{H}}{v} \frac{df}{dt} + \frac{\varepsilon\mathfrak{H}}{v} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{dh}{dt}.$$

7. Setzen wir in Gleichung (10) für ν_1, ν_2, ν_3 ihre Werte aus Gleichung (9) und (9'), so ergiebt sich:

$$\mathfrak{H}\mathfrak{F} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \,.\, n = \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \mathsf{A} & \mathsf{B} & \Gamma \end{vmatrix}.$$

Substituiren wir diesen Wert der Determinante in Gleichung (8'), so ergiebt sich:

$$(11) \qquad \mu \frac{d^2 f}{dt^2} = \varepsilon \mathfrak{F} + \frac{\varepsilon}{v} \cdot \mathfrak{H} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{dn}{dt}.$$

Differentiiren wir die Gleichung (10′) nach (2), so erhalten wir:

$$\mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^3 n}{d t^3} = -\frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v} \frac{d^2 f}{d t^2} + \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 h}{d t^2}.$$

Benutzen wir hier den Wert von $d^2 h / d t^2$ aus Gleichung (6), so wird:

$$\mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^3 n}{d t^3} = \frac{\varepsilon^2}{v \mu} \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) - \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \frac{d^2 f}{d t^2}.$$

Setzen wir für $d^2 f / d t^2$ den aus Gleichung (11) folgenden Wert, so ergiebt sich die folgende Differentialgleichung zur Bestimmung von n:

$$(12) \qquad \frac{d^3 n}{d t^3} + \frac{\varepsilon^2}{v^2 \mu^2} \cdot \mathfrak{H}^2 \frac{d n}{d t} = -\frac{\varepsilon^2}{v \mu^2} \mathfrak{H} \mathfrak{F} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

8. Aus Gleichung (6) ergiebt sich:

$$\frac{d h}{d t} = \frac{\varepsilon}{\mu} \mathfrak{F} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t + c_h^0,$$

wo c_h^0 den Anfangswert der Geschwindigkeit $d h / d t$ bezeichnet. Substituiren wir diesen Wert in Gleichung (10′), so wird:

$$\mu \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{d t^2} = -\frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v} \cdot \frac{d f}{d t} + \frac{\varepsilon^2}{v \mu} \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t$$
$$+ \frac{\varepsilon c_h^0}{v} \mathfrak{H} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Differentiiren wir nun die Gleichung (11) nach (7), so wird:

$$\mu \frac{d^3 f}{d t^3} = \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{d t^2},$$

und mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$(13) \quad \frac{d^3 f}{d t^3} + \frac{\varepsilon^2}{v^2 \mu^2} \mathfrak{H}^2 \frac{d f}{d t} = \frac{\varepsilon^2}{v^2 \mu^2} \mathfrak{H}^2 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \left\{ \frac{\varepsilon}{\mu} \mathfrak{F} \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t + c_h^0 \right\}$$

die Differentialgleichung zur Bestimmung von f.

9. Die Integration von Gleichung (12) giebt:

$$(14) \quad n = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, v\, t + a_1 \sin \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v \mu} t + b_1 \cos \frac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v \mu} t + \gamma_1,$$

wo a_1, b_1 und γ Integrationsconstanten sind.

Gleichung (13) giebt:

$$(15)\quad \begin{cases} f = \dfrac{\varepsilon \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2\mu} \left\{t^2 - \dfrac{2 v^2 \mu^2}{\varepsilon^2 \mathfrak{H}^2}\right\} + c_h^0 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t \\ \quad + a_2 \sin \dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t + b_2 \cos \dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t + \gamma_2 \,. \end{cases}$$

Damit Gleichung (11) erfüllt wird, muss

$$a_2 = b_1 \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \quad \text{und} \quad b_2 = - a_1 \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$$

sein.

Setzt man nun

$$a_1 = d \sin \delta\,, \qquad b_1 = d \cos \delta\,,$$

so wird

$$(16)\quad \begin{cases} n = - \dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})\, v\, t + d \cos\left(\dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t - \delta\right) + \gamma_1\,, \\ f = \dfrac{\varepsilon \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2\mu} \left\{t^2 - \dfrac{2 v^2 \mu^2}{\varepsilon^2 \mathfrak{H}^2}\right\} + c_h^0 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t \\ \quad + d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin\left(\dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t - \delta\right) + \gamma_2\,. \end{cases}$$

Die Richtungen $\mathfrak{F}$ und. N stehen aufeinander senkrecht; wir können also n und f als rechtwinklige Coordinaten behandeln in einem ebenen System, dessen Axen durch $\mathfrak{F}$ und N gegeben sind. Nun ist für $t = 0$:

$$f_0 = - \frac{v^2 \mu}{\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}^2} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) - d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin \delta + \gamma_2\,,$$

$$n_0 = d \cos \delta + \gamma_1\,.$$

Machen wir durch Parallelverschiebung des Systems:

$$f_0 = - d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin \delta\,,$$

$$n_0 = - d \cos \delta\,,$$

so wird:

$$\gamma_2 = \frac{v^2 \mu}{\varepsilon} \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}^2} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\,, \quad \gamma_1 = 0,$$

und damit:

$$(16')\quad \begin{cases} f = \dfrac{\varepsilon \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2\mu} t^2 + c_h^0 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t \\ \qquad\qquad + d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin\left(\dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t - \delta\right), \\ n = - \dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})\, v\, t + d \cos\left(\dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v\mu} t - \delta\right). \end{cases}$$

10. Ueber den *Charakter der durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmten Curve* wird man sich am einfachsten

orientiren, wenn man f und n in je zwei Teile zerlegt. Wir setzen:

$$(17) \quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{\varepsilon \mathfrak{F} \cos^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2\mu} t^2 + c_h^0 \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, t, \\ n_1 = -\dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \cdot \sin(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})\, v\, t; \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} f_2 = d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin\left(\dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v \mu} t - \delta\right), \\ n_2 = d \cos\left(\dfrac{\varepsilon \mathfrak{H}}{v \mu} t - \delta\right), \end{cases}$$

sodass:

$$f = f_1 + f_2, \qquad n = n_1 + n_2.$$

Bezeichnen wir den Punkt der $\mathfrak{F} N$*-Ebene, welcher durch die Coordinaten* f *und* n *bestimmt ist, mit* Π, *so kann* Π *in folgender Weise construirt werden.* Wir setzen erst die Coordinaten f_1 und n_1 zusammen und erhalten so den *Punkt* P; dann ziehen wir von P aus die Coordinaten f_2 und n_2, der aus ihrer Zusammensetzung sich ergebende Punkt ist Π.

Aus den Gleichungen (17) folgt für die von dem Punkt P beschriebene Curve die Gleichung:

$$f_1 = \frac{\varepsilon}{2\mu v^2} \frac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{F}} \operatorname{cotg}^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, n_1^2 - \frac{c_h^0}{v} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}} \operatorname{cotg}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})\, n_1.$$

Die Curve ist eine *Parabel.* Die Coordinaten ihres *Scheitelpunktes* sind:

$$f_1^0 = -\frac{c_h^{0\,2}}{2} \frac{\mu}{\varepsilon \mathfrak{F}}, \qquad n_1^0 = \frac{c_h^0 v \mu}{\varepsilon \mathfrak{H}} \operatorname{tg}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Die *Scheiteltangente* der Parabel ist parallel der Axe N. Die Parabel geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems $\mathfrak{F}$, N, und zwar liegt der in Betracht kommende Zweig derselben in dem Winkel zwischen der positiven $\mathfrak{F}$-Axe und der negativen N-Axe.

Wenn der Winkel $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ gleich Null ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien mit den elektrostatischen zusammenfallen, so degenerirt die Parabel in die Axe $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{H}$. Wenn der Winkel $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ gleich einem rechten ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien auf den elektrostatischen senkrecht stehen, so fällt die Parabel zusammen mit der Axe N. Von dem Nullpunkt des Systems $\mathfrak{F}$, N an gerechnet bewegt sich der Punkt P auf der negativen N-Axe.

11. Aus den Gleichungen (18) folgt:

$$\frac{f_2^2}{d^2 \sin^2(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})} + \frac{n_2^2}{d^2} = 1. \tag{20}$$

Haben wir für irgend eine Zeit die Lage von P auf der von ihm beschriebenen Parabel bestimmt, *so liegt Π auf einer Ellipse, deren Centrum P ist*, deren grosse Axe d parallel ist mit N, deren kleine Axe $d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ parallel ist mit $\mathfrak{F}$.

Man kann diese Ellipse in bekannter Weise construiren mit Hülfe zweier Kreise, die um P mit den Halbmessern d und $d \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ beschrieben werden. Lässt man den bei der Construction benutzten Radiusvector in der Secunde $\varepsilon \mathfrak{H} / 2 \pi v \mu$ Umläufe machen, so erhält man ein vollständiges Bild von der elliptischen Bewegung des Punktes Π. Bezeichnen wir die *Umlaufszeit* mit T, so ist:

$$T = \frac{2 \pi v \mu}{\varepsilon \mathfrak{H}}.$$

Um die wirkliche Bewegung von Π *in der Ebene* $\mathfrak{F} N$ *zu finden*, muss man den Mittelpunkt P der Ellipse in einer der Umlaufsbewegung entsprechenden Weise auf seiner Parabel weiterrücken lassen. Die Curve, welche auf diese Weise entsteht, hat einen cykloidenartigen Charakter.

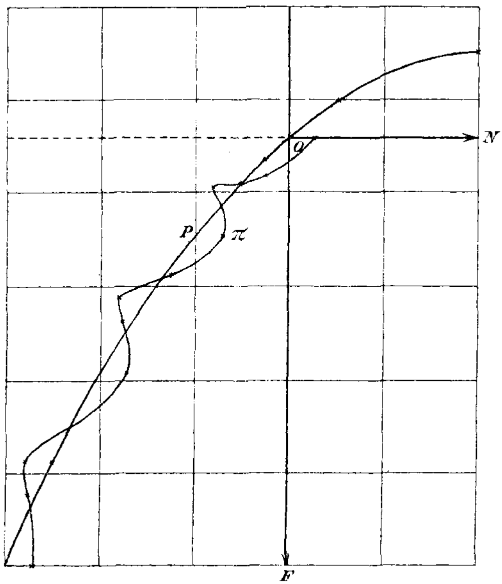
So oft der Punkt Π in seiner Ellipse einen Umlauf vollzieht, verschiebt sich der Punkt n, die Projection von Π auf die Axe N um die Strecke

$$-\frac{2 \pi v^2 \mu}{\varepsilon \mathfrak{H}} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}).$$

Auf Grund dieser Bemerkung kann man von der durch den Punkt Π beschriebenen Curve das folgende Bild (vgl. Figur, p. 386) entwerfen.

Um die *räumliche Bewegung des elektrischen Teilchens* ε zu erhalten, muss man gleichzeitig mit dem Punkte Π der Ebene $\mathfrak{F} N$ den früher eingeführten Punkt h in der Axe $\mathfrak{H}$ sich bewegen lassen. Mit Π verbindet man ein auf der Ebene $\mathfrak{F} N$ senkrecht stehendes Lot, mit h eine zu der Axe $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene; die jeweilige Lage des Teilchens ε wird dann durch den Schnitt der Ebene mit dem Lote bestimmt. Die so erzeugte Curve hat einen schraubenartigen Verlauf.

12. *Specielle Fälle.* Wenn *der Winkel* $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ *ein rechter* ist, so geht die Parabel über in die Axe N. Zugleich werden die Axen der von dem Punkt Π beschriebenen Ellipse einander gleich, die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis. Der Punkt Π beschreibt in diesem Falle eine gewöhnliche Cykloide, deren Axe durch den negativen Ast der Axe N gegeben ist. Die Beschleunigung in der Richtung der Axe $\mathfrak{H}$ ist Null. Wenn also auch die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens c_h^0 Null



ist, so beschränkt sich die ganze Bewegung auf die Ebene $\mathfrak{F} N$; man kommt dann zu dem folgenden eigentümlichen Resultat. Wenn die elektrischen und die magnetischen Kraftlinien zu einander senkrecht stehen, und das Teilchen ε keine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Axe $\mathfrak{H}$ besitzt, so bewegt es sich in einer *Cykloide, deren Axe senkrecht steht zu den magnetischen und zu den elektrischen Kraftlinien*, also im wesentlichen in einer zu den beiden Kräften *transversalen* Richtung.

Wenn die Richtungen der magnetischen und der elektrostatischen Kraftlinien zusammenfallen, so ist es zweckmässiger, auf die ursprünglichen Gleichungen zurückzugehen. Wenn man die Richtung der Kraftlinien mit der Richtung der x-Axe zusammenfallen lässt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon \mathfrak{F}, \quad \mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \frac{d z}{d t}, \qquad \mu \frac{d^2 z}{d t^2} = - \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{H} \frac{d y}{d t}.$$

Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung der x-Axe und aus einer Kreisbewegung in der Ebene $y z$ mit der Umlaufszeit $2 \pi v \mu / \varepsilon \mathfrak{H}$. Die Bahn ist eine Schraube mit wachsender Höhe der Gänge.

13. Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung dürften Anwendung finden auf die Erscheinungen in der Nähe der Kathode, auf die Veränderung, insbesondere die Neubildung der Schichten unter magnetischer Wirkung, sowie auf die Erscheinung des Nordlichtes.

(Eingegangen 23. December 1900.)