Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe.

Von

J. Lüroth in München.

Im Folgenden erlaube ich mir eine eigenthümliche Darstellung aller positiven Zahlen, die Eins nicht überschreiten, darzulegen, auf die ich kam, als ich, angeregt durch die Entdeckungen G. Cantor's, mich mit der Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander beschäftigte.

I.

Ist a eine Zahl > 0 aber $\leqq 1$, so ist $\frac{1}{a}$ entweder eine ganze Zahl g, also

$$a = \frac{1}{g},$$

oder es liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen g_1 und $g_1 + 1$, so dass man

$$a = \frac{1}{g_1 + 1} + a'$$

setzen kann, wobei $a' > 0$ ist. Weil aber dann

$$\frac{1}{g_1} > a > \frac{1}{g_1 + 1},$$

ist

$$a' < \frac{1}{g_1(g_1 + 1)}$$

und

$$a' g_1 (g_1 + 1) = a_1 < 1.$$

Dies liefert die Gleichung

$$a = \frac{1}{g_1 + 1} + \frac{a_1}{g_1 (g_1 + 1)}.$$

Da a_1 positiv und < 1 ist, so ist es entweder $= \frac{1}{g'}$, wo g' eine ganze Zahl oder man kann es, wie eben a, mit Hülfe einer ganzen Zahl g_2 und eines echten Bruches a_2 ausdrücken durch die Gleichung

$$a_1 = \frac{1}{g_2+1} + \frac{a_2}{g_2(g_2+1)}.$$

Also ergiebt sich entweder

$$a = \frac{1}{g_1+1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)} \cdot \frac{1}{g'}$$

oder

$$a = \frac{1}{g_1+1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)(g_2+1)} + \frac{a_2}{g_1(g_1+1)\,g_2(g_2+1)}.$$

Im letzten Falle kann man auf a_2 dieselbe Betrachtung anwenden und in dieser Weise so lange fortfahren, bis man auf eine reciproke ganze Zahl kommt, was aber manchmal niemals eintritt.

Bezeichnet man, unter $g_1\, g_2 \cdots g_n\; g$ ganze Zahlen verstanden, der Kürze wegen

$$\frac{1}{g_1(g_1+1)\,g_2(g_2+1)\cdots g_p(g_p+1)} \text{ mit } R(g_1, g_2, \cdots, g_p),$$

$$\frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_p)}{g+1} \text{ mit } Q(g_1, g_2, \cdots, g_p, g),$$

$$\frac{1}{g+1} \text{ mit } Q(g),$$

so ergiebt sich also für a entweder die Gleichung

$$(1) \quad a = Q(g_1) + Q(g_1, g_2) + Q(g_1, g_2, g_3) + \cdots + Q(g_1, g_2, \cdots, g_n) + \frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g},$$

oder der Ausdruck

$$a = Q(g_1) + Q(g_1, g_2) + \cdots + Q(g_1, g_2, \cdots, g_n) + R(g_1, g_2, \cdots, g_n) \cdot a_n,$$

in welchem a_n ein echter Bruch ist, der für keinen Werth des Zeigers n einer reciproken ganzen Zahl gleich wird.

Da alle Zahlen $g_1, g_2, \cdots$ mindestens gleich Eins sind, so ist

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Lässt man also in der letzten Gleichung n ins Unendliche wachsen, so nähert sich das letzte Glied der Null und es kommt die Gleichung

$$(2) \qquad a = \sum_{p=1}^{\infty} Q(g_1, g_2, \cdots, g_p).$$

Für $a = \frac{11}{18}$ z. B. hat man die Gleichungen

$$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2}\, a_1,$$

$$a_1 = \frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \cdot 5} a_2,$$

$$a_2 = \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} a_3,$$

$$a_3 = \frac{6}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} a_4,$$

$$a_4 = \frac{1}{3},$$

aus welchen

$$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$$

folgt.

Dagegen liefert der Bruch $\frac{5}{13}$ die Gleichungen

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} a_1.$$

$$a_1 = \frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \cdot 4} a_2,$$

$$a_2 = \frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} a_3,$$

$$a_3 = \frac{5}{13}.$$

Da a_3 sich $= a$ ergeben hat, so kehren jetzt dieselben Gleichungen wieder und man erkennt, dass das System nie zu einem a_n führen kann, welches einer reciproken ganzen Zahl gleich ist, dass vielmehr $\frac{5}{13}$ sich nur durch eine unendliche Reihe der Form (2) darstellen lässt, indem

$$\frac{5}{13} = Q(2) + Q(2, 3) + Q(2, 3, 1) + Q(2, 3, 1, 2) + \cdots$$

wird.

Für die rechte Seite der Gleichung (2) sei die Abkürzung

$$\sum_{p=1}^{\infty} Q(g_1, g_2, \cdots, g_p) = S(g_1, g_2, \cdots) \tag{3}$$

benutzt. Die ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots$ mögen die Elemente der Reihe heissen.

Die Reihe (1) lässt sich noch umwandeln. Man hat ja identisch

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g+1} + \frac{1}{g(g+1)}.$$

Damit wird

$$\frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g} = \frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g+1} + \frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g(g+1)}$$

$$= Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) + R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) \cdot \frac{1}{1}.$$

Wendet man dies auf

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) \cdot \frac{1}{1}$$

an, so entsteht

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) \cdot \frac{1}{1} = Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1) \\ + R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1) \frac{1}{1}$$

und indem man in die vorige Gleichung einträgt

$$\frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g} = Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) + Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1) \\ + R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1) \frac{1}{1}.$$

Setzt man dieses Verfahren weiter fort, so erkennt man, dass die linke Seite der letzten Gleichung durch die unendliche Reihe

$$Q(g_1, \cdots, g_n, g) + Q(g_1, \cdots, g_n, g, 1) + Q(g_1, \cdots, g_n, g, 1, 1) + \cdots$$

ersetzt werden kann, so dass schliesslich aus der Reihe (1)

$$a = S(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1, 1, \cdots) \tag{4}$$

hervorgeht, in welcher sich rechts das Element 1 ins Unendliche wiederholt. Speciell ist noch

$$\begin{cases} \dfrac{1}{g} = S(g, 1, 1, \cdots), \\ 1 = S(1, 1, 1, \cdots). \end{cases} \tag{5}$$

Man kann also jede Zahl a die > 0 aber ≤ 1 ist, durch eine unendliche Reihe der Form (2) darstellen.

Diese Zahlen zerfallen in zwei Classen, solche, welche durch eine endliche Reihe, und solche, welche nur durch eine unendliche Reihe dargestellt werden können. Die ersteren Zahlen sind sicher rational und bilden folglich, als Theil der abzählbaren Menge der rationalen Zahlen, selbst eine abzählbare Menge, die mit M bezeichnet sei.

Im Folgenden werden wir aber ausschliesslich die Darstellungen durch die unendlichen Reihen benutzen.

Gesetzt zwei solche Reihen $S(g_1, g_2, g_3, \cdots)$ und $S(h_1, h_2, \cdots)$ hätten dieselbe Summe a. Da nun

$$S(g_1, g_2, g_3, \cdots) = \frac{1}{g_1 + 1} + \frac{1}{g_1(g_1 + 1)} S(g_2, g_3, \cdots)$$

und die Reihe S, nach unserer Annahme eine unendliche ist, so ist sicher

$$S(g_1, g_2, g_3, \cdots) > \frac{1}{g_1 + 1}.$$

Da aber jede Reihe S, also auch $S(g_2, g_3, \cdots)$, ≤ 1 ist, so wird andererseits

$$S(g_1, g_2, g_3, \cdots) \leqq \frac{1}{g_1+1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)} = \frac{1}{g_1}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{g_1} \geqq a > \frac{1}{g_1+1}.$$

Für die zweite Reihe $S(h_1, h_2, \cdots)$ ergiebt sich ebenso

$$\frac{1}{h_1} \geqq a > \frac{1}{h_1+1}.$$

Aus beiden Ungleichungen folgt, weil g_1 und h_1 ganze Zahlen sind, $g_1 = h_1$. Dieses Resultat lässt aus der Gleichung

$$(6) \qquad S(g_1, g_2, \cdots) = S(h_1, h_2, \cdots)$$

die neue

$$S(g_2, g_3, \cdots) = S(h_2, h_3, \cdots)$$

hervorgehen, die wieder $g_2 = h_2$ liefert u. s. w. *so dass aus der Gleichung* (6) *die Gleichheit jeder Zahl* g_n *mit der gleichstelligen* h_n *hervorgeht.* Dies Resultat zeigt also, *dass man eine Zahl* $a > 0$ *und* $\leqq 1$ *nur auf eine Art durch eine unendliche Reihe S darstellen kann.*

Unter diesen Reihen sind noch besonders die *periodischen* hervorzuheben, d. h. diejenigen, bei welchen sich eine Gruppe von Elementen stets wiederholt. Es soll gezeigt werden, dass diese rationale Brüche darstellen. Sei

$$S(g_1, g_2, \cdots, g_p, h_1, h_2, \cdots, h_q, h_1, h_2, \cdots, h_q, \cdots)$$

eine solche Reihe, in welcher die Elemente $h_1, h_2, \cdots, h_q$ periodisch wiederkehren. Indem man sie in Gruppen zerlegt, kann man sie schreiben

$$\sum_{n=1}^{p} Q(g_1, \cdots, g_n) + \sum_{n=1}^{q} Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_n)$$
$$+ \sum_{n=1}^{q} Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_q, h_1, \cdots, h_n)$$
$$+ \cdots.$$

Nun sieht man sofort, dass

$$R(a, \cdots, l, m, \cdots, r) = R(a, \cdots, l) \cdot R(m, \cdots, r),$$
$$Q(a, \cdots, l, m, \cdots, r) = R(a, \cdots, l) \cdot Q(m, \cdots, r)$$

ist. Daher ist

$$Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_n) = R(g_1, \cdots, g_p)\, Q(h_1, \cdots, h_n);$$
$$Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_q, h_1, \cdots, h_n)$$
$$= R(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_q)\, Q(h_1, \cdots, h_n)$$
$$= R(g_1, \cdots, g_p) R(h_1, \cdots, h_q) Q(h_1, \cdots, h_n)$$

u. s. w.

Trägt man ein, so sieht man, dass die Reihensumme

$$= \sum_{n=1}^{p} Q(g_1, \cdots, g_n) + \frac{R(g_1, \cdots, g_p) \sum_{n=1}^{q} Q(h_1, \cdots, h_n)}{1 - R(h_1, \cdots, h_q)},$$

also einer rationalen Zahl gleich wird.

Umgekehrt muss eine Reihe S, wenn sie eine rationale Zahl darstellen soll, nothwendig periodisch sein. Denn sei der rationale Bruch $\frac{m}{n}$ der Reihe $S(k_1, k_2, \cdots)$ gleich, wo natürlich die k ganze Zahlen sind, dann ist

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{k_1 + 1} = \frac{1}{k_1(k_1 + 1)} \cdot S(k_2, k_3, \cdots)$$

folglich

$$S(k_2, k_3, \cdots) = \frac{(m(k_1 + 1) - n)k_1}{n}.$$

Der Bruch rechts hat im Zähler eine ganze Zahl die $\leqq n$ ist, weil links eine Reihe S steht. Man findet so, indem man weiter geht, dass alle die Reihen $S(k_3, \cdots)$, $S(k_4, \cdots) \cdots$ rationale echte Brüche mit dem Nenner n sind.

Weil nur n solcher Brüche existiren, können die $n + 1$ Reihen

$$S(k_1, \cdots), S(k_2, \cdots), \cdots, S(k_{n+1}, \cdots)$$

nicht alle von einander verschieden sein. Sei $S(k_p, \cdots)$ die erste dieser Reihen, welche einer späteren gleich ist, und die nächste ihr gleiche die $S(k_{p+r}, \cdots)$, so ist also

$$S(k_p, k_{p+1}, \cdots) = S(k_{p+r}, \cdots)$$

folglich, nach dem bei (6) gefundenen Resultate,

$$k_p = k_{p+r}, \; k_{p+1} = k_{p+r+1}, \cdots, k_{p+2r-1} = k_{p+r-1}$$
$$k_{p+2r} = k_{p+r} = k_p, \; k_{p+2r+1} = k_{p+r+1} = k_{p+1},$$

u. s. w.

Die Gruppe $k_p, k_{p+1}, \cdots, k_{p+r-1}$ von Elementen wiederholt sich also periodisch. Da die Zahlen p und $p + r$ beide der Reihe $1 \cdots n + 1$ angehören, so ist r höchstens $= n$.

Man sieht demnach, *dass jede periodische Reihe eine rationale Zahl, jede nicht periodische eine irrationale Zahl darstellt.*

Im Folgenden sollen zwei Reihen S nach ihrer Grösse verglichen werden. Seien

$$a = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, g, k, m, \cdots),$$
$$b = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, h, l, n, \cdots)$$

zwei Reihen, in welchen die ersten p Stellen mit denselben Zahlen besetzt sind. Dann ist

(7) $b - a = R(g_1, g_2, \cdots, g_p)\{S(h, l, \cdots) - S(g, k, \cdots)\},$

Weil aber

$$S(h, l, \cdots) > \frac{1}{h+1},$$
$$S(g, k, \cdots) \leqq \frac{1}{g}$$

so folgt

$$b - a \geqq R(g_1, g_2, \cdots, g_p)\frac{g-h-1}{g(h+1)}.$$

Ist nun die ganze Zahl h kleiner als g, so ist sie höchstens $= g-1$; daher, *wenn* $h < g$, $g - h - 1 > 0$ *und folglich auch* $b - a > 0$.

Für das Folgende ist eine genauere Rechnung nöthig. Zu dem Zwecke schreibe man

$$b - a = R(g_1, g_2, \cdots, g_p)\left\{\frac{1}{h+1} + \frac{S(l, n, \cdots)}{h(h+1)} - \frac{1}{g+1} - \frac{S(k, m, \cdots)}{g(g+1)}\right\}.$$

Weil $h \leqq g - 1$, ist

$$\frac{1}{h+1} - \frac{1}{g+1} \geqq \frac{1}{g(g+1)};$$

und weil $S(l \cdots)$ sicher > 0 ist, ergiebt sich

$$b - a > R(g_1, g_2, \cdots, g_p)\frac{1 - S(k, m, \cdots)}{g(g+1)};$$

oder, anders geschrieben,

(8) $$S(g_1, g_2, \cdots, g_p, h, l, \cdots) - S(g_1, g_2, \cdots, g_p, g, k, \cdots)$$
$$> R(g_1, g_2, \cdots, g_p, g)\big(1 - S(k, m, \cdots)\big)$$

unter der Bedingung $h < g$.

Sehen wir nun von der Bedingung $h < g$ ab, und beachten, dass jede Reihe S höchstens $= 1$ ist, so folgt aus (7)

$$|b - a| < R(g_1, g_2, \cdots, g_p).$$

Weil aber alle g mindestens $= 1$ sind, ist

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_p) < \frac{1}{2^p};$$

folglich

(9) $$|b - a| < \frac{1}{2^p}.$$

Dies ist auch der Fall, wenn

$$b = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, 1, 1, \cdots)$$

folglich *giebt es Zahlen der Menge* **M** *in jedem, wenn auch noch so kleinen, Bereiche um eine gegebene Zahl.*

Soll $b - a$ gleich einer bestimmten Zahl ϑ sein, so muss

$$S(h, l, \cdots) = S(g, k, \cdots) + \frac{\vartheta}{R(g_1, g_2, \cdots, g_p)}$$

sein. Man kann aus dieser Gleichung die Zahlen $h, l, \cdots$ eindeutig bestimmen, wenn die rechte Seite positiv aber $\leqq 1$ ist, d. h. wenn ϑ der Ungleichung

$$(10)\quad \big(1-S(g,k,\cdots)\big)\, R(g_1,\cdots,g_p) > \vartheta > -\, S(g,k,\cdots)\, R(g_1,g_2,\cdots,g_p)$$

genügt. In diesem Falle also ergiebt sich $a+\vartheta$ aus a, indem die p ersten Stellen in der Reihe von a ungeändert bleiben. Die Ungleichung (10) lässt dem ϑ einen Spielraum nach der negativen und nach der positiven Seite, wenn $S(g,k,\cdots)$ nicht $=1$ ist. Ist aber $S(g,k,\cdots)=1$ oder sind alle Zahlen $g,\ k,\ \cdots = 1$, so kann ϑ nur negativ sein. Dies ist selbstverständlich; denn, weil dann

$$(11)\qquad a = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, 1, 1, \cdots),$$

kann eine Abänderung, die die ersten p Stellen *nicht* betrifft, nur einen Einer in eine grössere Zahl verwandeln, wodurch nach (8) der Werth der Reihe verkleinert wird. Eine *Vergrösserung* der in (11) gegebenen Zahl wird also nur erreicht, wenn man eine der Zahlen $g_1, \cdots, g_p$ abändert und zwar verkleinert. Zunächst wird man g_p durch $g_p' < g_p$ ersetzen (wenn, wie wir annehmen, g_p nicht selbst $=1$ ist); dann ist,

$$b = S(g_1, g_2, \cdots, g_{p-1}, g_p', h, l, n, \cdots)$$

gesetzt, $b > a$. Soll $b - a = \vartheta$ sein, so muss

$$\vartheta = R(g_1, g_2, \cdots, g_{p-1})\,\{S(g_p', h, l, n\cdots) - S(g_p, 1, 1, \cdots)\}$$

sein. Es ist aber $S(g_p, 1, 1, \cdots) = \frac{1}{g_p}$, daher hat man die Gleichung

$$S(g_p', h, l, n, \cdots) = \frac{1}{g_p} + \frac{\vartheta}{R(g_1, g_2, \cdots, g_{p-1})}\,.$$

Ist

$$(12)\qquad \vartheta \leqq R(g_1, g_2, \cdots, g_{p-1})\left(1-\frac{1}{g_p}\right),$$

so ist die rechte Seite der Gleichung $\leqq 1$, also kann man aus der Gleichung in der That die Zahlen $g_p', h, l, n, \cdots$ bestimmen.

Die betrachtete Darstellung aller Zahlen, die >0 und $\leqq 1$ sind, durch die Reihen S hat manche Aehnlichkeit mit der Darstellung durch unendliche Decimalbrüche und man kann an jene analoge zahlentheoretische Probleme wie an diese knüpfen. Ich erwähne hier nur die Aufgabe die Zahlen der Menge M in anderer Weise zu charakterisiren als es oben geschehen ist, wo sie definirt sind als diejenigen, welche eine Entwickelung in eine endliche Reihe zulassen. Es ist mir nicht gelungen diese Frage zu erledigen.

II.

Als Anwendung der entwickelten Reihen sei zuerst *eine Function y der Variabeln x construirt, welche für alle $x > 0$ und $\leqq 1$ irrationale Werthe hat und sich eindeutig umkehren lässt.* Um dies zu erreichen setze man

$$x = S(g_1, g_2, g_3, \cdots)$$

und

$$y = \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \cfrac{1}{g_3 + \cdots}}};$$

dann entspricht jedem $x > 0$ und $\leqq 1$ ein einziges System von Zahlen g, also auch nur ein Werth von y, der, weil der Kettenbruch unendlich ist, irrational ist. Ist umgekehrt eine irrationale Zahl $y > 0$ und < 1 gegeben, so kann man sie nur auf *eine* Art in einen Kettenbruch entwickeln, also sind durch y die Zahlen g und damit auch der Werth von x eindeutig bestimmt.

Als zweite Anwendung soll *eine Ebene auf eine Gerade gegenseitig eindeutig abgebildet werden.* Wir beginnen mit der Abbildung eines Quadrats von der Seitenlänge Eins auf eine Strecke von der Länge Eins. Zwei anstossende Quadratseiten seien zu den x- und y-Axen eines Coordinatensystems gewählt und vom einen Endpunkt der Strecke aus Abscissen ξ gezählt, so dass x, y und ξ sich alle drei zwischen 0 und 1 bewegen. Dann wird die Beziehung erhalten, indem man x und y in unendliche Reihen S entwickelt:

$$x = S(g_1, g_2, \cdots),$$
$$y = S(h_1, h_2, \cdots)$$

und dann

$$\xi = S(g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, \cdots)$$

setzt.

Aus der früher bewiesenen Eigenschaft, dass sich eine Zahl nur auf eine Weise in eine unendliche Reihe S entwickeln lässt, folgt, dass einem Punkte $(x y)$ des Quadrates *ein* Punkt (ξ) der Geraden entspricht und umgekehrt. Ausgenommen sind nur die Punkte für die x oder y den Werth Null hat sowie der Punkt der $\xi = 0$ entspricht, also zwei Quadratseiten und ein Endpunkt der geraden Strecke; für diese giebt es keine Bilder.

Nach einem allgemeinen Satze (siehe Lüroth, Erlanger Berichte 1878, 8. Juli; G. Cantor, Göttinger Nachrichten 1879, Seite 127) muss eine solche Beziehung, wie wir sie eben aufstellten, unstetig sein. Es soll jetzt untersucht werden, für welche Werthsysteme von $x y$ die Unstetigkeiten von ξ eintreten.

Sei

$$x_0 = S(a_1, a_2, \cdots),$$

$$y_0 = S(b_1, b_2, \cdots),$$

und

$$\xi_0 = S(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots).$$

Man ändert nun nach dem früheren ξ_0 sicher um weniger als eine gegebene Grösse δ ab, wenn man die ganze Zahl p aus der Ungleichung

$$\frac{1}{2^{2p}} < \delta$$

bestimmt und dann nur die an $2p + 1^{\text{ter}}$, $2p + 2^{\text{ter}} \cdots$ Stelle stehenden Zahlen von ξ_0 durch andere ersetzt. Somit wird

$$\xi = S(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_p, b_p, a'_{p+1}, b'_{p+1}, \cdots)$$

die Ungleichung $|\xi - \xi_0| < \delta$ erfüllen. Das ξ entspricht aber den Werthen

$$x = S(a_1, a_2, \cdots, a_p, a'_{p+1}, \cdots),$$

$$y = S(b_1, b_2, \cdots, b_p, b'_{p+1}, \cdots).$$

Für die Stetigkeit ist nöthig, dass diese Werthsysteme $(x\,y)$ ein Gebiet erfüllen, welches den Punkt $x_0\,y_0$ allseitig mit endlichen, wenn auch noch so kleinen, Dimensionen umgiebt. Nach den in Gleichung (10) niedergelegten Resultaten können wir aber x aus x_0 und y aus y_0 durch Abänderung der Zahlen, die auf die p^{te} Stelle folgen, herleiten, wenn die Ungleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} \qquad\qquad \big(1 - S(a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots)\big) R(a_1, a_2, \cdots, a_p) \\ > x - x_0 > - S(a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots)\; R(a_1, a_2, \cdots, a_p) \\ \qquad\qquad \big(1 - S(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)\big) R(b_1, b_2, \cdots, b_p) \\ > y - y_0 > - S(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)\; R(b_1, b_2, \cdots, b_p) \end{cases}$$

erfüllt sind. Jedem Werthsystem $(x\,y)$, welches diesen Ungleichungen genügt, entspricht dann ein ξ für das $|\xi - \xi_0| < \delta$ ist. Die Ungleichungen (13) definiren geometrisch gesprochen ein Rechteck, in dessen *Innerem* $(x_0\,y_0)$ aber nur dann gelegen ist, wenn nicht eine der beiden Seiten Null ist. Von den rechten Seiten ist dies unmöglich, dagegen kann es bei den linken eintreten wenn $S(a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots)$ oder $S(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)$ oder beide gleich Eins sind d. h. wenn x_0 oder y_0 oder beide der Menge M angehören. *Somit ist für jeden Punkt* $(x_0 y_0)$, *für den weder* x_0 *noch* y_0 *zu* M *gehört,* ξ *stetig.* Dass in allen anderen Fällen ξ unstetig ist, zeigt sich so:

Es beginne bei x_0 die Periode Eins mit der $q + 1^{\text{ten}}$, bei y_0 mit der $(r + 1)^{\text{ten}}$ Stelle (wo q oder r auch unendlich sein können).

Sei zuerst $q < r$, so dass

$$x_0 = S(a_1, a_2, \cdots, a_q, 1, 1, \cdots),$$
$$y_0 = S(b_1, b_2, \cdots, b_q, b_{q+1}, \cdots)$$

und $a_q > 1$ ist, während unter den Zahlen $b_{q+1}, b_{q+2}, \cdots$ sicher noch von Eins verschiedene vorkommen, weil die Periode Eins, wenn sie existirt, nach der Annahme erst bei der $q + 2^{\text{ten}}$ oder einer höheren Stelle beginnen soll.

Wenn man nun die positive Zahl ε gemäss den Ungleichungen

$$\varepsilon < \left(1 - \frac{1}{a_q}\right) R(a_1, a_1, \cdots, a_{q-1}),$$
$$\varepsilon < R(b_1, b_2, \cdots, b_q)\left(1 - S(b_{q+1}, b_{q+2}, \cdots)\right)$$

bestimmt (was stets möglich ist, weil $S(b_{q+1}, b_{q+2}, \cdots)$ nicht $= 1$ ist) so kann man nach den bei (10) und (11) erhaltenen Resultaten alle x und y, für welche

$$x - x_0 > 0 \text{ und } < \varepsilon,$$
$$y - y_0 > 0 \text{ und } < \varepsilon$$

ist, durch die Formeln

$$x = S(a_1, \cdots, a_{q-1}, a'_q, a'_{q+1}, \cdots),$$
$$y = S(b_1, \cdots, b_{q-1}, b_q, b'_{q+1}, \cdots).$$

durch passende Wahl der Grössen $a'_q, a'_{q+1}, \cdots, b'_{q+1}, \cdots$ (wo $a'_q < a_q$) ausdrücken. Für diesen Punkt $(x y)$ ist aber

$$\xi = S(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_{q-1}, b_{q-1}, a'_q, b_q, a'_{q+1}, \cdots),$$

während

$$\xi_0 = S(a_1, b_1, \cdots, a_{q-1}, b_{q-1}, a_q, b_q, 1, b_{q+1}, \cdots)$$

war.

Nach (8) ist also

$$\xi - \xi_0 > R(a_1, b_1, \cdots, a_{q-1}, b_{q-1}, a_q)\left(1 - S(b_q, 1, b_{q+1}, 1, \cdots)\right);$$

die rechte Seite ist von Null verschieden, weil in der Reihe $b_q, b_{q+1}, \cdots$ Zahlen vorkommen, die nicht gleich Eins sind. Wie klein also auch ε gewählt werden mag, es ist nicht möglich $\xi - \xi_0$ unter die durch die rechte Seite obiger Ungleichung gegebene Grenze herunterzubringen. Dies ist aber das Zeichen, dass ξ in der Nähe von $(x_0 y_0)$ unstetig ist.

Ist $r \leqq q$, so ist

$$y_0 = S(b_1, b_2, \cdots, b_r, 1, 1, \cdots),$$
$$x_0 = S(a, a_2, \cdots, a_r, a_{r+1}, \cdots)$$

und hier ist b_r sicher > 1, und $S(a_r, a_{r+1}, \cdots) < 1$, weil sonst

$$a_r = a_{r+1} = \cdots = 1$$

sein müsste, gegen unsere Annahme über den Beginn der Periode. Es ist dann

$$\xi_0 = S(a_1, b_1, \cdots, a_{r-1}, b_{r-1}, a_r, b_r, a_{r+1}, 1, \cdots).$$

Nimmt man jetzt

$$0 < \varepsilon < \begin{cases} R(b_1, b_2, \cdots, b_{r-1})\left(1 - \frac{1}{b_r}\right), \\ R(a_1, a_2, \cdots, a_{r-1})\left(1 - S(a_r, a_{r+1}, \cdots)\right), \end{cases}$$

so kann man durch

$$x = S(a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}, a'_r, \cdots),$$
$$y = S(b_1, b_2, \cdots, b_{r-1}, b'_r, b'_{r+1}, \cdots)$$

wenn man $b'_r < b_r$ nimmt, alle x und y erzeugen, für die

$$0 < x - x_0 < \varepsilon, \qquad 0 < y - y_0 < \varepsilon$$

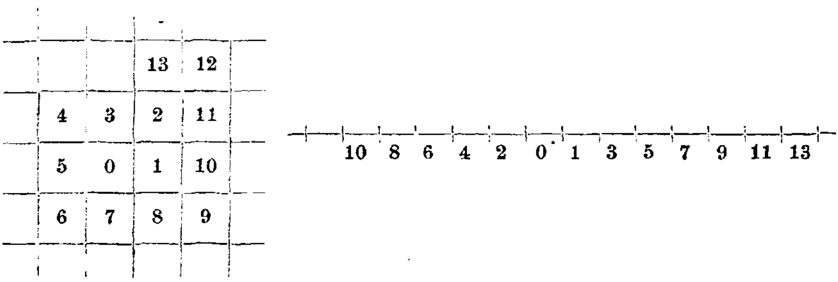
ist. Für diese ist dann

$$\xi = S(a_1, b_1, \cdots, a_{r-1}, b_{r-1}, a'_r, b'_r, \cdots),$$
$$\xi - \xi_0 > R(a_1, b_1, \cdots, a_{r-1}, b_{r-1}, a_r)\left(1 - S(b_r, a_{r+1}, 1, \cdots)\right);$$

die rechte Seite ist hier > 0, weil schon $b_r > 1$ ist. Somit ist auch hier $\xi - \xi_0$ nicht unter eine gewisse Grenze herabzubringen und folglich ξ bei $(x_0\, y_0)$ unstetig.

Also ist ξ unstetig für alle Punkte $(x_0\, y_0)$ bei welchen x_0 oder y_0 oder beide zur Menge M gehören.

Man kann diese Abbildung anwenden um die unbegrenzte Ebene auf die unbegrenzte Gerade gegenseitig eindeutig abzubilden. Man denke sich die ganze Ebene durch äquidistante horizontale und verticale Linien in ein System von Quadraten und die Gerade in gleichgrosse Strecken getheilt. Dann lassen sich jene Quadrate und diese Strecken gegenseitig zuordnen, etwa so, wie es in nebenstehender Figur geschehen ist.



Ein Quadrat kann man auf die gleichnamige Strecke dann so abbilden, dass einerseits die Punkte der linken und der unteren Quadratseite andererseits der linke Endpunkt der Strecke ohne Bilder bleiben, wie dies bei der eben vorgetragenen Abbildung der Fall ist, wenn die Coordinatensysteme passend gewählt werden. Weil aber jede untere Quadratseite zugleich die obere eines andern Quadrates ist, und ebenso die linke Seite zugleich in einem zweiten als rechte Seite auftritt, andererseits der Endpunkt einer Strecke mit dem Anfangspunkt einer zweiten zusammenfällt, so ergiebt sich für *jeden* Punkt der Ebene ein Bild auf der Geraden und umgekehrt.

Schliesslich sei bemerkt, dass man die Reihenentwickelungen die wir an die Reihe der positiven ganzen Zahlen geknüpft haben, mit einigen Modificationen auch ausführen kann, wenn man andere Zahlenreihen zu Grunde legt. Die Fragen, welche oben schon unbeantwortet geblieben sind, dürften sich bei diesen freilich nur noch schwieriger gestalten.

München im October 1882.