Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von

P. Gordan in Erlangen.

In den Untersuchungen über das *Ikosaeder*, welche Hr. Klein im neunten Bande dieser Annalen p. 183 ff. veröffentlichte, hatte sich ein sehr merkwürdiger Zusammenhang mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades ergeben. In der That gelang es Hrn. Klein neuerdings, diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei welchen die Glieder mit der vierten und der dritten Potenz der Unbekannten fehlen, in einfachste Beziehung zu der Ikosaedergleichung zu setzen. — Die hier folgenden Untersuchungen knüpften ursprünglich an die erste hierauf bezügliche Mittheilung an, welche der Erlanger Societät im Januar 1877 vorgelegt wurde. Ich stellte mir vor Allem die Aufgabe, die Wurzeln der Gleichung fünften Grades explicite durch die Ikosaederirrationalität auszudrücken. Die Note, welche ich hierüber im Juli 1877 der Erlanger Societät einreichte, ist gleichzeitig mit einer weiteren Mittheilung von Hrn. Klein, in der er durch andere Betrachtungen zu demselben Ziele gelangte. Das Eigenthümliche meiner Behandlung bestand darin, dass ich die in den Formeln auftretenden Ausdrücke als Covarianten einer gewissen doppeltbinären Form f erkannt und im Anschlusse an meine früheren ähnlichen Arbeiten *das volle Formensystem*, welches zu f gehört, aufgestellt hatte. Weitere hierauf bezügliche Mittheilungen und insbesondere die unten mitzutheilenden Schlussformeln legte ich im September 1877 der *Naturforscherversammlung in München* vor.

Hr. Klein hatte inzwischen die Darstellung seiner Untersuchungen beendet, welche im zwölften Bande dieser Annalen*) veröffentlicht ist und die ich im Folgenden als bekannt voraussetzen werde. Wir haben seitdem die von mir gefundenen Resultate wiederholt und eingehend durchgesprochen, und so ist die Darstellung entstanden, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum vorlege. Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades erscheint jetzt als blosse Anwendung ge-

*) Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder, p. 501 ff.

wisser Aufgaben, die man hinsichtlich der Ikosaedersubstitutionen stellen und erledigen kann.

Die principielle Durchführung dieser Aufgaben, wie ich sie im ersten und zweiten Abschnitte des Folgenden gebe, dürfte an meiner Arbeit das Wichtigste sein, weil sie am meisten über Bekanntes hinausführt. Aber ich möchte hier insbesondere auf den dritten Abschnitt verweisen. Es sind dort die Formeln, deren man bei der Auflösung der Gleichungen fünften Grades bedarf, so knapp zusammengezogen, dass einer unmittelbaren numerischen Verwerthung derselben kein Hinderniss mehr im Wege steht. Eben Diess vermisste ich seither an der Hermite'schen wie an der Kronecker-Brioschi'schen Lösung der Gleichungen fünften Grades; an eine praktische Verwendbarkeit derselben konnte man wegen der Länge der nur verlangten und nicht geleisteten Eliminationen nicht denken.

Abschnitt I.

Die zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen.

§ 1.

Formulirung des Problems.

Es ist bekannt, dass das *Ikosaeder:*

$$\gamma_1 = y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}) \tag{1}$$

sowie seine Hesse'sche Form:

$$\gamma_1 = (y_1^{20} + y_2^{20}) + 228 (y_1^5 y_2^{15} - y_1^{15} y_2^5) + 494\, y_1^{10} y_2^{10} \tag{2}$$

und die Functionaldeterminante beider:

$$\gamma_3 = (y_1^{30} + y_2^{30}) + 522 (y_1^{25} y_2^5 - y_1^5 y_2^{25}) - 10005 (y_1^{20} y_2^{10} + y_1^{10} y_2^{20}) \tag{3}$$

die Eigenschaft besitzen, durch 120 binäre lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich überzugehen. Diese sog. *Ikosaedersubstitutionen* sind durch folgende Tabelle gegeben; sie verwandeln y_1, y_2 bez. in:

$$\tag{4} \left\{ \begin{array}{ll} \pm\, \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_1 , & \pm\, \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_2 , \\ \mp\, \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 , & \pm\, \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 , \\ \dfrac{\pm\, \varepsilon^{\frac{\mu}{2}} \left((\varepsilon + \varepsilon^4)\, \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 + \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , & \pm\, \dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}} \left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 - (\varepsilon + \varepsilon^4)\, \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , \\ \dfrac{\mp\, \varepsilon^{\frac{\mu}{2}} \left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 - (\varepsilon + \varepsilon^4)\, \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , & \pm\, \dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}} \left((\varepsilon + \varepsilon^4)\, \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 + \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4 ; \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right] :} \end{array} \right.$$

Zwischen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ besteht die Relation:

$$(5) \qquad \gamma_3^2 = \gamma_2^3 + 12^3 \gamma_1^5.$$

Zugleich sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in gewissem, später immer festzuhaltendem Sinne die *einzigen* Ausdrücke, welche durch die Ikosaedersubstitutionen in sich übergehen. Alle ganzen Functionen von y_1, y_2 nämlich, die bei den Ikosaedersubstitutionen ungeändert bleiben, sind *ganze Functionen* von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Ich werde das in der Art ausdrücken, dass ich sage: *die Formen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bilden das volle System dieser Functionen.*

Die durch diese Angaben beantwortete Fragestellung kann man nun einmal in der Weise erweitern, dass man statt der einen Reihe Veränderlicher y_1, y_2 deren mehrere nimmt: y_1, y_2; y_1', y_2' etc. Diese Veränderlichen sollen gleichzeitig den Ikosaedersubstitutionen (4) unterworfen werden; man sucht alle ganzen Functionen von y_1, y_2; $y_1', y_2' \cdots$, welche bei diesen Substitutionen ungeändert bleiben. Die so erweiterte Fragestellung führt im Falle zweier Reihen von Variablen insbesondere zu denjenigen Ausdrücken, mit denen sich die Theorie der Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades beschäftigt.

Aber man kann die Erweiterung in einer anderen Richtung suchen. Die Substitutionen (5) bleiben in ihrer Gesammtheit ungeändert, wenn man statt ε eine andere complexe fünfte Einheitswurzel setzt. Ist diese neue Einheitswurzel ε^4, so geht das neue Substitutionssystem in das alte über, sobald man statt y_1, y_2 einträgt $-y_2, y_1$. Ist sie dagegen ε^2 oder ε^3, so erhält man Systeme von Substitutionen, die (unter einander in demselben Sinne verwandt) nicht mehr mit dem ursprünglichen Systeme durch eine lineare Umformung der Veränderlichen zur Deckung gebracht werden können. Ich will nun annehmen, dass y_1, y_2 nach wie vor den Substitutionen (4) unterworfen werden, dass man aber gleichzeitig neue Variable x_1, x_2 durch diejenigen Substitutionen transformirt, welche aus (4) entstehen, wenn man ε durch ε^2 ersetzt. Die Werthe, in welche x_1, x_2 der Reihe nach übergehen, lauten also folgendermassen:

$$(6) \begin{cases} \pm \varepsilon^\nu x_1, & \pm \varepsilon^{-\nu} x_2, \\ \mp \varepsilon^\nu x_2, & \pm \varepsilon^{-\nu} x_1, \\ \pm \dfrac{\varepsilon^\mu \left((\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} x_1 + \varepsilon^\nu x_2\right)}{\varepsilon^4 - \varepsilon}, & \pm \dfrac{\varepsilon^{-\mu}\left(\varepsilon^{-\nu} x_1 - (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^\nu x_2\right)}{\varepsilon^4 - \varepsilon}, \\ \pm \dfrac{\varepsilon^\mu \left(\varepsilon^{-\nu} x_1 - (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^\nu x_2\right)}{\varepsilon^4 - \varepsilon}, & \pm \dfrac{\varepsilon^{-\mu}\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} x_1 + \varepsilon^\nu x_2\right)}{\varepsilon^4 - \varepsilon}. \end{cases}$$

Ich frage nun nach solchen homogenen ganzen Functionen von y_1, y_2 und x_1, x_2, welche ungeändert bleiben, wenn man gleichzeitig auf y_1, y_2 die Substitutionen (4) und auf x_1, x_2 die Substitutionen (6) an-

wendet. Dieses ist das Problem, mit dem ich mich im gegenwärtigen Abschnitte beschäftigen werde. Es handelt sich wieder um Aufstellung eines *vollen Systems*, durch dessen Formen sich alle anderen ganz ausdrücken lassen.

Wenn man in (4) und (6) gleichzeitig ε in ε^2 verwandelt, so erhält man aus (4) diejenigen Substitutionen, denen x_1, x_2, und aus (6) diejenigen Substitutionen, denen $-y_2$, y_1 unterworfen werden. Daher hat man folgenden Satz:

Aus einer Function der gesuchten Eigenschaft erhält man, allgemein zu reden, eine neue, wenn man y_1, y_2, x_1, x_2 bez. durch x_1, x_2, $-y_2$, y_1 ersetzt.

Ich will diese Operation fortan einfach als *Vertauschung von x und y* bezeichnen.

Andererseits macht man die Bemerkung, dass selbstverständlicherweise zu den gesuchten Functionen die Formen γ_1, γ_2, γ_3 gehören, sowie diejenigen Functionen γ_1', γ_2', γ_3', welche aus ihnen durch Vertauschung von x und y entstehen. Jede Function, welche blos die y enthält, muss sich auf γ_1, γ_2, γ_3 zusammensetzen lassen; jede Function, welche blos die x enthält, aus γ_1', γ_2', γ_3'. Allgemeiner: Wenn eine Function der gesuchten Art einen Factor enthält, der nur von den y oder von den x abhängt, so lässt sich von ihr immer eine ganze Function von γ_1, γ_2, γ_3 resp. von γ_1', γ_2', γ_3' abtrennen. Denn aus dem betr. Factor entsteht durch die Substitutionen (4) oder (6) eine solche ganze Function. Enthält also z. B. eine Function den Factor y_2, so enthält sie ohne Weiteres den Factor γ_1, etc.

Diese letzte Bemerkung wird uns weiterhin von dem allergrössten Vortheile sein; sie bildet das wesentliche Reductionsprincip, dessen ich mich zur Aufstellung des vollen Systems bediene. Ich werde die gesuchten Functionen allemal nach fallenden Potenzen von y_1, nach steigenden von y_2 ordnen. Enthält dann das *Anfangsglied* bereits y_2^2, so wird sich γ_1^2 als Factor von der Function abtrennen. Alle Functionen daher, die wir im Systeme aufzuzählen haben, sind bereits durch ihr Anfangsglied charakterisirt. Denn die Differenz zweier Functionen mit demselben Anfangsglied ist durch γ_1 theilbar und also die eine Function durch die andere und Functionen niederer Ordnung ausdrückbar.

§ 2.

Die Form f.

Ich beginne nunmehr die Untersuchung in der Weise, dass ich zunächst diejenige unter den verlangten Formen aufstelle, welche in den x und y zugleich vom niedersten Grade ist. Zu dem Zwecke bemerke ich, dass sich die 120 Paare zusammengehöriger Ikosaedersubstitutionen aus denjenigen 3 Substitutionen zusammensetzen lassen, welche die Variablen $y_1, y_2; x_1, x_2$ in die Werthsysteme überführen:

$$\text{(I.)}\qquad -y_2,\ y_1, \qquad\qquad -x_2,\ x_1,$$

$$\text{(II.)}\qquad \varepsilon y_1,\ \varepsilon^4 y_2, \qquad\qquad \varepsilon^2 x_1,\ \varepsilon^3 x_2,$$

$$\text{(III.)}\qquad \frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)y_1+y_2}{\varepsilon^2-\varepsilon^3},\quad \frac{y_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)y_2}{\varepsilon^2-\varepsilon^3},\quad \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)x_1+x_2}{\varepsilon^4-\varepsilon},\quad \frac{x_1-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)x_2}{\varepsilon^4-\varepsilon}.$$

Man suche nun vorab solche Functionen von x, y, welche bei den Substitutionen (I.), (II.) ungeändert bleiben, und nehme ihren Grad in den x und ihren Grad in den y möglichst klein an. Eine sehr leichte Analyse zeigt*), dass mindestens einer der beiden Grade die Zahl 3 erreichen muss, und, wenn keiner der beiden Grade diese Zahl übersteigen soll, so ergeben sich folgende drei Möglichkeiten:

$$x_1^3 y_2 - x_2^3 y_1,$$
$$x_2 y_2^3 - x_1 y_1^3,$$
$$x_1^3 y_1 y_2^2 + x_2^3 y_1^2 y_2 + c(x_1^2 x_2 y_1^3 - x_1 x_2^2 y_2^3).$$

Wendet man jetzt die Substitution (III.) an, so ändern sich die beiden ersten dieser Formen; die letzte aber bleibt in der That ungeändert, sobald wir die noch unbestimmte Constante $c = 1$ nehmen. *Daher ist die von uns gesuchte Form niedrigsten Grades in den x und den y, nach Potenzen von y geordnet, die folgende:*

$$(7)\qquad f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2.$$

§ 3.

Einführung der Invariantentheorie.

Ich werde nun eine grosse Anzahl der von uns gesuchten Formen, und, wie sich bald zeigen wird, *alle* hier in Betracht kommenden Formen durch Processe der Invariantentheorie ableiten. Man betrachte die soeben aufgestellte Form f als eine binäre Grundform mit zwei Reihen Veränderlicher y_1, y_2 und x_1, x_2, die *unabhängig von einander* linearen Transformationen unterworfen werden mögen. *Jede Covariante, welche f unter dieser Voraussetzung besitzt, ist eine der von uns gesuchten Functionen.* Denn macht man bei y_1, y_2 und x_1, x_2 solche Substitutionen von der Determinante Eins, welche f in sich überführen, so muss auch die Covariante in sich übergehen; die Covarianten bleiben also in der That ungeändert, wenn man auf die y die Substitutionen (4) und gleichzeitig auf die (x) die Substitutionen (6) anwendet.

---

*) Auf ähnliche Weise kann man alle einfacheren Formen des später aufzustellenden Systems finden.

Doppeltbinäre Formen, bei welchen die beiden in Betracht kommenden Reihen von Variablen, x_1, x_2 und y_1, y_2, unabhängig von einander linearen Transformationen unterworfen werden, sind bisher kaum betrachtet worden; ich muss daher kurz angeben, wie man bei ihnen Covarianten bildet. Es geschieht dies, wie bei den Formen mit nur einer Reihe von Variablen, am zweckmässigsten durch den *Ueberschiebungsprocess.*

Es seien zwei Formen gegeben, die ich symbolisch mit:

$$F = a_x^k \alpha_y^l, \qquad \Phi = b_x^m \beta_y^n$$

bezeichnen will. So kann man λ-mal in Bezug auf die x und μ-mal in Bezug auf die y überschieben. Dann entsteht, was ich mit $(F, \Phi)_{\lambda,\mu}$ bezeichne und symbolisch folgendermassen definirt ist:

$$(F, \Phi)_{\lambda,\mu} = (ab)^\lambda a_x^{k-\lambda} b_x^{m-\lambda} (\alpha\beta)^\mu \alpha_y^{l-\mu} \beta_y^{n-\mu}.$$

Zur Berechnung einer solchen Ueberschiebung bediene man sich folgender Regeln.

Zunächst hat man den Satz: Die Ueberschiebungen von Summen sind Summen von Ueberschiebungen:

$$(A+B, C+D)_{\lambda,\mu} = (A, C)_{\lambda,\mu} + (A, D)_{\lambda,\mu} + (B, C)_{\lambda,\mu} + (B, D)_{\lambda,\mu}.$$

Ist also:

$$F = \sum c_{r,s}\, x_1^{k-r} x_2^r y_1^{l-s} y_2^s,$$
$$\Phi = \sum b_{\varrho,\sigma}\, x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho y_1^{n-\sigma} y_2^\sigma,$$

so hat man:

$$(F, \Phi)_{\lambda,\mu} = \sum c_{r,s} b_{\varrho,\sigma} (x_1^{k-r} x_2^r,\ x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda (y_1^{l-s} y_2^s,\ y_1^{n-\sigma} y_2^\sigma)_\mu.$$

Die hier rechter Hand auftretenden einfachen Ueberschiebungen werden folgendermassen ausgewerthet. Vor allen Dingen ist

$$(x_1^{k-r} x_2^r,\ x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda$$

bis auf einen numerischen Factor gleich:

$$x_1^{k+m-r-\varrho-\lambda} x_2^{r+\varrho-\lambda},$$

und dieser numerische Factor berechnet sich, indem man die Functionen $x_1^{k-r} x_2^r$, $x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho$ λ-mal nach ξ polarisirt und die so entstehenden Polaren λ-mal nach ξ überschiebt:

$$(x_1^{k-r} x_2^r,\ x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda = \left[(x_1^{k-r} x_2^r)_{\xi\lambda},\ (x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_{\xi\lambda}\right]_{\lambda(\xi)}.$$

Insbesondere hat man folgende Regeln:

1) Die Ueberschiebungen $(x_1^{k-r} x_2^r,\ x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda$ verschwinden identisch, wenn die Summe der kleineren der Zahlen $k-r$, ϱ und der kleineren der Zahlen r, $m-\varrho$ kleiner als λ ist.

2) Die Theilüberschiebungen $(\xi_1^{\lambda-p}\,\xi_2^{p},\ \xi_1^{\lambda-q}\,\xi_2^{q})_\lambda$ haben für $p+q=\lambda$ den Werth $\dfrac{(-1)^p}{\binom{\lambda}{p}}$, und sie verschwinden identisch, sobald $p+q \gtrless \lambda$.

3) Wenn $\lambda = 1$ ist, so hat man einfach:

$$(x_1^{k-r}\,x_2^{r},\ x_1^{m-\varrho}\,x_2^{\varrho})_1 = \begin{vmatrix} k-r & m-\varrho \\ r & \varrho \end{vmatrix} \cdot \frac{x_1^{m+k-r-\varrho-1}\,x_2^{r+\varrho-1}}{km},$$

§ 4.

Die einfachsten Covarianten von f.

Wendet man diese Regeln auf die Form f an, so erhält man zuvörderst folgende zwei Formen, welche, wie f, gleichen Grades in den x und y sind:

$$(8)\quad \varphi = \tfrac{3}{4}(f,f)_{1,1} = y_1^4 x_1 x_2^3 - y_1^3 y_2 x_1^4 - 3 y_1^2 y_2^2 x_1^2 x_2^2 + y_1 y_2^3 x_2^4 + y_2^4 x_1^3 x_2,$$

$$(9)\quad \psi = 12(f,\varphi)_{1,1} = y_1^5(x_1^5 + x_2^5) - 10 y_1^4 y_2 x_1^3 x_2^2 + 10 y_1^3 y_2^2 x_1 x_2^4$$
$$+ 10 y_1^2 y_2^3 x_1^4 x_2 + 10 y_1 y_2^4 x_1^2 x_2^3 + y_2^5(-x_1^5 + x_2^5).$$

Man betrachte ferner f einen Augenblick als eine Form, welche die x allein enthält, also als binäre cubische Grundform im gewöhnlichen Sinne. So hat man die Covariante:

$$(10)\quad \tau = \tfrac{9}{2}(f,f)_{2,0} = x_1^2 y_1^6 - 3 x_2^2 y_1^5 y_2 - 10 x_1 x_2 y_1^3 y_2^3 + 3 x_1^2 y_1 y_2^5 + x_2^2 y_2^6,$$

die Functionaldeterminante:

$$(11)\quad (f,\tau)_{1,0} = \tfrac{1}{3}\{-x_1^3 y_1^9 - 9 x_1 x_2^2 y_1^8 y_2 - 12 x_1^2 x_2 y_1^6 y_2^3$$
$$+ 18 x_2^3 y_1^5 y_2^4 - 18 x_1^3 y_1^4 y_2^5 - 12 x_1 x_2^2 y_1^3 y_2^6$$
$$+ 9 x_1^2 x_2 y_1 y_2^8 - x_2^3 y_2^9\},$$

und die Invariante:

$$(12)\qquad (\tau,\tau)_{2,0} = -6\,\gamma_1.$$

Auf solche Weise kommt man, wie nebenbei bemerkt sei, von f ausgehend, zum Ikosaeder γ_1 zurück.

Auf analoge Weise (oder durch Vertauschung von x und y) berechnet sich:

$$(13)\quad \tau' = \tfrac{9}{2}(f,f)_{0,2} = y_1^2(x_2^6 - 3 x_1^5 x_2) + 10 x_1^3 x_2^3 y_1 y_2 + y_2^2(x_1^6 + 3 x_1 x_2^5),$$

$$(14)\quad (f,\tau')_{0,1} = \tfrac{1}{3}\{y_1^3(18 x_1^5 x_2^4 - x_2^9) + 3 y_1^2 y_2(3 x_1^8 x_2 + 4 x_1^2 x_2^6)$$
$$+ 3 y_1 y_2^2(-4 x_1^6 x_2^3 + 3 x_1 x_2^8) + y_2^3(x_1^9 + 18 x_1^4 x_2^5)\},$$

$$(15)\quad (\tau',\tau)_{0,2} = -6\,\gamma_1'.$$

Ich bilde ferner die Functionaldeterminanten:

$$(16)\quad (f,\varphi)_{1,0} = \tfrac{1}{12}\{5x_1^2x_2^3y_1^7 + (4x_1^5 - 3x_2^5)y_1^6y_2 + 15x_1^3x_2^2y_1^5y_2^2$$
$$+ 25x_1x_2^4y_1^4y_2^3 - 25x_1^4x_2y_1^3y_2^4$$
$$+ 15x_1^2x_2^3y_1^2y_2^5 - (4x_2^5 + 3x_1^5)y_1y_2^6 - 5x_1^3x_2^2y_2^7\},$$

$$(17)\quad (f,\psi)_{1,0} = \tfrac{1}{3}\{(2x_1x_2^5 - x_1^6)y_1^8 - 5x_1^4x_2^2y_1^7y_2$$
$$+ 35x_1^2x_2^4y_1^6y_2^2 - (14x_1^5x_2 + 7x_2^6)y_1^5y_2^3 - (14x_1x_2^5 - 7x_1^6)y_1^3$$
$$+ 35x_1^4x_2^2y_1^2y_2^6 + 5x_1^2x_2^4y_1y_2^7 - (x_2^6 + 2x_1^5x_2)y_2^8\},$$

$$(18)\quad (\varphi,\varphi)_{2,0} = -\tfrac{1}{8}\{x_2^4y_1^8 + 8x_1^3x_2y_1^7y_2 - 4x_1x_2^3y_1^6y_2^2 - 8x_1^4y_1^5y_2^3 + 30x_1^2x_2^2y_1^4$$
$$+ 8x_2^4y_1^3y_2^5 + 4x_1^3x_2y_1^2y_2^6 + 8x_1x_2^3y_1y_2^7 + x_1^4y_2^8\},$$

und analog:

$$(19)\quad (f,\varphi)_{0,1} = \tfrac{1}{12}\{-y_1^5(4x_1x_2^6 + 3x_1^6x_2) - 25y_1^4y_2x_1^4x_2^3$$
$$+ y_1^3y_2^2(5x_1^7 + 15x_1^2x_2^5) - y_1^2y_2^3(15x_1^5x_2^2 - 5x_2^7) - 25x_1^3x_2^4y_1$$
$$+ y_2^5(3x_1x_2^6 - 4x_1^6x_2)\},$$

$$(20)\quad (f,\psi)_{0,1} = \tfrac{1}{3}\{y_1^6(-x_2^8 - 7x_1^5x_2^3) + y_1^5y_2(-2x_1^8 + 14x_1^3x_2^5)$$
$$+ y_1^4y_2^2(5x_1x_2^7 + 35x_1^6x_2^2) + y_1^2y_2^4(-5x_1^7x_2 + 35x_1^2x$$
$$+ y_1y_2^5(2x_2^8 + 14x_1^5x_2^3) + y_2^6(-x_1^8 + 7x_1^3x_2^5)\},$$

$$(21)\quad (\varphi,\varphi)_{0,2} = -\tfrac{1}{8}\{y_1^4(x_1^8 + 8x_1^3x_2^5) + 4y_1^3y_2(x_1^6x_2^2 - 2x_1x_2^7) + 30x_1^4x_2^4y_1^2y_2^2$$
$$- 4y_1y_2^3(5x_1^7x_2 + x_1^6x_2^2) + y_2^4(-8x_1^5x_2^3 + x_2^8)\}.$$

Ich berechne endlich die dritte Ueberschiebung von f und φ hinsichtlich der x:

$$(22)\quad (f,\varphi)_{3,0} = \tfrac{1}{4}\Theta = \tfrac{1}{4}\{x_2y_1^7 - 7x_1y_1^5y_2^2 - 7x_2y_1^2y_2^5 - x_1y_2^7\},$$

und die dritte Ueberschiebung derselben Formen hinsichtlich der y:

$$(23)\quad (f,\varphi)_{0,3} = \tfrac{1}{4}\Theta' = \tfrac{1}{4}\{y_1(x_1^7 - 7x_1^2x_2^5) + y_2(x_2^7 + 7x_1^5x_2^2)\}.$$

So habe ich diejenigen Formen gewonnen, welche sich als die einfachsten erweisen werden, insofern sich aus ihnen durch wenige Rechnung das von uns gesuchte volle System zusammensetzen lässt. Ich will die zehn Formen:

$$f,\ \varphi,\ \psi,\ \tau,\ (f,\tau)_{1,0},\ (f,\varphi)_{1,0},\ (f,\psi)_{1,0},\ \gamma_1,\ (\varphi,\varphi)_{2,0},\ \Theta$$

als *Formen* U, die entsprechenden:

$$f,\ \varphi,\ \psi,\ \tau',\ (f,\tau')_{0,1},\ (f,\varphi)_{0,1},\ (f,\psi)_{0,1},\ \gamma_1',\ (\varphi,\varphi)_{0,2},\ \Theta'$$

als *Formen* U' bezeichnen. Unter den Formen U beachte man besonders das Θ, unter den U' das Θ', insofern Θ und Θ' in der einen Reihe der Variablen linear sind. —

Unter den einfachen Ueberschiebungen von f, φ, ψ sind vorstehend folgende nicht aufgezählt:

$$(f,\varphi)_{2,0},\quad (f,\psi)_{2,0},\quad (\varphi,\psi)_{1,0},\quad (\varphi,\psi)_{2,0},\quad (\psi,\psi)_{2,0}$$

(sowie die entsprechenden, welche sich durch Vertauschung von x und y ergeben). In der That sind diese Formen reducibel; die Betrachtung der Anfangsglieder zeigt, dass sie folgende Werthe haben:

$$0,\quad -\tfrac{5}{3}(\varphi,\varphi)_{2,0},\quad \tfrac{1}{4}\Theta\tau',\quad \tfrac{1}{2}f\tau,\quad 2\varphi\tau.$$

§ 5.

Die Form Θ.

Ich werde jetzt folgenden Satz beweisen:

Jede ganze Function der U, deren Grad in den y um mindestens 8 Einheiten grösser ist, als der Grad in den x, lässt sich in der Form darstellen:

$$(A,\Theta)_{1,0}+B\cdot\Theta,$$

wo A eine ganze Function der U und der Ueberschiebungen $(U,\Theta^{i})_{k,0}$ bedeutet. Ausgenommen ist nur die Form γ_1.

In der That, wenn von γ_1 abgesehen wird, muss jedes Glied einer solchen ganzen Function der U entweder ein Product der Functionaldeterminanten

$$(f,\tau)_{1,0},\quad (f,\varphi)_{1,0},\quad (f,\psi)_{1,0}$$

oder einen der folgenden Doppelfactoren enthalten:

$$\tau^2,\quad \tau\cdot(f,\tau)_{1,0},\quad \tau\cdot(\varphi,\varphi)_{2,0},\quad (f,\tau)_{1,0}\cdot(\varphi,\varphi)_{2,0},\quad ((\varphi,\varphi)_{2,0})^2,$$
$$\gamma_1 f,\quad \gamma_1\varphi,\quad \gamma_1\psi,\quad \gamma_1\tau,\quad \gamma_1^2,\quad \gamma_1(f,\tau)_{1,0},\quad \gamma_1(f,\varphi)_{1,0},\quad \gamma_1(f,\psi)_{1,0}.$$

Aber die Producte der Functionaldeterminanten sind ohne Weiteres auf niedere Bildungen zurückführbar und die aufgezählten Doppelfactoren lassen sich (durch Beachtung der Anfangsglieder) in folgende Ausdrücke umsetzen, welche sich unmittelbar in der Gestalt $(A,\Theta)_{1,0}+B\Theta$ schreiben lassen:

$$(\psi,\Theta)_{1,0};\quad (f,(\psi,\Theta)_{1,0})_{1,0};\quad \tfrac{2}{3}f(\varphi,\Theta)_{1,0}-\tfrac{3}{4}\Theta(f,\varphi)_{1,0};$$
$$\tfrac{3}{4}(f,\varphi)_{1,0}(f,\Theta)_{1,0}-\tfrac{1}{6}\varphi\tau\Theta;\quad \tfrac{1}{125}f^2(f,\Theta)_{1,0}+\tfrac{1}{64}\Theta^2\tau';$$
$$-\tfrac{1}{3}((\varphi,\varphi)_{2,0},\Theta)_{1,0};\quad -\tfrac{1}{5}f(\tau,\Theta)_{1,0}-\tfrac{2}{5}\Theta(f,\tau)_{1,0};$$
$$-\varphi(\tau,\Theta)_{1,0}+f\Theta^2;\quad -(\varphi,\Theta^2)_{2,0};\quad \tfrac{1}{5}(f,\Theta^3)_{3,0};$$
$$-(f,(\varphi,\Theta^2)_{2,0})_{1,0};\quad (f,-\tfrac{1}{5}f(\tau,\Theta)_{1,0}-\tfrac{2}{5}\Theta(f,\tau)_{1,0})_{1,0};$$
$$(f,-\varphi(\tau,\Theta)_{1,0}+f\Theta^2)_{1,0}.$$

Das ausgesprochene Theorem ist also bewiesen.

§ 6.

Umgrenzung des vollen Formensystems.

Ich behaupte nun:

Jede Function V der x, y, welche sich bei den zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen nicht ändert, ist eine ganze Function der Formen:

$$U, \quad U', \quad (U, \Theta^s)_{s,0}, \quad (U', \Theta'^s)_{0,s}.$$

Der Beweis gestaltet sich folgendermassen einfach. Es sei der Grad von V in den x gleich μ, der Grad in den y gleich ν, und man habe zunächst $\nu \geqq \mu$. So werde ich sogleich zeigen, dass V in folgende Gestalt gesetzt werden kann:

$$V = \mathsf{A} + \mathsf{B} \cdot \Theta,$$

wo A eine ganze Function der U und $(U, \Theta^s)_{s,0}$ ist, während B weiter zu untersuchen ist. Aber B ist dann selbst eine Function, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen nicht ändert; es ist also, wenn sein Grad in den y grösser als sein Grad in den x oder dem letzteren gleich ist, derselben Darstellung fähig; im umgekehrten Falle einer analogen Darstellung durch die U', Θ'. Da nun der Grad von B in den x und y kleiner ist, als der Grad von V, so erhält man offenbar, so vorwärts schliessend, das ausgesprochene Theorem, w. z. b.

Um jetzt die Gleichung:

$$V = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$$

zu beweisen, betrachte ich die Ueberschiebungen von V mit Potenzen von Θ:

$$V, \quad (V, \Theta)_{1,0}, \quad (V, \Theta^2)_{2,0}, \cdots\cdots (V, \Theta^\mu)_{\mu,0}.$$

Von diesen ist die letzte sicher in der Form

$$\mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$$

darstellbar. Denn sie enthält nur noch die y und ist also eine ganze Function der $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, von denen γ_1 selbst zu den U gehört, während sich γ_2, γ_3 folgendermassen definiren lassen:

$$\gamma_2 = (\tau, \Theta^2)_{2,0}, \tag{24}$$

$$\gamma_3 = -3\,((f, \tau)_{1,0}, \Theta^3)_{3,0}. \tag{25}$$

Es ist also:

$$(V, \Theta^\mu)_{\mu,0} = \mathsf{A}$$

und um so mehr

$$= \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta.$$

Jetzt sei $(V, \Theta^\lambda)_{\lambda,0}$ unter der Reihe der angegebenen Ueberschiebungen die *erste*, welche sich in der Gestalt $\mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$ darstellen lässt; ich will zeigen, dass λ gleich Null sein muss. Hierzu dient der Satz des vorigen Paragraphen.

Wäre nämlich in

$$(V, \Theta^{\lambda})_{\lambda, 0} = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$$

$\lambda > 0$, so wäre in A der Grad in den y um mindestens 8 Einheiten grösser als der Grad in den x; mithin wäre, nach dem vorigen Paragraphen, A entweder γ_1 oder es liesse sich in die Form setzen $\mathsf{A} = (A, \Theta)_{1,0} + B\Theta$. Aber A kann nicht γ_1 sein. Man betrachte, um dies einzusehen, einen Augenblick die in den x lineare Form $(\tau, \Theta)_{1,0}$. Wäre $(V, \Theta^{\lambda})_{\lambda, 0}$ gleich γ_1, so würde $((V, \Theta^{\lambda-1})_{\lambda-1, 0}, (\tau, \Theta)_{1,0})_{1,0}$ eine Form von dem Grade 18 in den y allein sein, also verschwinden. Das würde heissen, dass $\frac{(\tau, \Theta)_{1,0}}{(V, \Theta^{\lambda-1})_{\lambda-1, 0}}$ nur von den y abhängig ist, was absurd ist, da man $(\tau, \Theta)_{1,0}$ nicht in Factoren zerfällen kann*). Also ist $\mathsf{A} = (A, \Theta)_{1,0} + B\Theta$ und mithin:

$$(V, \Theta^{\lambda})_{\lambda, 0} = (A, \Theta)_{1,0} + (B + \mathsf{B})\Theta.$$

Schiebt man hier beiderseits $(\mu - \lambda)$-mal nach Θ über, so folgt:

$$(V, \Theta^{\mu})_{\mu, 0} = (A, \Theta^{\mu-\lambda+1})_{\mu-\lambda+1, 0}.$$

Das heisst: die Differenz $(V, \Theta)^{\lambda-1})_{\lambda-1, 0} - A$ ist durch Θ theilbar, im Widerspruche mit unserer Voraussetzung, der zufolge $(V, \Theta^{\lambda})_{\lambda, 0}$ die niedrigste Ueberschiebung war, welche sich in der Gestalt $\mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$ darstellen liess. — Also ist $\lambda = 0$ und V selbst $= \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$, w. z. b.

§ 7.

Aufstellung des Formensystems.

Man erhält jetzt das gesuchte Formensystem, wenn man unter den U, U', $(U, \Theta^{\kappa})_{\kappa, 0}$, $(U', \Theta'^{\kappa})_{0, \kappa}$ nur noch diejenigen ausschliesst, die sich durch niedere ausdrücken lassen (die *reducibel* sind, wie ich gewöhnlich sage). Die Betrachtung der Anfangsglieder zeigt**), dass folgende und nur folgende Formen reducibel sind:

für jedes s: $(\psi, \Theta^{s})_{s,0}$; $((\varphi, \varphi)_{2,0}, \Theta^{s})_{s,0}$; $((f, \psi)_{1,0}, \Theta^{s})_{s,0}$;

für $s > 1$: $(\varphi, \Theta^{s})_{s,0}$; $((f, \varphi)_{1,0}, \Theta^{s})_{s,0}$,

sowie die entsprechenden, die sich durch Vertauschung von x und y ergeben.

Sonach bleiben die folgenden 36 Formen übrig, welche das von uns gesuchte volle System bilden:

---

*) Diese auch im Folgenden sehr wichtige Form lautet ausgerechnet:

$(\tau, \Theta)_{1,0} = x_1 y_1^{13} - 26 x_2 y_1^{10} y_2^{3} - 39 x_1 y_1^{9} y_2^{4} + 39 x_2 y_1^{4} y_2^{9} - 26 x_1 y_1^{3} y_2^{10} + x_2 y_2^{13}$.

**) Man benutze die Relationen:

$$(\varphi, \Theta^2)_{2,0} = -\gamma_1 \tau,$$
$$(\psi, \Theta)_{1,0} = \tau^2.$$

Formensystem für

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1								Θ'		
2							τ'			
3				f						$(f,\tau')_{0,1}$
4					φ				$(\varphi,\varphi)_{0,2}$	
5						ψ		$(f,\varphi)_{0,1}$		
6			τ						$(f,\psi)_{0,1}$	
7		Θ				$(f,\varphi)_{1,0}$				
8					$(\varphi,\varphi)_{2,0}$		$(f,\psi)_{1,0}$			
9				$(f,\tau)_{1,0}$						
10			$(f,\Theta)_{1,0}$							
11				$(\varphi,\Theta)_{1,0}$						
12	γ_1									
13		$(\tau,\Theta)_{1,0}$								
14					$((f,\varphi)_{1,0},\Theta)_{1,0}$					
16			$((f,\tau)_{1,0},\Theta)_{1,0}$							
17		$(f,\Theta^2)_{2,0}$								
20	γ_2									
23		$((f,\tau)_{1,0},\Theta^2)_{2,0}$								
30	γ_3									

In der ersten Horizontalreihe sind die Grade angegeben, welche die Formen in den x besitzen; die Grade in den y stehen in der ersten Verticalreihe.

Wie man sieht, sind alle Formen zugleich Covarianten von f. Da aber umgekehrt jede Covariante von f nothwendig zu den von uns betrachteten Formen gehört, so giebt die vorstehende Tabelle zugleich *das volle System der Covarianten, welches die Form f besitzt.*

§ 8.

Relationen zwischen den Formen des Systems.

Jede ganze Function V der x, y, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen nicht ändert, ist eine ganze Function der Formen des Systems. Aber man kann die Art dieser Darstellung noch einschränken, wenn man die Betrachtungen weiter verfolgt, durch die im § 6. die Vollständigkeit des Systems erschlossen wurde. Ich will dies hier nur in dem besonderen Falle thun, in welchem der Grad in den y von dem Grade in den x höchstens um 6 Einheiten verschieden ist, und zwar sei, wie ich zunächst annehmen will, sofern überhaupt eine Differenz das Ikosaeder.

10	11	12	13	14	16	17	20	23	[illegible]
		γ_1'					γ_2'		γ
			$(\tau', \Theta')_{0,1}$			$(f, \Theta'^2)_{0,2}$		$((f, \tau')_{0,1}, \Theta'^2)_{0,2}$	
$(f, \Theta')_{0,1}$					$((f, \tau')_{0,1}, \Theta')_{0,1}$				
	$(\varphi, \Theta')_{0,1}$								
				$((f, \varphi)_{0,1}, \Theta')_{0,1}$					

besteht, der Grad in den y der grössere. Dann kann man nach § 6. schreiben:

$$V = \mathsf{A} + \mathsf{B} \cdot \Theta,$$

wo A eine ganze Function der U, $(U, \Theta')_{x,0}$ bedeutet. Nun ist aber bei allen $(U, \Theta')_{x,0}$, wie die vorstehende Tabelle zeigt, der Grad in den y um mehr als 6 Einheiten grösser, als der Grad in den x; die $(U, \Theta')_{x,0}$ können also in A nicht auftreten, ebensowenig wie γ_1. Unter den *Producten* solcher U, welche in den x und y verschiedenen Grad haben, kommen aus demselben Grunde höchstens die Producte der Functionaldeterminanten $(f, \varphi)_{1,0}$, $(f, \psi)_{1,0}$, $(f, \tau)_{1,0}$ in Betracht; aber sie sind, wie schon oben bemerkt, reducibel. Daher also haben wir den Satz:

A *enthält neben* f, φ, ψ *nur noch höchstens linear:*

$$\tau, \quad (\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad (f, \varphi)_{1,0}, \quad (f, \psi)_{1,0}, \quad (f, \tau)_{1,0}.$$

Untersuchen wir jetzt B. Sein Grad in den y ist nicht grösser als sein Grad in den x, aber höchstens um 6 Einheiten kleiner. B ist daher derselben Darstellung fähig wie V, nur dass die U' an die Stelle der U getreten sind:

$$\mathsf{B} = \mathsf{A}' + \mathsf{B}' \cdot \Theta'.$$

Die Function B' lässt sich wieder wie das ursprüngliche V behandeln, und so weiter fort. Beachtet man jetzt, dass

$$\Theta\Theta' = f\psi - 8\varphi^2,$$

so sieht man, dass schliesslich folgende Darstellung von V resultirt:

$$V = P + P' \cdot \Theta.$$

Hier sind P, P' ganze Functionen von f, φ, ψ, welche einige der Functionen

$$\tau, \quad (\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad (f, \varphi)_{1,0}, \quad (f, \psi)_{1,0}, \quad (f, \tau)_{1,0},$$

resp. der Functionen

$$\tau', \quad (\varphi, \varphi)_{0,2}, \quad (f, \varphi)_{0,1}, \quad (f, \psi)_{0,1}, \quad (f, \tau')_{0,1},$$

aber diese nur linear enthalten können.

Die analoge Darstellung:

$$V = Q' + Q \cdot \Theta'$$

ergiebt sich natürlich, wenn der Grad von V in den x nicht kleiner als der Grad in den y ist.

Hat V gleichen Grad in den x und y, so lässt es sich sowohl in der einen als in der anderen Form darstellen. Dann ist P, bez. Q' eine Function von f, φ, ψ allein, und P' resp. Q ist nothwendig gleich einer Function von f, φ, ψ, multiplicirt mit $(f, \tau')_{0,1}$ oder $(f, \tau)_{1,0}$. Nun ist:

(26) $$(f, \tau')_{0,1}\Theta + (f, \tau)_{1,0}\Theta' = 9f^2\varphi - \tfrac{1}{3}\psi^2.$$

Führen wir also folgende Bezeichnung ein, die späterhin immer festgehalten werden soll:

(27) $$\Delta = (f, \tau')_{0,1}\Theta - (f, \tau)_{1,0}\Theta',$$

so haben wir folgenden Satz:

Alle Functionen V, welche gleichen Grad in den x und y besitzen, sind ganze Functionen von f, φ, ψ und Δ.

Bei Vertauschung von x und y ändert Δ sein Vorzeichen, während f, φ, ψ ungeändert bleiben. Daher:

Alle Functionen V, welche bei Vertauschung von x und y ungeändert bleiben, sind ganze Functionen von f, φ, ψ allein.

Insbesondere aber ist Δ^2 eine ganze Function von f, φ, ψ; vergl. Formel (30) des folgenden Paragraphen.

§ 9.

Associirte Formen.

Ich behaupte jetzt:

*Alle Formen des Systems lassen sich **rational** darstellen durch folgende fünf Functionen:*

$$f, \quad \varphi, \quad \psi, \quad \frac{\tau}{\Theta}, \quad \frac{(f, \tau)_{1,0}}{\Theta} = c,$$

zwischen denen die eine Relation besteht:

(28) $$L c^2 - M c + N = 0.$$

Hier ist:

(29) $$\begin{cases} L = \Theta\Theta' = f\psi - 8\varphi^2, \\ M = (f,\tau)_{1,0}\Theta' + (f,\tau')_{0,1}\Theta = 9f^2\varphi - \tfrac{1}{3}\psi^2, \\ 9N = 9(f,\tau)_{1,0}(f,\tau')_{0,1} = -27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi, \end{cases}$$

und

(30) $$\sqrt{M^2 - 4LN} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\psi^4 - 256\varphi^5 + 320f\varphi^3\psi - 90f^2\varphi\psi^2 - 135f^4\varphi^2 + 108f^5\psi}$$
$$= (f,\tau)_{1,0}\Theta' - (f,\tau')_{0,1}\Theta = \Delta,$$

wo Δ die im vorigen Paragraphen eingeführte Grösse bedeutet.

Zum Beweise betrachte man zunächst die Formel:

(31) $$\tau^3(f\psi - 8\varphi^2) = \Theta^2(8\varphi^3 - 9f\varphi\psi) - 3\psi^2\Theta(f,\tau)_{1,0},$$

die sich am einfachsten aus den sogleich aufzustellenden Relationen durch Elimination ergiebt. Sie gestattet, wie man sieht, τ und also Θ und $(f,\tau)_{1,0}$ rational durch $f, \varphi, \psi, \frac{\tau}{\Theta}, c$ darzustellen. Berechnen wir ferner $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Man findet (immer durch die Betrachtung geeigneter Anfangsglieder):

(32) $$\tau^3 = 9((f,\tau)_{1,0})^2 - 27\gamma_1 f^2$$

und diese Formel giebt γ_1. Man hat sodann für γ_2:

(33) $$\tau\gamma_2 = ((\tau,\Theta)_{1,0})^2 - 3\gamma_1\Theta^2,$$

und für das hier auftretende $(\tau,\Theta)_{1,0}$ folgende zwei Formeln, die ich beide hersetze, da ich sie später benutze:

(34) $$\begin{cases} f\Theta^2 = \varphi(\tau,\Theta)_{1,0} + \gamma_1\psi, \\ f(\tau,\Theta)_{1,0} + 3\Theta(f,\tau)_{1,0} = -8\gamma_1\varphi. \end{cases}$$

Man entnimmt endlich den Werth von γ_3 einer beliebigen der folgenden beiden Formeln:

(35) $$\begin{cases} f\gamma_3 = \Theta(\tau,\Theta)_{1,0}^2 + \gamma_1\Theta^3 - 21\gamma_1^2(f,\tau)_{1,0}, \\ \varphi\gamma_3 = \Theta^3(\tau,\Theta)_{1,0} + 3\gamma_1(f,\tau)_{1,0}(\tau,\Theta)_{1,0} + 30\gamma_1^2 f\Theta. \end{cases}$$

Nehmen wir nun nachstehende Formel für $(\varphi,\varphi)_{2,0}$ hinzu:

(36) $$8\tau^2(\varphi,\varphi)_{2,0} + f^2\Theta^2 = \gamma_1(16\varphi^2 - 8f\psi),$$

so gelingt es, die noch übrigen Formen des Systems, bei denen der Grad in den y grösser als der Grad in den x ist:

$$(f,\varphi)_{1,0};\quad (f,\psi)_{1,0};\quad (f,\Theta)_{1,0};\quad (\varphi,\Theta)_{1,0};\quad ((f,\tau)_{1,0},\Theta)_{1,0};$$
$$((f,\varphi)_{1,0},\Theta)_{1,0};\quad (f,\Theta^2)_{2,0};\quad ((f,\tau)_{1,0},\Theta^2)_{2,0},$$

durch blosse Anwendung des Identitätssatzes auszudrücken. Man hat z. B.:

$$
(37) \begin{cases} (f,\varphi)_{1,0}\cdot\tau = \varphi(f,\tau)_{1,0} - f(\varphi,\tau)_{1,0}, \text{ und } (\varphi,\tau)_{1,0}, \text{ welches nicht} \\ \qquad\qquad \text{dem Systeme angehört, gleich } -\frac{3}{4}f\Theta, \\ ((f,\tau)_{1,0},\Theta)_{1,0}\cdot f = \Theta((f,\tau)_{1,0},f)_{1,0} + (f,\tau)_{1,0}\cdot(f,\Theta)_{1,0} \text{ und} \\ \qquad\qquad ((f,\tau)_{1,0},f)_{1,0} \text{ gleich } -\frac{\tau^2}{9}, \end{cases}
$$

und so fort.

Die Formen, deren Grad in den x grösser ist als der Grad in den y, sind ebenfalls sofort erledigt. Denn sie lassen sich, dem Voranstehenden entsprechend, jedenfalls durch f, φ, ψ, τ', Θ', $(f,\tau')_{0,1}$ rational ausdrücken und diese führen auf f, φ, ψ, τ, Θ, $(f,\tau)_{1,0}$ zurück durch die Formeln:

$$
(38) \begin{cases} \tau\tau' = 4\varphi^2 - 3f\psi, \\ \Theta\Theta' = f\psi - 8\varphi^2, \\ 9(f,\tau)_{1,0}(f,\tau')_{0,1} = -27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi, \end{cases}
$$

von denen die beiden letzten bereits oben benutzt wurden.

Hiermit ist der Beweis unserer Behauptung erbracht. Fügen wir nun noch zu, dass solche rationale Functionen der Formen des Systems, welche in den x und y denselben Grad haben, in f, φ, ψ, c rational sind. Denn $\frac{\tau}{\Theta}$ ist unter den fünf associirten Formen die einzige, welche in den x und den y nicht denselben Grad hat.

Ein Beispiel hierfür, welches ich später benutze, ist dieses. Man findet aus (32), (33):

$$
(39) \qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^3} = \frac{\left(\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}^2}{\gamma_1^2} - 8\frac{\Theta^2}{\gamma_1}\right)^3}{9\frac{((f,\tau)_{1,0})^2}{\gamma_1} - 27f^2},
$$

und hier ist rechter Hand vermöge der Formeln (34):

$$
(40) \qquad \frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1} = -\frac{8f\varphi + 3\varphi c}{f^2 + 3c\varphi},
$$

$$
(41) \qquad \frac{\Theta^2}{\gamma_1} = -\frac{8\varphi^2 - f\psi}{f^2 + 3c\varphi},
$$

$$
(42) \qquad 9\frac{((f,\tau)_{1,0})^2}{\gamma_1} - 27f^2 = \frac{\Theta^2}{\gamma_1}\cdot\varphi - \frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1}\cdot\psi.
$$

Ich füge noch folgende Relation hinzu, die sich aus Gl. (35) ergiebt:

$$
(43) \qquad \frac{\Theta\gamma_2}{\gamma_1^3} = \frac{\frac{\Theta^4}{\gamma_1^2}\cdot\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1} + 3c\frac{\Theta^2}{\gamma_1}\cdot\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1} + 30f\frac{\Theta^2}{\gamma_1}}{\varphi}.
$$

Hier treten rechts neben c, f, φ wieder nur diejenigen Ausdrücke auf, die in (40), (41) berechnet sind.

Abschnitt II.

Tetraedersubstitionen.

§ 1.

Definition der Tetraedersubstitutionen.

In der Gruppe der 120 Ikosaedersubstitutionen giebt es Untergruppen, welche dem *Tetraedertypus* angehören. Eine derselben, mit der wir uns insbesondere beschäftigen wollen*), ist durch nachstehende Formeln gegeben; sie verwandelt y_1, y_2 der Reihe nach in folgende 24 Ausdrücke:

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\pm y_1, & \pm y_2, \\
\mp y_2, & \pm y_1, \\
\pm \dfrac{y_1(\varepsilon^{2\lambda}+\varepsilon^{3\lambda})+y_2}{\varepsilon^{\lambda}-\varepsilon^{4\lambda}}, & \pm \dfrac{y_1-y_2(\varepsilon^{2\lambda}+\varepsilon^{3\lambda})}{\varepsilon^{\lambda}-\varepsilon^{4\lambda}}, \\
\pm \dfrac{y_1(1+\varepsilon^{\lambda})+\varepsilon^{2\lambda}y_2}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, & \pm \dfrac{y_1-(\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda})y_2}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, \\
\mp \dfrac{y_1-y_2(\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda})}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, & \pm \dfrac{y_1(1+\varepsilon^{\lambda})+\varepsilon^{2\lambda}y_2}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, \qquad [\lambda=1,2,3,4].
\end{array}\right.
$$

Ungeändert bleiben bei diesen Substitutionen, wie bekannt, drei Hauptformen, welche in unserem Falle folgende Gestalt annehmen.

$$
\begin{aligned}
(2)\quad g_1 &= y_1^6+2y_1^5y_2-5y_1^4y_2^2-5y_1^2y_2^4-2y_1y_2^5+y_2^6 \\
&= (y_1^2+y_2^2)(y_1^2-2(\varepsilon+\varepsilon^4)y_1y_2-y_2^2)(y_1^2-2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)y_1y_2-y_2^2), \\
(3)\quad g_2 &= -\tfrac{9}{8}(g_1,g_1)_{0,2} = y_1^8-y_1^7y_2+7y_1^6y_2^2+7y_1^5y_2^3-7y_1^3y_2^5+7y_1^2y_2^6 \\
&\quad +y_1y_2^7+y_2^8 = (y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon)^2-\varepsilon^2y_2^2)(y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon^2)^2-\varepsilon^4y_2^2) \\
&\quad \cdot(y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon^3)^2-\varepsilon y_2^2)(y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon^4)^2-\varepsilon^3y_2^2), \\
(4)\quad g_3 &= (g_1,g_2) = -11y_1^{12}+84y_1^{11}y_2+66y_1^{10}y_2^2+220y_1^9y_2^3-165y_1^8y_2^4 \\
&\quad +264y_1^7y_2^5+934y_1^6y_2^6-264y_1^5y_2^7-165y_1^4y_2^8-220y_1^3y_2^9 \\
&\quad +66y_1^2y_2^{10}-84y_1y_2^{11}-11y_2^{12}.
\end{aligned}
$$

Zwischen ihnen besteht die Relation:

$$
(5)\qquad g_3^2 = 256g_2^3 - 135g_1^4.
$$

Alle anderen ganzen Functionen von y_1, y_2, die bei den Substitutionen (1) ungeändert bleiben, sind ganze Functionen von g_1, g_2, g_3.

Neben den Variablen y_1, y_2 betrachte man jetzt andere Variable

*) Die Substitutionen der anderen Tetraedergruppen erhält man, wenn man, unter ν eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3, 4 verstanden, in die Formeln (1) statt y_1, y_2 einträgt $\varepsilon^{\nu}y_1$, $\varepsilon^{4\nu}y_2$ und die so entstehenden Ausdrücke $\varepsilon^{\nu}y_1$, bez. $\varepsilon^{4\nu}y_2$ gleichsetzt.

x_1, x_2. Sie werden denjenigen Substitutionen unterworfen, welche aus (1) entstehen, wenn man ε in ε^2 verwandelt. Dadurch gehen x_1, x_2 der Reihe nach in folgende 24 Ausdrücke über:

$$(6)\quad \begin{cases} \qquad\qquad \pm x_1, \quad \pm x_2, \\ \qquad\qquad \mp x_2, \quad \pm x_1, \\ \pm \dfrac{x_1(\varepsilon^\lambda + \varepsilon^{4\lambda}) + x_2}{\varepsilon^{2\lambda} - \varepsilon^{3\lambda}}, \quad \pm \dfrac{x_1 - x_2(\varepsilon^\lambda + \varepsilon^{4\lambda})}{\varepsilon^{2\lambda} - \varepsilon^{3\lambda}}, \\ \pm \dfrac{x_1(1+\varepsilon^{2\lambda}) + \varepsilon^{4\lambda}x_2}{1 - \varepsilon^{4\lambda}}, \quad \mp \dfrac{x_1 - x_2(\varepsilon^{2\lambda} + \varepsilon^{4\lambda})}{1 - \varepsilon^{4\lambda}}, \\ \mp \dfrac{x_1 - (\varepsilon^{2\lambda} + \varepsilon^{4\lambda})x_2}{1 - \varepsilon^{4\lambda}}, \quad \pm \dfrac{x_1(1+\varepsilon^{2\lambda}) + \varepsilon^{4\lambda}x_2}{1 - \varepsilon^{4\lambda}}, \quad [\lambda = 1, 2, 3, 4]. \end{cases}$$

Wie man sieht, stimmt die Gesammtheit der Ausdrücke (6) mit der Gesammtheit der Ausdrücke (1) überein.

Nun frage man wieder nach allen homogenen ganzen Functionen der y_1, y_2 und x_1, x_2, welche ungeändert bleiben, wenn man *gleichzeitig* auf die y die Substitutionen (1), auf die x die Substitutionen (6) anwendet. Ich will im Folgenden der Kürze wegen solche Functionen als *Tetraederformen* bezeichnen, während ich die Ausdrücke, mit denen sich der vorige Abschnitt beschäftigte, *Ikosaederformen* nennen werde.

Von Tetraederformen kennen wir zunächst g_1, g_2, g_3, und ihnen können wir sofort drei andere, g_1', g_2', g_3', hinzufügen, die sich aus den g_1, g_2, g_3 durch Vertauschung der x und y ergeben. Denn der im vorigen Abschnitte so genannte Process bleibt offenbar hier in Gültigkeit.

§ 2.

Das volle System der Tetraederformen.

Beginnen wir wieder damit, diejenige Tetraederform zu suchen, welche in den x und den y gleichzeitig vom niedrigsten Grade ist. Dies wird, wie sich sofort ergiebt, eine *bilineare* Form, und in diesem Umstande ist es begründet, dass die hier zu entwickelnden Verhältnisse sehr viel einfacher sind, als die analogen des vorigen Abschnittes. — Man betrachte zunächst nur diejenigen Substitutionen (1) und (6), welche y_1, y_2 in $-y_2$, y_1 und x_1, x_2 in $-x_2$, x_1 überführen. Durch sie bleibt, für beliebigen Werth von c, die bilineare Form ungeändert:

$$(-y_1x_2 + y_2x_1) - c\,(y_1x_1 + y_2x_2).$$

Nimmt man nun irgend zwei entsprechende weitere Substitutionen (1) und (6) hinzu und verlangt, dass die Form nach wie vor ungeändert bleibe, so ergiebt sich $c = 1$, und diese Bestimmung erweist sich dann auch als ausreichend. *Wir haben somit als einfachste Form die folgende:*

(7) $$\chi = -y_1(x_1+x_2)+y_2(x_1-x_2).$$

Da wir nun alle Tetraederformen kennen, welche y allein enthalten, so ergiebt sich jetzt das volle System der Tetraederformen nach den Principien der Invariantentheorie mit einem Schlage. *Das volle System umfasst neben*

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \chi$$

nur noch die Ueberschiebungen:

$$(g_1, \chi^s)_{0,s}, \quad (g_2, \chi^s)_{0,s}, \quad (g_3, \chi^s)_{0,s},$$

wo s im ersten Falle von 1 *bis* 6, *im zweiten von* 1 *bis* 8, *im dritten von* 1 *bis* 12 *läuft.*

Dies sind im Ganzen 20 Formen. Reducibele sind unter ihnen nicht mehr vorhanden.

Will man nur solche Tetraederformen betrachten, die in den x und y denselben Grad haben, so ergiebt sich, *dass sie ganze Functionen von* χ, $(g_1, \chi^3)_{0,3}$, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ *sind.*

Beschränkt man sich auf *rationale* Darstellung, so genügt es, neben χ, $(g_1, \chi^3)_{0,3}$, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ eine einzige Form auszuwählen, bei welcher der Grad in den x von dem Grade in den y um zwei Einheiten verschieden ist, z. B. $(g_1, \chi^2)_{0,2}$. Zwischen diesen *fünf associirten Formen* besteht dann nur eine Relation, welche allein die vier ersten betrifft und in $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ vom zweiten Grade ist. Bei der rationalen Darstellung solcher (ganzer oder gebrochener) Tetraederfunctionen, die in den x und y denselben Grad haben, werden χ, $(g_1, \chi^3)_{0,3}$, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ allein benutzt.

§ 3.

Die Ikosaederformen sind Tetraederformen.

Da die Substitutionen (1) und (6) nur einen Theil der zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen des vorigen Abschnittes ausmachen, so sind alle Ikosaederformen selbstverständlich Tetraederformen. Man wird verlangen, sie durch die Formen des soeben aufgestellten vollen Systems auszudrücken. Ich will dies hier für die einfachsten Formen ausführen.

a) *Ikosaederformen, welche bloss die y enthalten.* Es sind dies γ_1, γ_2, γ_3; sie werden ganze Functionen von g_1, g_2, g_3. Man findet durch Vergleich der Anfangsglieder:

(8) $$128\gamma_1 = g_3 + 11 g_1^2,$$

(9) $$\gamma_2 = g_1^2 g_2 - 3\gamma_1 g_2,$$

(10) $$\gamma_3 = g_1^5 - 10 g_1^3\gamma_1 + 45 g_1\gamma_1^2.$$

In (9) und (10) habe ich rechts γ_1 stehen lassen, weil sich mit ihm bei der von uns festgehaltenen Wahl der Veränderlichen am bequemsten rechnet. Denn man hat wieder das Princip: *Ordnet man die Tetraeder-*

formen nach Potenzen von y_1, bez. y_2, so ist die Differenz zweier Tetraederformen mit demselben Anfangsgliede durch γ_1 theilbar.

Durch Elimination ergeben sich aus den Gleichungen (8), (9), (10) folgende weitere, die ich später gebrauche und daher gleich hier notire:

$$(11)\qquad \gamma_2^2 = g_2^5 - 40\gamma_1^2 g_2^2 + 5\gamma_2\gamma_2 g_2,$$

$$(12)\qquad \gamma_2^2\gamma_3 = g_1^5 g_2^5 - 5\gamma_1\gamma_3 g_1^2 g_2^2 - 135\gamma_1^3\gamma_2 g_1 g_2.$$

b) *Ikosaederformen gleichen Grades in den x und y.* Man findet:

$$(13)\qquad f = -\tfrac{1}{8}(g_1, \chi^3)_{0,3} - \tfrac{1}{8}\chi^3,$$

$$(14)\qquad \varphi = -\tfrac{1}{8}(g_2, \chi^4)_{0,4} + \tfrac{3}{2}\chi f + \tfrac{5}{16}\chi^4,$$

$$(15)\qquad \psi = -\chi^5 - 5f\chi^2 + 5\varphi\chi.$$

Um Δ zu berechnen, schiebe man über die letzte Formel einmal $(f, \varphi)_{1,0}$ in Bezug auf die y, ein anderes Mal $(f, \varphi)_{0,1}$ in Bezug auf die x. So kommt:

$$(\chi^4 + 2f\chi - \varphi)\,((f, \varphi)_{1,0}, \chi)_{0,1} = -\{3\chi^3((f, \varphi)_{1,0}, f)_{0,1} - 4\chi((f, \varphi)_{1,0}, \varphi)_{0,1} + ((f, \varphi)_{1,0}, \psi)_{0,1}\},$$

$$(\chi^4 + 2f\chi - \varphi)\,((f, \varphi)_{0,1}, \chi)_{1,0} = -\{3\chi^2((f, \varphi)_{0,1}, f)_{1,0} - 4\chi((f, \varphi)_{0,1}, \varphi)_{1,0} + ((f, \psi)_{0,1}, \psi)_{1,0}\},$$

Zieht man diese beiden Formeln von einander ab, so entstehen rechts die Ikosaederformen:

$$((f, \varphi)_{1,0},\ f)_{0,1} - ((f, \varphi)_{0,1},\ f)_{1,0},$$
$$((f, \varphi)_{1,0},\ \varphi)_{0,1} - ((f, \varphi)_{0,1},\ \varphi)_{1,0},$$
$$((f, \varphi)_{1,0},\ \psi)_{0,1} - ((f, \psi)_{0,1},\ \psi)_{1,0}.$$

Dieselben haben in den x und y die Grade (8), (9), (10) und wechseln bei Vertauschung von x und y ihr Zeichen. Daher verschwinden die beiden ersten identisch und die letzte hat den Werth $C\Delta$, wo C numerisch ist. — Linker Hand entsteht die Tetraederform:

$$((f, \varphi)_{1,0}, \chi)_{1,1} - ((f, \varphi)_{0,1}, \chi)_{1,0},$$

und da sie hinsichtlich der x und y symmetrischer ist, als die im Systeme aufgezählte Form $(g_3, \chi^6)_{0,6}$, mit der sie den Grad in x und y gemein hat, so will ich statt letzterer die neue Form in das System aufnehmen und dementsprechend mit einem besonderen Buchstaben bezeichnen:

$$(16)\qquad \nabla = ((f, \varphi)_{1,0}, \chi)_{0,1} - ((f, \varphi)_{0,1}, \chi)_{1,0}.$$

Man hat also:

$$(17)\qquad (\chi^4 + 2f\chi - \varphi)\,\nabla = C\Delta,$$

und C durch Vergleich eines Gliedes:

$$C = -\tfrac{1}{4}.$$

§ 4.

Umgestaltung des Systems der Tetraederformen mit Hülfe der Ikosaederformen.

Den letzten Entwickelungen zufolge kann man im Systeme der Tetraederformen $(g_1, \chi^3)_{0,3}$ durch f, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$ durch φ, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ durch ∇ ersetzen. Das System nimmt dann diejenige Gestalt an, welche die nachstehende Tabelle aufweist.

Formensystem des Tetraeders.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0							g_4'		g_2'				g_6'
1		χ				$(f, \chi^2)_{0,2}$		$(\varphi, \chi^3)_{0,3}$				$(\nabla, \chi^5)_{0,4}$	
2					$(f, \chi)_{0,1}$		$(\varphi, \chi^2)_{0,2}$				$(\nabla, \chi^4)_{0,4}$		
3				f		$(\varphi, \chi)_{0,1}$				$(\nabla, \chi^3)_{0,3}$			
4			$(f, \chi)_{1,0}$		φ				$(\nabla, \chi^2)_{0,2}$				
5		$(f, \chi^2)_{1,0}$		$(\varphi, \chi)_{1,0}$				$(\nabla, \chi)_{0,1}$					
6	g_1		$(\varphi, \chi^2)_{2,0}$				∇						
7		$(\varphi, \chi^3)_{3,0}$				$(\nabla, \chi)_{1,0}$							
8	g_2				$(\nabla, \chi^2)_{2,0}$								
9				$(\nabla, \chi^3)_{3,0}$									
10			$(\nabla, \chi^4)_{1,0}$										
11		$(\nabla, \chi^3)_{6,0}$											
12	g_3												

Die erste Horizontalreihe giebt wieder die Grade in den x, die erste Verticalreihe die Grade in den y.

Die Formen g_1, g_2, g_3 sind jetzt definirt als $(f, \chi^3)_{0,3}$, $(\varphi, \chi^4)_{0,4}$, $(\nabla, \chi^6)_{0,6}$, und entsprechend die g_1', g_2', g_3'. Aber natürlich kann man sie in mannigfachster Weise als Ueberschiebungen von Ikosaederformen mit Potenzen von χ darstellen. Man hat z. B. (was ich später gebrauche):

$$(18) \qquad g_2 = (\Theta, \chi)_{1,0},$$

$$(19) \qquad -g_1 g_2 = ((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0},$$

und also*) folgende Formel:

$$(20) \qquad \chi \cdot \gamma_2 = -\Theta \cdot g_1 g_2 - (\tau, \Theta)_{1,0} \cdot g_2 .$$

§ 5.

Associirte Formen.

Nach Formel (17) kann man ∇ durch f, φ, χ und Δ, und also auch durch f, φ, χ und das im vorigen Abschnitte eingeführte $c = \frac{(f, \tau)_{1,0}}{\Theta}$, rational ausdrücken. Wir können ferner unter die associirten Formen statt $(g_3, \chi^2)_{0,2}$ die Ueberschiebung $(f, \chi)_{1,0}$ aufnehmen. Dann haben wir also den Satz:

Alle Tetraederformen sind rationale Functionen von $f, \varphi, c, \chi, (f, \chi)_{1,0}$.

Die einzige zwischen diesen Formen bestehende Relation ist die alte des vorigen Abschnittes, welche c durch f, φ, ψ ausdrückt. —

Beschränkt man sich auf Tetraederformen gleichen Grades in x und y, so kommt selbstverständlich $(f, \chi)_{1,0}$ noch in Wegfall.

Ich will beispielsweise die beiden Functionen $\frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2}$ und $\frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3}$, welche beide gleichen Grad in den x und den y besitzen, ausrechnen. Zu dem Zwecke schiebe man τ über die Gleichung (15):

$$\psi = -\chi^5 - 5 f \chi^2 + 5 \varphi \chi,$$

und beachte, dass:

$$(f, \tau)_{1,0} = c\Theta, \qquad (\varphi, \tau)_{1,0} = -\tfrac{3}{4} f \Theta, \qquad (\psi, \tau)_{1,0} = -\varphi\Theta .$$

So kommt:

$$(21) \qquad \frac{(\tau, \chi)_{1,0}}{\Theta} = -\frac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi} .$$

Nun benutze man die Identitäten:

$$\Theta(\tau, \chi)_{1,0} = \chi(\tau, \Theta)_{1,0} + \tau(\Theta, \chi)_{1,0},$$

$$(\tau, \Theta)_{1,0}(\tau, \chi)_{1,0} = \chi(\tau, (\tau, \Theta)_{1,0})_{1,0} + \tau((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0},$$

*) Vermöge der Identität:

$$\chi((\tau, \Theta)_{1,0}, \Theta)_{1,0} = (\tau, \Theta)_{1,0}(\chi, \Theta)_{1,0} + \Theta((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0} .$$

und ersetze $(\tau, (\tau, \Theta)_{1,0})_{1,0}$ durch seinen Werth $3\gamma_1\Theta$; $(\Theta,\chi)_{1,0}$, $((\tau,\Theta)_{1,0},\chi)_{1,0}$ nach Formel (18), (19) durch g_1, $-g_1g_2$. So ergiebt sich:

$$(22)\qquad \frac{g_2\gamma_1}{\gamma_2} = -\gamma_1\,\frac{\Theta^2\cdot\dfrac{3c\chi^3+3f\chi^2-\varphi\chi}{3f\chi^2-4\varphi\chi+\psi}+\chi\cdot(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_2 f},$$

$$(23)\qquad \frac{g_1g_2\gamma_1^3}{\gamma_2\gamma_3} = \gamma_1^2\Theta\,\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}\cdot\dfrac{3c\chi^3+3f\chi^2-\varphi\chi}{3f\chi^2-4\varphi\chi+\psi}+3\gamma_1\chi}{\tau\gamma_2\gamma_3},$$

Hier treten rechter Hand neben f, φ, ψ, χ, c nur solche Grössen auf, die in § 9. des vorigen Abschnittes als Function von f, φ, ψ, c ausgerechnet worden sind; ψ selbst ist aber durch Formel (15) in f, φ, χ gegeben.

Ich will noch die Formel anschreiben, die sich durch Division von (22) und (23) ergiebt; sie lautet:

$$(24)\qquad \frac{g_1\gamma_1^2}{\gamma_3} = -\frac{\gamma_1^2\Theta}{\gamma_3}\cdot\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}\dfrac{3c\chi^3+3f\chi^2-\varphi\chi}{3f\chi^2-4\varphi\chi+\psi}+3\gamma_1\chi}{\Theta^2\dfrac{3c\chi^3+3f\chi^2-\varphi\chi}{3f\chi^2-4\varphi\chi+\psi}+\chi(\tau,\Theta)_{1,0}}.$$

Abschnitt III.

Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Die Entwickelungen des ersten und zweiten Abschnittes gestatten jetzt, die allgemeine Gleichung fünften Grades in mannigfacher Weise zu lösen, indem man letztere entweder auf eine *Ikosaedergleichung* zurückführt oder auf eine solche Gleichung vom fünften Grade, *die nur einen Parameter enthält.* Von letzterem betrachte ich nur solche, die schon bei Hermite und Brioschi (resp. Kronecker) oder in der Klein'schen Arbeit vorkommen*); ich bemerke aber ausdrücklich, dass die vorangehenden Betrachtungen weiter reichen, indem sie z. B. *alle* Gleichungen fünften Grades aufstellen und discutiren lassen, von denen die verschiedenen Tetraederformen abhängen.

§ 1.

Die Gleichung fünften Grades für das χ.

Durch quadratische (Tschirnhausen-) Transformation kann man aus einer Gleichung fünften Grades die beiden Glieder wegschaffen, welche die vierte und die dritte Potenz der Unbekannten enthalten. Eine so vereinfachte Gleichung kommt aber im vorigen Abschnitte

*) Auf letztere verweise ich zumal auch wegen der Literatur. Siehe übrigens Brioschi's Darstellung in diesen Annalen Bd. XIII, p. 109 ff.

vor: sie wird durch die Formel (15) daselbst geliefert, wenn man in ihr f, φ, ψ als gegeben, χ als Unbekannte ansieht:

$$(1)\qquad \chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi - \psi = 0.$$

Wendet man auf die x, y, in denen das χ vermöge der Formel

$$(2)\qquad \chi = - y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)$$

ausgedrückt ist, die 120 zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen an, so entstehen die *fünf* Wurzeln, welche (1) besitzt; sie lauten:

$$(3)\qquad \chi_\nu = - \varepsilon^\nu x_1 y_1 + \varepsilon^{2\nu} x_1 y_2 - \varepsilon^{3\nu} x_2 y_1 - \varepsilon^{4\nu} x_2 y_2.$$

Das Differenzenproduct dieser χ_ν ist keine andere Function als das im ersten Abschnitte eingeführte Δ. In der That stimmt die Formel (30) des ersten Abschnittes überein mit derjenigen, welche in bekannter Weise die Discriminante von (1) durch die Coefficienten f, φ, ψ ausdrückt.

Denken wir uns also bei der Gleichung (1) *die Coefficienten f, φ, ψ und die Quadratwurzel aus der Discriminante gegeben, so kennen wir die Ikosaederformen f, φ, ψ, c, durch welche sich alle anderen Ikosaederformen gleichen Grades in x und y rational ausdrücken lassen.*

Ikosaederformen, welche nicht gleichen Grad in den x und den y besitzen, sind rationale Functionen von f, φ, ψ, c und $\frac{\tau}{\Theta}$. Letzteres spielt, wenn man von der Gleichung (1) ausgeht, die Rolle eines willkürlichen Proportionalitätsfactors; doch will ich den hiermit angedeuteten Gesichtspunkt im Nachstehenden nicht weiter verfolgen.

§ 2.

Zurückführung auf eine Ikosaedergleichung.

Um die Gleichung (1) auf eine Ikosaedergleichung zurückzuführen, benutze man einfach die Rechnungen des neunten Paragraphen des ersten Abschnitts. Man berechne zuvörderst die drei Ausdrücke:

$$A = - \frac{8f\varphi + 3\psi c}{f^2 + 3c\varphi}, \quad B = \frac{-8\varphi^2 + f\psi}{f^2 + 3c\varphi}, \quad C = - \frac{-8\varphi^3 + 9f\varphi\psi + 3\psi^2 c}{f^2 + 3c\varphi}.$$

Dann hat man für $\frac{y_1}{y_2}$ sofort die Ikosaedergleichung:

$$(4)\qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = \frac{(A^2 - 3B)^3}{C}.$$

Hat man sie auf irgend eine Weise durch Reihenentwickelung gelöst, so berechne man (Formel (2), (3) des zweiten Abschnitts):

$$(5)\qquad \frac{g_2\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(y_1^2 - y_1 y_2(1+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 y_2^2)(y_1^2 - y_1 y_2(1+\varepsilon^2)^2 - \varepsilon^4 y_2^2)$$
$$\cdot (y_1^2 - y_1 y_2(1+\varepsilon^3)^2 - \varepsilon y_2^2)(y_1^2 - y_1 y_2(1+\varepsilon^4)^2 - \varepsilon^3 y_2^2),$$

$$(6)\quad \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3} = \frac{\gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\lambda=4} (y_1^2 - y_1 y_2 (1+\varepsilon^\lambda)^2 - \varepsilon^{2\lambda} y_2^2)$$
$$\cdot (y_1^2 + y_2^2)(y_1^2 - 2(\varepsilon + \varepsilon^4) y_1 y_2 - y_2^2)(y_1^2 - 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) y_1 y_2 - y_2^2).$$

Dann giebt die Gleichung (20) desselben Abschnitts:

$$(7)\qquad \chi = -A \cdot \frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2} - D \cdot \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3},$$

wo A der soeben berechnete Ausdruck ist und

$$D = \frac{\Theta \gamma_3}{\gamma_1^3} = \frac{AB^2 + 3cAB + 30fB}{\varphi}$$

(nach Glch. (41) des vorigen Abschnittes).

Die Gleichung (7) *drückt also* χ *durch eine Wurzel der Ikosaedergleichung* (4) *und die bekannten Grössen aus.*

Die übrigen Wurzeln χ_ν erhält man sofort, wenn man y_1, y_2 in allen Formeln durch $\varepsilon^\nu y_1$, $\varepsilon^{4\nu} y_2$ ersetzt.

§ 3.

Gleichungen fünften Grades mit einem Parameter.

Will man nicht explicite auf die Ikosaedergleichung zurückgehen, so bietet der zweite Abschnitt folgende *Normalformen von Gleichungen fünften Grades mit nur einem Parameter.* Es sei

$$(8)\qquad u = \frac{g_1}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad v = \frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2}, \quad w = \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3}.$$

Dann haben wir für sie nach den Formeln (10), (11), (12) des vorigen Abschnitts unmittelbar folgende Gleichungen:

$$(9)\qquad u^5 - 10u^3 + 45u - \frac{\gamma_3}{\gamma_1^{2^1/_2}} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} \cdot v^5 - 40v^2 + 5v - 1 = 0,$$

$$(11)\qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} \cdot w^5 - 5\frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^5} \cdot w^2 - 135\frac{\gamma_3^4}{\gamma_1^{10}} \cdot w - \frac{\gamma_3^5}{\gamma_1^{25}} = 0,$$

in denen für $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ der soeben berechnete Werth einzutragen ist und γ_3 der Relation (5) des ersten Abschnitts:

$$\gamma_3^2 = \gamma_2^3 + 12^3 \gamma_1^5$$

zu entnehmen ist. Hier giebt Formel (9) die Brioschi'sche Resolvente, Formel (10) und (11) fallen mit denjenigen zusammen, die Klein auf pag. 523, 524 seiner Arbeit entwickelt hat.

Die Werthe von u, v, w in χ und den bekannten Grössen, d. h. die Transformationsformeln, welche die vorgelegte Gleichung (1) in die Normalformen (9), (10), (11) verwandeln, ergeben sich aus den Formeln (22), (23), (24) des vorigen Abschnitts. Man setze:

$$Z = \frac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi}.$$

Dann hat man, unter Benutzung der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnung:

$$(12)\qquad u = -\sqrt{B}\cdot\frac{3\chi + AZ}{A\chi + BZ},$$

$$(13)\qquad v = -\frac{A\chi + BZ}{A^2 - 3B},$$

$$(14)\qquad w = \frac{B}{D}\cdot\frac{3\chi + AZ}{A^2 - 3B}.$$

Um umgekehrt χ durch u oder v auszudrücken, beachte man, dass aus Formel (9) des zweiten Abschnitts folgt:

$$(15)\qquad v = \frac{1}{u^2 - 3}$$

und also

$$(16)\qquad w = \frac{\sqrt{B}}{D}\cdot\frac{u}{u^2 - 3}.$$

Man setze ferner einen Augenblick v an die Stelle von χ und also die Gleichung (10) an die Stelle von (1). Dann wird:

$$(17)\qquad w = \frac{v^3}{24v^2 - 4v + 1}.$$

Es ist hiernach w als Function von v, und v und w als Functionen von u definirt. Den verlangten Ausdruck für χ ergiebt jetzt die schon soeben benutzte Formel (20) des vorigen Abschnitts.

Man hat einfach:

$$(19)\qquad \chi = -Av - Dw = \frac{A + \sqrt{B}\cdot u}{3 - u^2}.$$

Will man die übrigen Wurzeln χ_ν berechnen, so hat man u oder v durch eine der anderen Wurzeln von (9) resp. (10) zu ersetzen.

§ 3.

Die Jerrard'sche Form.

Die sogenannte Jerrard'sche Form gehört nicht zu den Gleichungen fünften Grades mit einem Parameter, zu welchen die Betrachtung des Ikosaeders unmittelbar führt. Vielmehr müsste man, um zu ihr zu gelangen, eine cubische Gleichung auflösen, deren Coefficienten in $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ rational sind*). Aber sie kann ohne Weiteres als Special-

*) Cf. die Klein'sche Arbeit, pag. 525.

fall der Gleichung (1) betrachtet werden. In Folge dessen gestatten unsere Formeln, wie jetzt gezeigt werden soll, die Transformation der Gleichung (1) auf die Jerrard'sche Form und die Lösung der Gleichung (1) durch die Hermite'schen Formeln explicite anzugeben. Ich gehe hierauf um so lieber ein, als die Hermite'sche Lösung der Gleichungen fünften Grades die bekannteste ist und man bei neuen Methoden zweckmässigerweise verlangt, den Zusammenhang mit den älteren aufzuweisen.

Hermite's Formeln, etwas umgestellt, sind diese. *Es sei:*

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1, \qquad \mathsf{K} = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \qquad \mathsf{K}' = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa'^2 \sin^2\varphi}}.$$

$$q = e^{-\pi \frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}} = e^{i\pi\omega},$$

so dass

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{2m^2+m}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}} = \varphi(\omega).$$

Setzt man dann:

$$\Phi(\omega) = \left(\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) + \varphi(5\omega)\right)\left(\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+64}{5}\right)\right)\left(\varphi\left(\frac{\omega+32}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+48}{5}\right)\right),$$

so hat man folgende Gleichung:

$$\Phi^5 - 2000\varkappa^2\varkappa'^4\,\Phi - 1600\sqrt{5}\cdot\varkappa'^4\varkappa^{\frac{3}{2}}(1+\varkappa^2) = 0.$$

Umgekehrt also lassen sich die Wurzeln von:

$$(20) \qquad h^5 - 5\varkappa'^4 h - 2\varkappa'^4\,\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} = 0$$

folgendermassen durch elliptische Functionen darstellen:

$$(21) \qquad h_\nu = \frac{\Phi(\omega+16\nu)}{2\sqrt{5}\,\sqrt[4]{\varkappa}}.$$

Vergleicht man jetzt zunächst die Gleichung (20) mit der allgemeinen:

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0,$$

so hat man

$$f = 0, \qquad \varphi = \varkappa'^4, \qquad \psi = -2\varkappa'^4\cdot\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}.$$

Es wird also die quadratische Gleichung für das c:

$$18\varkappa c^2 - 3(1+\varkappa^2)^2 c + 2\varkappa\varkappa'^4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$c = \begin{cases} \frac{2}{3}\varkappa \\ \frac{\varkappa'^4}{6\varkappa}, \end{cases}$$

ich wähle die letztere

(22) $$c = \frac{\varkappa'^4}{6\varkappa}.$$

Dann bekomme ich:

(23) $$\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = -16 \cdot \frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^2\varkappa'^8},$$

(24) $$v = \frac{\varkappa}{4} \cdot \frac{1}{1+14\varkappa^2+\varkappa^4} \cdot \left\{2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \cdot h + \varkappa^4 \frac{h^3+2\varkappa h}{2\varkappa h+\sqrt{\varkappa}(1+\varkappa^2)}\right\},$$

(25) $$w = \frac{\varkappa^2\varkappa'^4\sqrt{\varkappa}}{4} \cdot \frac{1}{(1+\varkappa^2)(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)} \left\{3h - \frac{1+\varkappa^2}{2\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{h^3+2\varkappa h}{2\varkappa h+\sqrt{\varkappa}(1+\varkappa^2)}\right\},$$

(26) $$h = -2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \left\{v - \frac{8}{\varkappa'^4}(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)w\right\}.$$

§ 5.

Die Jerrard'sche Transformation und die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch die Hermite'schen Formeln.

Man betrachte jetzt die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Gleichungen:

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0,$$

welche dasselbe $\frac{y_1}{y_2}$, oder, was auf das Gleiche hinauskommt, dasselbe $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ und dasselbe v und w besitzen. Unter ihnen finden sich mehrere Jerrard-Hermite'sche Gleichungen. Um also die allgemeine Gleichung

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0$$

in die Jerrard-Hermite'sche Form zu transformiren, bietet sich jetzt der Weg, *zwischen den Formeln des* § 3. *und* § 4. *unter Voraussetzung gleichen* $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ *das* v, w *zu eliminiren.*

Vor allen Dingen also berechne man $\varkappa^2$ aus der Formel:

(27) $$\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = \frac{(A^2-3B)^3}{C} = -16 \cdot \frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^2\varkappa'^8}$$

und ersetze nun in den Gleichungen:

(26) $$h = -2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \left\{v - \frac{8}{\varkappa'^4}(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)w\right\},$$

(19) $$\chi = -Av - Dw,$$

die v, w das eine Mal durch ihre Ausdrücke in χ, c, A, B, C, D, Z, das andere Mal durch ihre Ausdrücke in $\varkappa$, h. So kommt:

$$(28)\quad h = \frac{2\cdot\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}}{A^2-3B}\left\{\chi\left\{A+\frac{24B}{D\varkappa'^4}(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{B+\frac{8AB}{D\varkappa'^4}(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)\cdot Z\right\}\right\},$$

$$(29)\quad \chi = -\frac{A\varkappa}{4}\cdot\frac{1}{1+14\varkappa^2+\varkappa^4}\left\{2\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}\cdot h+4\sqrt{\varkappa}\cdot\frac{h^3+2\varkappa h}{2h\sqrt{\varkappa}+\varkappa^2+1}\right\}$$

$$-D\cdot\frac{\varkappa^2\varkappa'^4}{4}\cdot\frac{1}{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)}\cdot\left\{\frac{3\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa^2}-\frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{h^3+2\varkappa h}{2h\sqrt{\varkappa}+\varkappa^2+1}\right\}.$$

Die erste dieser Formeln ist die Jerrard'sche Transformation, die zweite giebt die Auflösung von (1) *durch die Hermite'schen Formeln.*

Man hat also, wenn man letztere verwenden will, zur Auflösung der Gleichung

$$\chi^5+5f\chi^2-5\varphi\chi+\psi=0$$

folgende Rechnungen auszuführen, die ich hier noch einmal zusammenstelle:

1) Man berechne c aus der Gleichung:

$$(f\psi-8\varphi^2)c^2-(9f^2\varphi-\tfrac{1}{3}\psi^2)c+\frac{(-27f^4-8\varphi^3+9f\varphi\psi)}{9}=0$$

und A, B, C, D aus den Formeln:

$$A = -\frac{8f\varphi+3c\psi}{f^2+3c\varphi},$$

$$B = \frac{-8\varphi^2+f\psi}{f^2+3c\varphi},$$

$$C = -\frac{-8\varphi^3+9f\varphi\psi+3c\psi^2}{f^2+3c\varphi},$$

$$D = \frac{AB^2+3cAB+30fB}{\varphi}.$$

2) Man bestimme $\varkappa^2$ aus der algebraisch lösbaren Gleichung sechsten Grades:

$$-16\cdot\frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^2\varkappa'^8}=\frac{(A^2-3B)^3}{C};$$

3) q aus der Formel:

$$\sqrt[4]{\varkappa}=\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}q^{2m^2+m}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}q^{m^2}}=\varphi(\omega);$$

4) h_ν aus der Gleichung:

$$h_\nu = 2\sqrt{5}\sqrt[4]{\varkappa}\left\{\varphi(5\omega)+\varphi\left(\frac{\omega+16\nu}{5}\right)\right\}\left\{\varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+1)}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+4)}{5}\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+2)}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+3)}{5}\right)\right\}.$$

Dann ist:

$$5)\quad \chi_\nu = -\frac{A\varkappa}{4}\cdot\frac{1}{1+14\varkappa^2+\varkappa^4}\left\{2\,\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}\,h_\nu+4\sqrt{\varkappa}\,\frac{h_\nu^3+2\varkappa h_\nu}{2h_\nu\sqrt{\varkappa}+\varkappa^2+1}\right\}$$
$$-D\frac{\varkappa^2\varkappa'^4}{4}\cdot\frac{1}{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)}\left\{3\,\frac{\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa^2}-\frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{h_\nu^3+2\varkappa h_\nu}{2h_\nu\sqrt{\varkappa}+\varkappa^2+1}\right\}.$$

Erlangen, im Januar 1878.