Analytische Funktionen und algebraische Zahlen.

I. Teil.

Von E. HECKE in Hamburg.

Die Theorie der algebraischen Zahlkörper gibt, wie ich in einer Folge hiermit beginnender Aufsätze zeigen will, zur Bildung einer großen Reihe analytischer Funktionen von mehreren Variablen Anlaß, welche höchst bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Ein genaueres Studium derselben scheint mir einerseits deshalb von Interesse, weil man erwarten darf, hier wichtige Funktionen vor sich zu haben, aus deren Untersuchung die allgemeine Funktionentheorie mehrerer Variabler einen Anstoß zur Weiterentwickelung erfahren kann (man denke im Gebiet einer Variablen an die Bedeutung der Modulfunktionen für die allgemeine Theorie der automorphen Funktionen und vergegenwärtige sich, wie wenig bisher über spezielle Funktionen mehrerer Variabler bekannt ist). Andrerseits aber sind diese Funktionen das richtige Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Arithmetik der Zahlkörper. Die Übertragung der Fragestellungen und Methoden der rationalen Zahlentheorie auf höhere Zahlkörper wird erst durch Heranziehung derartiger Funktionen in vollem Umfange möglich.

Um an dem Beispiel der reellen quadratischen Körper — auf die ich mich in dem vorliegenden Teil beschränke — die Richtung der Untersuchung zu erläutern, so handelt es sich im folgenden vorzugsweise um Reihen vom Typus

$$\sum_{\mu \gg 0} c_\mu q^\mu q'^{\mu'},$$

worin q, q' komplexe Variable sind und die Summation über die konjugierten ganzen total positiven Zahlen μ, μ' ($\mu \gg 0$) des Körpers zu erstrecken ist, während die Koeffizienten c_μ ein einfaches arithmetisches Bildungsgesetz haben. Dazu gehören als eine der wichtigsten die speziellen *Thetareihen* $\sum\limits_{\mu} q^{\mu^2} q'^{\mu'^2}$, wie ich sie früher zur Untersuchung der Dedekindschen Zetafunktion benutzt habe. Im gewissen Sinne die einfachste dieser Funktionen ist die Reihe $\sum\limits_{\mu \gg 0} q^\mu q'^{\mu'}$, die ich als *geometrische Reihe im Körper* bezeichne. Geht man zu $q = e^{-t}$, $q' = e^{-t'}$ über, so entsteht eine Funktion

$$G(t, t') = \sum_{\mu \gg 0} e^{-t\mu - t'\mu'},$$

welche zunächst die additive Periodizität

$$G(t+2\pi i\,\alpha,\ \ t'+2\pi i\,\alpha') = G(t,t')$$

für beliebige ganze Zahlen α aus dem Körper) besitzt, sodann aber auch die multiplikative Periodizität

$$G(\eta t,\ \eta' t') = G(t,t') \tag{1}$$

für jede total positive Einheit η des Körpers. Damit ist die diskontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ der Substitutionen

$$t_1 = \eta t + 2\pi i\,\alpha, \quad t_1' = \eta' t' + 2\pi i\,\alpha'$$

definiert.

Im § 1 beweise ich zunächst einige Sätze über die Singularitäten von Funktionen, die bei dieser Gruppe invariant bleiben. Singulär sind jedenfalls die Punkte, wo beide Koordinaten rein imaginär sind, und nach einem Satze von HARTOGS müssen daher noch unendlich viele weitere Singularitäten existieren, vermutlich sind singulär bereits alle Punkte, wo auch nur eine der Koordinaten rein imaginär ist, so daß keine dieser Funktionen über das Gebiet $\Re(t) > 0$, $\Re(t') > 0$ fortsetzbar ist.

Im § 2 stelle ich dann mittels einer Art Poincaréscher Reihen eine ganze Klasse derart invarianter Funktionen her, für welche darnach im § 3 die Fourierentwickelung nach Potenzen von e^{-t}, $e^{-t'}$ hergeleitet wird. Dabei zeigt sich, daß die geometrische Reihe im Körper, $G(t,t')$, noch in weiterer Hinsicht das Analogon zur Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nt}$ ist, da die Poincarésche Reihe das Analogon zur Partialbruchzerlegung der Kotangente ist. Aber ein wesentlicher Unterschied ist vorhanden: $G(t,t')$ ist in der Tat nicht fortsetzbar. Der Beweis dafür läßt sich nach einer Methode führen, welche ich bei einem verwandten Problem schon angegeben habe, das entsteht, wenn man $q = q'$ setzt und $G(t,t')$ als Funktion der einen Variablen $q = e^{-t}$ untersucht. Als spezieller Fall erscheinen dann die Potenzreihen $\sum\limits_{m} R(m\alpha)\,q^m$, wo α eine Zahl aus k[1]).

---

[1]) Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. Diese Abhandlungen Bd. 1, Heft 1. Auf der Mathematiker-Tagung in Jena (1921) hat Herr SIEGEL über seine schönen Untersuchungen zur additiven analytischen Zahlentheorie in total reellen algebraischen Körpern berichtet. Auch er ist auf die Bedeutung der Reihe $G(t,t')$ aufmerksam geworden, hat insbesondere auch die interessante Partialbruchzerlegung aus § 2 und 3 gefunden, behandelt aber im übrigen, wie er mir mitteilte, die Funktionen unter andern Gesichtspunkten und nach andern Methoden. Meine Untersuchungen nehmen ihren Ausgang von der Theorie der Modulfunktionen, wo ich schon früher ähnliche Entwickelungen bemerkte (vgl. meine Note Gött. Nachr. 1910, Über die Konstruktion der Klassenkörper reeller quadratischer Körper... § 2). Die Hauptschwierigkeit habe ich aber erst durch die Einführung meiner $\zeta(s;\lambda)$ erledigen können, wie hier in § 5.

Die folgenden Paragraphen sind dem genauen Studium dieser und ähnlicher Funktionen in der Nachbarschaft der (sich als singulär herausstellenden) Mannigfaltigkeit $\Re(t) = 0$ oder $\Re(t') = 0$ gewidmet. Im § 5 wird für die Funktion $G(t, t')$ eine dritte sehr bemerkenswerte Darstellung abgeleitet, eine im ganzen Existenzbereich konvergente (nicht nur asymptotische) Entwickelung nach Potenzen von $\left(\frac{t}{t'}\right)^{\frac{\pi i}{\log \eta}}$, welche die Invarianz bei (1) in Evidenz setzt. Dabei lassen sich die bei $t = 0$, $t' = 0$ unendlich werdenden Terme isolieren, und es ergibt sich

$$G(t, t') = \frac{A}{t t'} + B \log t t' + O(1)$$

mit konstantem A, B $(A \neq 0)$. Die Abschätzung bezieht sich auf gegen Null konvergierendes $t \cdot t'$. Der vorangehende § 4 behandelt auf die gleiche Art eine noch einfachere Funktion $E(t, t')$.

Im § 6 übertrage ich diese Methode auf allgemeinere Funktionen, deren Koeffizienten c_μ mit Klassen- und Größencharakteren gebildet sind, beschränke mich aber hier auf die Berechnung der bei $t = 0$, $t' = 0$ unendlich werdenden Bestandteile. Hieraus ergeben sich *unendlich viele andere Darstellungen* von $G(t, t')$, ebenfalls im ganzen Existenzbereich konvergent, die das Verhalten bei Annäherung an andere Randpunkte erkennen lassen, und zwar findet sich

$$G\left(t + \frac{2\pi i \varkappa}{\sqrt{d}},\ t' - \frac{2\pi i \varkappa'}{\sqrt{d}}\right) = A(\varkappa) \log t t' + O(1),$$

wo $A(\varkappa)$ von t, t' unabhängig, $\varkappa, \varkappa'$ konjugierte nicht-ganze Körperzahlen sind. Endlich bringt § 6 nach der gleichen Methode in Kürze die Untersuchung der „logarithmischen Reihe im Körper", als Ergebnis kommt

$$\sum_{\mu \succ 0} \frac{e^{-t\mu - t'\mu'}}{N(\mu)} = A_2 \log^2 t t' + A_1 \log t t' + O(1)$$

und das Entsprechende für die anderen Randpunkte.

Alle Resultate werden im Grunde mittels desselben Prinzipes gewonnen: *Wenn eine Funktion bei einer Substitution (von unendlich hoher Ordnung) invariant bleibt, so entwickle man die Funktion in eine Fouriersche Reihe nach einer geeignet gewählten Variablen, welche diese Invarianz in Evidenz setzt.*

So primitiv dieser Gedanke ist, so fruchtbar ist er. Merkwürdigerweise ist er aber nicht einmal in dem soviel durchgearbeiteten Gebiete der elliptischen Modulfunktionen in vollem Umfange zur Anwendung gebracht worden, und ich werde später zeigen, daß dieses Prinzip hier noch unbekannte arithmetisch und funktionentheoretisch interessante Konsequenzen hat.

Das technische Hilfsmittel zur Durchführung des Prinzipes sind nun die von mir zur Begründung der analytischen Zahlentheorie in mehreren Dimensionen eingeführten Zetafunktionen mit Größencharakteren, $\zeta(s; \lambda)$, welche vermöge der Integralformel (12) in die Theorie hineinkommen. Der Sachverhalt ist etwa der: Diese unendlich vielen nur von der *einen kontinuierlichen Variablen* s abhängigen Funktionen, welche aber in den λ noch einen ganzzahligen Parameter enthalten, sind ein Äquivalent für *eine* Funktion von *zwei* kontinuierlichen Variablen. — Die Funktionalgleichung der $\zeta(s, \lambda)$ spielt in den Rechnungen eine wesentliche Rolle; übrigens erweist sich auch die Benutzung idealer Zahlen an Stelle von Idealen hier wieder als höchst zweckmäßig.

Die Theorie, wie ich sie in § 4—7 darstelle, läßt sich ohne erhebliche Änderung auf *jeden algebraischen Zahlkörper*, den imaginär-quadratischen ausgenommen, übertragen, auch wenn die konjugierten Körper nicht alle reell sind. Nur geht in letzterem Falle die additive Periodizität der Funktionen verloren. Eine Art Partialbruchzerlegung wie in § 2 und 3 existiert jedenfalls noch, aber nicht mehr für alle Werte des Exponenten s.

In den folgenden Arbeiten werde ich dann auf dieser Basis eine allgemeine Theorie der Modulfunktionen entwickeln, die bereits im Falle $n = 2$ wesentlich mehr liefert, als bisher bekannt ist — dann den Zusammenhang aller dieser Fragen mit dem Klassenzahlproblem (Kroneckersche Grenzformel) erörtern, endlich mehrere Typen von Dirichletschen Reihen, welche zu einem algebraischen Zahlkörper gebildet werden können, untersuchen und ihre Anwendung auf die analytische Zahlentheorie (neuartige Gitterpunktprobleme) geben. Einen speziellen Fall im reellen quadratischen Körper, der überhaupt dabei eine Ausnahmestellung einnimmt, habe ich schon in der obengenannten Arbeit diskutiert. Im Anschluß an diese Theorie wird sich übrigens ein neuer Beweis für die Fortsetzbarkeit aller Zetafunktionen ergeben, der die Theorie der Einheiten überhaupt nicht benutzt, vielmehr nur davon Gebrauch macht, daß die ganzen Körperzahlen einen n-gliedrigen Modul bilden. Auch für die Riemannsche $\zeta(s)$ scheint mir dieser Beweis neu.

§ 1. Allgemeines über Gruppe und notwendige Singularitäten.

Es sei k ein reeller quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante d, η die Grundeinheit mod. 1, welche > 1 ist. Wir beschäftigen uns mit der Frage, eindeutige analytische Funktionen von zwei komplexen Variablen τ, τ' zu finden, welche die Bedingungen

$$1.\quad \varphi(\tau+\mu,\ \tau'+\mu') = \varphi(\tau,\ \tau')$$

für jedes Paar konjugierter ganzer Zahlen μ, μ' des Körpers,

$$2.\quad \varphi(\eta\tau,\ \eta'\tau') = \varphi(\tau,\ \tau')$$

erfüllen. Sie gehören also zu der Gruppe simultaner Substitutionen

$$\tau_1 = \eta^k\tau + \mu,\quad \tau_1' = \eta^{-k}\tau' + \mu'$$

($k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ in inf., μ beliebige ganze Körperzahl).

Aus der Invarianz gegenüber dieser Gruppe $\mathfrak{G}$ folgt zunächst die Existenz unendlich vieler Singularitäten, nämlich der Fixpunkte der hyperbolischen Substitutionen der Gruppe. Fixpunkte sind offenbar die Punkte, deren beide Koordinaten reell und von der Form sind

$$\tau_0 = \frac{\mu}{1-\eta^k},\quad \tau_0' = \frac{\mu'}{1-\eta'^k}. \qquad (k \neq 0) \tag{2}$$

Die zugehörige Substitution läßt sich offenbar auf die Form bringen

$$\tau_1 - \tau_0 = \eta^k(\tau - \tau_0),\quad \tau_1' - \tau_0' = \eta^{-k}(\tau' - \tau_0').$$

Wäre nun φ im Punkte τ_0, τ_0' regulär, so ließe es sich in eine Potenzreihe

$$\sum_{m,n \geqq 0} c_{mn}(\tau - \tau_0)^m(\tau' - \tau_0')^n$$

entwickeln, für welche dann die Identität

$$\sum_{m,n} c_{mn}\eta^{k(m-n)}(\tau - \tau_0)^m(\tau' - \tau_0')^n = \sum_{m,n} c_{mn}(\tau - \tau_0)^m(\tau' - \tau_0')^n$$

gelten würde. Hieraus würde folgen

$$c_{mn} = 0,\ \text{ wenn } m \neq n,$$

also wäre φ nur Funktion des Produktes $(\tau - \tau_0)(\tau' - \tau_0')$. Eine solche Funktion kann aber offenbar nicht noch die additive Periodizität 1. besitzen, außer wenn sie konstant ist. Die Punkte (2) liegen nun ersichtlich in der Mannigfaltigkeit der Punkte mit reellen Koordinaten überall dicht und mithin ist die Menge der Punkte

$$\tau \text{ reell und } \tau' \text{ reell} \tag{3}$$

eine singuläre Mannigfaltigkeit jeder Funktion φ unserer Gruppe. Diese zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist nun keine analytische, d. h. nicht durch eine analytische Gleichung zwischen τ, τ' darstellbar, und folglich müssen noch unendlich viele andere singuläre Stellen im Endlichen vorhanden sein. Über singuläre Stellen hat nämlich Herr HARTOGS[1]) folgenden fundamentalen Satz bewiesen:

Es seien ϱ, σ zwei positive Zahlen. Für einen gewissen Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x, y mögen zu jedem der Bedingung $0 < |x| < \varrho$ genügenden Werte $x = \xi$ genau r singuläre Stellen $(\xi, \eta_1) \,..\, (\xi, \eta_r)$ existieren, deren y-Koordinaten der Kreisfläche $|y| < \sigma$ angehören. Alsdann sind die r elementaren symmetrischen Funktionen von $\eta_1, .. \eta_r$ analytische, für $|\xi| < \varrho$ reguläre Funktionen von ξ.

Hätte nun $\varphi(\tau, \tau')$ keine anderen Singularitäten als (3), so setze man $\tau + i\tau' = x$, $\tau - i\tau' = y$ und wende den Hartogsschen Satz auf die so entstehende Funktion von x, y an, deren Singularitäten durch die Bedingung: „x konjugiert imaginär zu y“ charakterisiert wären, im Widerspruch mit der Behauptung des Hartogsschen Satzes.

Ich vermute nun — und alle von mir konstruierten Beispiele bestätigen dies —, daß für jede Funktion φ mit den Eigenschaften 1., 2. bereits alle Punkte τ, τ' singuläre Stellen sind, wo auch *nur eine* der beiden Variablen τ, τ' reell ist, daß also φ über diese Punktmenge hinaus nicht fortsetzbar ist und jedes solche $\varphi(\tau, \tau')$ regulär nur in einem solchen Bereiche sein kann, in welchem die imaginären Teile von τ, τ' je ein festes Vorzeichen besitzen. Doch kann ich gegenwärtig einen Beweis für diese Vermutung nicht geben.

§ 2. Darstellung von invarianten Funktionen durch Poincarésche Reihen.

Um uns nun Funktionen zu verschaffen, welche bei den Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant bleiben, und welche möglichst einfache Singularitäten besitzen, bilden wir analytische Ausdrücke vom Typus der Poincaréschen Reihen. Die einfachste rationale Funktion, welche bei der Substitution 2. invariant bleibt, ist $\tau \cdot \tau'$. Bedeutet $R(z)$ irgendeine rationale Funktion von z, so ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\mu} R((\tau + \mu)(\tau' + \mu')), \tag{4}$$

worin μ alle ganzen Körperzahlen von k durchläuft, formal invariant bei allen Substitutionen von G. Denn es ist wegen $\eta\eta' = 1$

$$(\eta\tau + \mu)(\eta'\tau' + \mu') = (\tau + \eta^{-1}\mu)(\tau' + \eta'^{-1}\mu')$$

[1]) F. HARTOGS, Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde. Acta mathematica Bd. 32 (1909), pag. 76.

und $\eta^{-1}\mu$ durchläuft insgesamt wieder die ganzen Zahlen aus k, wenn μ dies tut. Sofern also jene Reihe gleichmäßig in τ, τ' konvergiert und nicht konstant ist, haben wir eine Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}$ gefunden.

Wir nehmen jetzt an, daß

$$\Im(\tau) > 0, \quad \Im(\tau') < 0. \qquad \text{(Teilraum } T\text{)} \tag{5}$$

Ferner sei T_1 ein abgeschlossenes Gebiet im Innern von T. Alsdann läßt sich zeigen, daß die Reihe (4) gleichmäßig in T_1 konvergiert, falls die Glieder in T_1 alle regulär sind und falls $R(z)$ im Unendlichen in höherer als 1. Ordnung verschwindet. Im Folgenden brauchen wir nur den einfachsten Fall, wo $R(z) = \frac{1}{z^k}$ $(k > 1)$. Um hierfür die Konvergenz zu erkennen, bedenken wir, daß die Funktion

$$|x\tau + y|^2$$

eine binäre definite quadratische Form von x, y ist, und falls τ in T_1 und x, y auf dem Gebilde $x^2 + y^2 = 1$ variiert, also ein positives Minimum p besitzt, mithin für beliebige reelle x, y $> p(x^2 + y^2)$ ist, also für $x = 1$, $y = \mu$,

$$|\tau + \mu|^2 > p(1 + \mu^2).$$

Mithin gibt es für die in Frage stehende Reihe

$$\sum_\mu \frac{1}{(\tau + \mu)^k (\tau' + \mu')^k}$$

in T_1 eine Majorante mit konstanten Gliedern

$$\text{const.} \sum_\mu \frac{1}{(1 + \mu^2)^{\frac{k}{2}} (1 + \mu'^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Diese konvergiert für beliebige reelle Exponenten $k > 1$, weil das Doppelintegral

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du \qquad dv}{(1 + u^2)^{\frac{k}{2}} (1 + v^2)^{\frac{k}{2}}}$$

konvergent ist.

Es liegt nun, nachdem man diesen Ansatz gemacht hat, nahe, ihn in der Art zu verallgemeinern, daß man als erzeugendes Glied der Reihe nicht $\frac{1}{(\tau\tau')^k}$, sondern eine andere, transzendente, Invariante bei der Substitution $\tau_1 = \eta\tau$, $\tau_1' = \eta'\tau'$ wählt, nämlich die Funktion

$$\frac{1}{\tau^{s_1}\tau'^{s_2}}, \text{ wo } s_1 = s + \frac{\pi i k}{\log \eta},$$
$$s_2 = s - \frac{\pi i k}{\log \eta}.$$

Hier ist k eine ganze rationale Zahl, s eine beliebige komplexe Größe, deren reeller Teil > 1. Dabei ist

$$\tau^{s_1} = e^{s_1 \log \tau}, \quad \tau^{s_2} = e^{s_2 \log \tau'}$$

zu setzen, und $\log \tau$, $\log \tau'$ sind diejenigen im Teilraum T eindeutigen Funktionen, deren imaginärer Teil zwischen 0 und π bzw. zwischen $-\pi$ und 0 liegt. Wir gelangen so zu der Reihe

$$F(\tau, \tau'; s_1, s_2) = \sum_\mu \frac{1}{(\tau + \mu)^{s_1} (\tau' + \mu')^{s_2}}. \tag{6}$$

Nach den vorangehenden Ausführungen stellt sie eine in T reguläre Funktion von τ, τ' dar, sobald $\Re(s_1) > 1$, $\Re(s_2) > 1$, welche die additiven Perioden μ besitzt. Sie besitzt überdies auch die Invarianzeigenschaft 2., also Invarianz bei der Gruppe $\mathfrak{G}$, falls $s_1 - s_2$ von der Form $\frac{2\pi i k}{\log \eta}$ mit ganzem rationalen k ist.

Man bemerke übrigens, daß hier $(\tau + \mu)(\tau' + \mu')$ eine quadratische Funktion der ganzen rationalen Summationsbuchstaben m, n ist, deren homogener Bestandteil 2. Grades $\mu \cdot \mu'$ eine *indefinite* Form in m, n ist. Die Konvergenz bei Summation über alle m, n wird durch den Übergang zu nicht reellen Werten τ, τ' in den Bestandteilen 1. Grades hervorgerufen. Wir können also diese Funktionen (6) in ihrer Abhängigkeit von $s = s_1 = s_2$ auch als eine *Verallgemeinerung der Dedekindschen Zetafunktionen* auffassen.

§ 3. Die Fourierreihe der Funktionen F.

Die Darstellung (6) setzt die Invarianz gegenüber der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$ in Evidenz; zu jeder einzelnen Substitution S aus G muß aber noch eine besondere Darstellung existieren, welche die Invarianz gegenüber diesem S allein zum Ausdruck bringt, nämlich eine Entwickelung nach gewissen einfachsten, nur bei S invarianten Funktionen. Dieses Prinzip ist gerade auch für die Anwendungen auf Arithmetik von besonderer Bedeutung.

So wollen wir zunächst in diesem Paragraphen die Fourierentwickelung herleiten, welche F als eine Funktion mit zwei additiven Periodenpaaren besitzen muß.

Sei ω_1, ω_2 eine Basis von k und die Determinante

$$\Delta = \omega_1 \omega_2' - \omega_2 \omega_1' = \sqrt{d} > 0.$$

Wir führen die Variablen u_1, u_2 durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tau &= u_1\omega_1 + u_2\omega_2, \\ \tau' &= u_1\omega_1' + u_2\omega_2' \end{aligned}$$

ein; dann muß sich F als reguläre Funktion von u_1, u_2 mit den Perioden 1,0 und 0,1 in eine Reihe nach Potenzen von $e^{2\pi i u_1}$ und $e^{2\pi i u_2}$ entwickeln lassen. Wir erhalten diese Reihe am bequemsten nach folgendem, auch später mehrfach zu benutzendem Verfahren, bei dem wir nur reelle Variable in Betracht zu ziehen haben: Ist $f(x, y)$ eine zweimal stetig differentiierbare Funktion von x, y, welche nebst ihren Ableitungen bis zur 2. Ordnung absolut ins Unendliche integrierbar ist, so ist

$$(7) \qquad \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{+\infty} f(m_1, m_2) = \sum_{m_1, m_2} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (m_1 u_1 + m_2 u_2)} f(u_1, u_2)\, du_1\, du_2.$$

Denn die Funktion

$$\varphi(u_1, u_2) = \sum_{m_1, m_2} f(m_1 + u_1, m_2 + u_2)$$

ist dann eine periodische, zweimal stetig differentiierbare Funktion von u_1, u_2, welche daher eine Fourierentwickelung

$$(8) \qquad \varphi(u_1, u_2) = \sum_{p,q} A_{pq}\, e^{-2\pi i (p u_1 + q u_2)}$$

besitzt, mit

$$\begin{aligned} A_{pq} &= \int\!\!\int_0^1 e^{2\pi i (p u_1 + q u_2)}\, \varphi(u_1, u_2)\, du_1\, du_2 \\ &= \int\!\!\int_0^1 \Big\{ \sum_{m_1, m_2} f(m_1 + u_1, m_2 + u_2)\, e^{2\pi i (p u_1 + q u_2)} \Big\}\, du_1\, du_2 \\ &= \sum_{m_1, m_2} \int\!\!\int_0^1 f(m_1 + u_1, m_2 + u_2)\, e^{2\pi i (p u_1 + q u_2)}\, du_1\, du_2 \\ &= \sum_{m_1, m_2} \int_{u_1 = m_1}^{m_1 + 1} \int_{u_2 = m_2}^{m_2 + 1} f(u_1, u_2)\, e^{2\pi i (p u_1 + q u_2)}\, du_1\, du_2 \\ &= \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)\, e^{2\pi i (p u_1 + q u_2)}\, du_1\, du_2. \end{aligned}$$

Setzen wir hernach in (8) $u_1 = u_2 = 0$, so folgt die Behauptung (7).

Wir wenden diese Formel auf die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{(\tau + x\omega_1 + y\omega_2)^{s_1} (\tau' + x\omega_1' + y\omega_2')^{s_2}}$$

an und erhalten (für $\Re(s_1) > 1$, $\Re(s_2) > 1$)

$$F(\tau, \tau'; s_1, s_2) = \sum_{m_1, m_2} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{e^{2\pi i (m_1 u_1 + m_2 u_2)}\, du_1\, du_2}{(\tau + u_1\omega_1 + u_2\omega_2)^{s_1} (\tau' + u_1\omega_1' + u_2\omega_2')^{s_2}}$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{e^{\frac{2\pi i}{\Delta}(\mu v - \mu' v')}\, dv\, dv'}{(\tau + v)^{s_1} (\tau' + v')^{s_2}}. \qquad (\mu = m_1\omega_2' - m_2\omega_1')$$

Nun gelten die Formeln

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i c v}\, dv}{(\tau + v)^{s_1}} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } c \geqq 0,\ \Im(\tau) > 0, \\ \dfrac{2\pi e^{\frac{-\pi i s_1}{2}}}{\Gamma(s_1)} (-2\pi c)^{s_1 - 1} e^{-2\pi i c \tau}, \text{ wenn } c < 0, \Im(\tau) > 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i c v'}\, dv'}{(\tau' + v')^{s_2}} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } c \leqq 0,\ \Im(\tau') < 0, \\ \dfrac{2\pi e^{\frac{\pi i s_2}{2}}}{\Gamma(s_2)} (2\pi c)^{s_2 - 1} e^{-2\pi i c \tau'}, \text{ wenn } c > 0,\ \Im(\tau') < 0. \end{cases}$$

Mithin folgt die Schlußformel

$$(9) \sum_{\mu} \frac{1}{(\tau + \mu)^{s_1} (\tau' + \mu')^{s_2}} = \frac{(2\pi)^{s_1 + s_2} e^{-\frac{\pi i}{2}(s_1 - s_2)}}{\Gamma(s_1)\, \Gamma(s_2)\, \Delta^{s_1 + s_2 - 1}} \sum_{\mu \gg 0} \mu^{s_1 - 1} \mu'^{s_2 - 1} e^{2\pi i \frac{\mu\tau - \mu'\tau'}{\Delta}},$$

wo auf der rechten Seite μ nur die total positiven ganzen Zahlen des Körpers durchläuft.

Die unendliche Reihe auf der rechten Seite hat für alle s_1, s_2 einen Sinn und konvergiert im Innern des Teilraumes T der Variablen τ, τ'. Setzt man

$$e^{\frac{2\pi i}{\Delta}\tau} = q, \quad e^{-\frac{2\pi i \tau'}{\Delta}} = q',$$

so daß also der Teilraum T durch die Bedingungen

$$|q| < 1, \quad |q'| < 1$$

charakterisiert ist, so ist die Summe von der Gestalt

$$\sum_{\mu \gg 0} c_\mu q^\mu q'^{\mu'}.$$

Das sind Reihen, die man als Potenzreihen im quadratischen Körper $k(\Delta)$ bezeichnen wird.

Als Funktion von τ, τ' haben sie auch die multiplikative Periodizität 2. dann und nur dann, wenn für alle μ

$$c_{\eta\mu} = c_\mu,$$

d. h. c_μ nur vom Ideale (μ) abhängt. Im Falle der Reihe (9) hat dann also c_μ den Wert

$$c_\mu = N(\mu)^{s-1}\lambda_k(\mu),$$

wo $\lambda_k(\mu)$ den von mir schon bei anderer Gelegenheit eingeführten *Größencharakter von μ mod. 1* bedeutet:

$$\lambda_k(\mu) = \left|\frac{\mu'}{\mu}\right|^{\frac{\pi i k}{\log \eta}}. \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \text{in inf.})$$

Die für meine weiteren Zwecke wichtigsten Reihen (9) sind die beiden, $s = 0$ und 1 entsprechenden,

$$\sum_{\mu \gg 0} q^\mu q'^{\mu'} \text{ und } \sum_{\mu \gg 0} \frac{q^\mu q'^{\mu'}}{\mu\mu'},$$

das Analogon der geometrischen und der logarithmischen Reihe in zwei Variablen.

Für $s = 1$ konvergiert die Poincarésche Reihe nur noch bedingt; die Formel (9) zeigt aber, daß man sie auffassen kann als Grenzwert der absolut konvergenten Reihen für $\lim s = 1$.

Setzt man in der Potenzreihe $q = q'$ und nimmt etwa die Diskriminante d durch 4 teilbar an, $= 4D$, so geht sie in folgende Potenzreihe *einer* Variablen über:

$$\sum_{\mu \gg 0} q^\mu q'^{\mu'} = \sum_{\substack{m+n\sqrt{D}>0 \\ m-n\sqrt{D}>0}} q^{2m} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - 2R\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right) + \frac{2m}{\sqrt{D}}\right)q^{2m}$$

$$= \frac{2q^2}{\sqrt{D}(1-q^2)^2} - 2\sum_{m=1}^{\infty}\left\{R\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right) - \frac{1}{2}\right\}q^{2m}.$$

Dabei ist $R(x)$ der kleinste nicht-negative Rest von x mod. 1. Diese Reihen habe ich bereits früher untersucht[1]) und u. a. ihre Nichtfortsetzbarkeit als Funktion der einen Variablen q über den Kreis $|q| < 1$ hinaus bewiesen.

Das Bildungsgesetz der oben erhaltenen Fourierschen Reihen läßt erkennen, daß bereits gewisse Teilsummen der Glieder bei unserer Gruppe $\mathfrak{G}$

---

[1]) S. 103, Fußnote.

invariant sind, nämlich die einer Serie assoziierter μ entsprechenden Reihen

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \frac{\eta^n \tau - \eta'^n \tau'}{\Delta}} = E^*(\tau, \tau').$$

Es ist z. B.

$$F(\tau, \tau'; s, s) = \frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(s)^2 \Delta^{2s-1}} \sum_{(\mu)_0 \gg 0} N(\mu)^{s-1} E^*(\mu\tau, \mu'\tau'),$$

worin μ jetzt nur die verschiedenen nicht assoziierten totalpositiven ganzen Zahlen des Körpers zu durchlaufen hat.

Endlich läßt sich bei den Fourierreihen die Doppelsumme noch in eine einfache Summe verwandeln und dadurch eine andere bemerkenswerte Darstellung von $F(\tau, \tau')$ gewinnen. Wir setzen

$$t = -\frac{2\pi i \tau}{\Delta}, \quad t' = +\frac{2\pi i \tau'}{\Delta}$$

(das sind also Variable mit positiv reellem Teil). Es seien α, α' zunächst irgendwelche irrationalen reellen Größen mit

$$\alpha > \alpha' > 0.$$

Durch Ausführung der Summation über n findet man dann für die über alle ganzen m, n mit

$$m + n\alpha > 0, \quad m + n\alpha' > 0$$

zu erstreckende Summe

$$\sum_{\substack{m+n\alpha>0 \\ m+n\alpha'>0}} e^{-t(m+n\alpha)-t'(m+n\alpha')} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha'}t - \left(1-R\left(\frac{m}{\alpha'}\right)\right)(\alpha t+\alpha' t')}}{1-e^{-(\alpha t+\alpha' t')}} \tag{10}$$

$$+ \frac{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha'}t'} e^{-R\left(\frac{m}{\alpha}\right)(\alpha t+\alpha' t')}}{1-e^{-(\alpha t+\alpha' t')}}.$$

Für $\alpha = \frac{d+\sqrt{d}}{2}$, $\alpha' = \frac{d-\sqrt{d}}{2}$ ist das unsere Reihe mit $s = 1$. Eine in meiner oben zitierten Arbeit angegebene Methode, welche den Weylschen Satz über die Gleichverteilung von Zahlen mod. 1 benutzt, gestattet dann nach einer kleinen Modifikation zu zeigen, daß für jedes irrationale α, α' die oben definierte Funktion (10) bei Annäherung an $t = 0$, $t' = t'_0$ unendlich groß wird, falls t'_0 ein Wert mit positiv reellem Teil ist. Also ist die Mannigfaltigkeit $t = 0$ für die Funktion eine singuläre. Wegen der zweifachen Periodizität der Funktion folgt daraus, daß jeder Punkt, dessen t rein imaginär ist, ein singulärer ist, auch das Entsprechende für t'; mithin ist die *Funktion* über das Gebiet $\mathfrak{R}(t) > 0$ *und* $\mathfrak{R}(t') > 0$ *nicht fortsetzbar.*

Auf diesen Beweis gehe ich hier nicht näher ein. Denn für unsere Potenzreihen im Körper k werde ich im folgenden auf ganz anderem Wege eine viel tiefergehende Analyse ihres Verhaltens in den singulären Punkten geben, woraus die Nichtfortsetzbarkeit als ein Nebenresultat folgt.

§ 4. Entwicklung von $E^*(\tau, \tau')$ in der Nähe der Mannigfaltigkeit $\tau = 0$.

Nach dem zu Anfang formulierten Prinzip stellen wir jetzt diejenige Entwickelung auf, welche die Invarianz unserer Funktionen bei einer andern Substitution von $\mathfrak{G}$ in Evidenz setzt; wir wählen die hyperbolische Substitution

$$\tau_1 = \eta\tau, \quad \tau_1' = \eta^{-1}\tau'.$$

Hieraus wird sich das Verhalten der Funktionen in der Nähe der dabei festbleibenden Mannigfaltigkeiten $\tau = 0$ oder $\tau' = 0$ ergeben.

Wir gehen dazu nicht von den Poincaréschen Reihen, sondern von der Fourierentwickelung des vorigen Paragraphen aus, und zwar von den einfachsten Bausteinen, der Funktion

$$E(t, t') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^n t - \eta^{-n} t'} = E^*\left(\frac{t\sqrt{d}}{2\pi i}, \frac{-t'\sqrt{d}}{2\pi i}\right).$$

t und t' sind jetzt Variable mit positivem Realteil.

Nach Gl. (7), die natürlich mutatis mutandis auch für einfache Reihen gilt, besteht die Gleichung

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} E(t, t') &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n, \\ A_n \log\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(te^v + t'e^{-v})} e^{\frac{2\pi i n v}{\log\eta}} dv. \end{aligned}$$

Dieses Integral läßt sich nun in folgender bemerkenswerten Art umformen:

$$\text{(12)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(te^v + t'e^{-v})} e^{v(\alpha-\beta)} dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\Gamma(s+\alpha)\,\Gamma(s+\beta)}{t^{s+\alpha}\, t'^{s+\beta}}\, ds.$$

Hier sind α, β komplexe Konstanten, die Integration ist auf der rechten Seite über die unendliche Grade $\Re(s) = \sigma_0$ zu erstrecken und σ_0 ist eine beliebige reelle Größe, welche $> -\Re(\alpha)$ und $> -\Re(\beta)$ ist.

Zum Beweise setzen wir

$$\frac{\Gamma(s+\alpha)}{t^{s+\alpha}} = \int_0^\infty e^{-tx} x^{s+\alpha-1}\,dx,$$

ebenso für β, t' an Stelle von α, t. In dem durch Multiplikation entstehenden Doppelintegrale führen wir an Stelle der alten Variablen x, y neue ein durch die Gleichungen

$$x = \sqrt{u}\,e^v, \quad y = \sqrt{u}\,e^{-v},$$

wobei die Funktionaldeterminante 1 ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(s+\alpha)\,\Gamma(s+\beta)}{t^{s+\alpha}\,t'^{s+\beta}} &= \int_0^\infty \Phi(u)\,u^{s-1}\,du,\\ \text{(13)}\qquad \Phi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}(te^v+t'e^{-v})}\,e^{v(\alpha-\beta)}\,u^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,dv.\end{aligned}$$

Nach den von Herrn MELLIN[1]) aufgestellten Sätzen folgt aus (13) die Umkehrung

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{\Gamma(s+\alpha)\,\Gamma(s+\beta)}{t^{s+\alpha}\,t'^{s+\beta}}\,u^{-s}\,ds$$

und damit für $u = 1$ die Behauptung (12).

Indem wir jetzt zur Abkürzung einführen

$$c = \frac{\pi}{\log\eta}, \quad (\text{also } c > 0),$$

erhalten wir aus (11), (12)

$$\text{(14)}\qquad A_n(t,t')\log\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{\Gamma(s+inc)\,\Gamma(s-inc)}{t^{s+inc}\,t'^{s-inc}}\,ds. \qquad (\sigma_0 > 0)$$

Durch Verschieben des Integrationsweges nach links ($\lim \sigma_0 = -\infty$) und Berücksichtigung der Residuen des Integranden ergibt sich, wie schon Herr MELLIN gezeigt hat, für $n \neq 0$

---

[1]) MELLIN, Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen. Math. Ann. 68 (1910) S. 305—337. Dort findet sich die Formel mit $\alpha = \beta = 0$.

$$A_n(t,t')\log\eta =$$

$$t^{-2inc}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-p-2inc)}{p!}(-tt')^p + t'^{2inc}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-p+2inc)}{p!}(-tt')^p$$

und für $n = 0$

$$A_0(t,t')\log\eta = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}\frac{(tt')^p}{(p!)^2} - \log tt'\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(tt')^p}{(p!)^2}.$$

Hiernach hat also $E(t,t')$ folgende Gestalt:

$$E(t,t') = f_0(tt')\log tt' + g_0(tt') + \sum_{n\neq 0}[t^{2inc} + t'^{2inc}]\,g_n(tt'). \tag{15}$$

Dabei sind alle f_i und g_i ganze transzendente Funktionen der einzigen Variablen tt'[1]. Diese Darstellung zeigt die eine Invarianz von E:

$$E(\eta t, \eta^{-1}t') = E(t,t').$$

Dagegen ist nicht daraus die additive Periodizität von E zu entnehmen. Lassen wir t, t' solche positiv reellen Werte durchlaufen, daß tt' gegen Null konvergiert, so folgt aus (15)

$$\lim_{tt'=0}\frac{E(t,t')}{\frac{c}{\pi}\cdot\log tt'} = 1,$$

derart, daß die Differenz zwischen Zähler und Nenner sogar beschränkt bleibt. Also für festes t'_0 mit positiv reellem Teil

$$\lim_{t=0} E(t,t'_0) = \infty,$$

wenn t über positiv reelle Werte gegen Null strebt. Da aber

$$E(t+2\pi i\mu,\ t'+2\pi i\mu') = E(t,t')$$

für jede ganze Körperzahl μ, so ist auch

$$\lim_{t=0} E(t+2\pi i\mu,\ t'_0) = \infty.$$

Da nun die Zahlen μ überall dicht liegen, so folgt, daß die dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}(t) = 0$ aus lauter singulären Punkten besteht, und analoges über die $\mathfrak{R}(t') = 0$, d.h. *$E(t,t')$ ist über den Bereich, in welchem beide Argumente positiv reellen Teil haben, nicht fortsetzbar.*

[1]) Diese Gleichung besteht offenbar für beliebige positive η, nicht nur für Einheiten aus k.

§ 5. Entwickelung der geometrischen Reihe bei $t = 0$.

Die vorstehend auf $E(t, t')$ angewandte Methode wollen wir jetzt zunächst auf die Reihe

$$\sum_{\mu \gg 0} q^{\mu} q'^{\mu'} \quad \text{bzw.} \quad G(t, t') = \sum_{\mu \gg 0} e^{-t\mu - t'\mu'}$$

anwenden. Zu diesem Zwecke betrachten wir gleichzeitig diejenigen Reihen, welche hieraus entstehen, wenn man die Exponenten μ, μ' durch $\mu, -\mu'$ ersetzt und jetzt μ die ganzen Zahlen mit $\mu > 0$ und $\mu' < 0$ durchlaufen läßt. Endlich verallgemeinern wir gleich das Bildungsgesetz, indem wir für μ nicht alle ganzen Körperzahlen mit gewissen Vorzeicheneigenschaften zulassen, sondern nur diejenigen, welche durch ein festes Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar sind. Hierbei ist dann die von mir an anderer Stelle begründete Einführung der idealen Zahlen sehr vorteilhaft. Ich benutze die dort eingeführte Bezeichnung[1]: Es sei ein dem Körper k zugeordnetes System idealer Zahlen nebst ihren Konjugierten festgelegt, jeder Idealklasse entspricht dann eine Klasse dieser idealen Zahlen. Ferner seien die beiden Vorzeichencharaktere

$$v(\mu) = \left(\frac{\mu}{|\mu|} \cdot \frac{\mu'}{|\mu'|}\right)^a. \qquad (a = 0 \text{ oder } 1)$$

Der Charakter mit $a = 0$ heiße v_0, der mit $a = 1$ heiße v_1. Wir führen folgende Funktionen ein:

$$\Phi(t, t'; v, \mathfrak{K}) = \sum_{\mu \text{ in } \mathfrak{K}} e^{-t|\mu| - t'|\mu'|} v(\mu). \tag{16}$$

Dabei soll μ alle ganzen idealen Zahlen der Klasse $\mathfrak{K}$ außer 0 durchlaufen. Bedeutet $\mathfrak{K}_1$ insbesondere die Hauptklasse, so ist offenbar z. B.

$$4\,G(t, t') = \Phi(t, t', v_0, \mathfrak{K}_1) + \Phi(t, t', v_1, \mathfrak{K}_1).$$

Für diese Funktionen Φ wollen wir wie eben für $E(t, t')$ die Fourierentwickelung um den Fixpunkt $t = 0$, $t' = 0$ aufstellen. Es ist

$$\Phi(t, t'; v, \mathfrak{K}) = \sum_{(\mu_0) \text{ in } \mathfrak{K}} v(\mu)\, E(|\mu|\, t, |\mu'|\, t').$$

Hierbei soll der Zusatz $(\mu)_0$ am Summenzeichen, wie auch späterhin, bedeuten, daß μ nur die verschiedenen mod. 1 nicht assoziierten (d. h. sich nicht nur um Potenzen von η unterscheidenden) Zahlen aus $\mathfrak{K}$ durchlaufen soll. Nach (7), (12) ist daher

---

[1]) Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen I., II. Math. Zeitschr. Bd. 1 und Bd. 6. Zur raschen Orientierung erinnere ich nur daran, daß für Körper mit der Klassenzahl 1, wie $k(\sqrt{2})$ und $k(\sqrt{3})$, die idealen Zahlen mit den Zahlen des Körpers selbst identisch sind.

$$\Phi(t, t'; v, \mathfrak{K}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{B_n(v, \mathfrak{K})}{\log \eta}, \tag{17}$$

$$B_n(v, \mathfrak{K}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\Gamma(s + inc)\,\Gamma(s - inc)}{t^{s+inc}\,t'^{s-inc}} \left(\sum_{(\mu)_0 \text{ in } \mathfrak{K}} \frac{v(\mu)}{|\mu|^{s+inc}\,|\mu'|^{s-inc}} \right) ds$$

$$= \frac{e(1)}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\Gamma(s + inc)\,\Gamma(s - inc)}{t^{s+inc}\,t'^{s-inc}}\, \zeta(s; \lambda_n v, \mathfrak{K})\, ds, \qquad (\sigma_0 > 1)$$

und es bedeutet

$e(1)$ die Anzahl mod. 1 nicht assoziierter Einheiten (also 2 oder 4),

$$\lambda_n(\mu) = \left|\frac{\mu'}{\mu}\right|^{inc}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots;$$

endlich, wenn für alle Einheiten ε: $\lambda_n(\varepsilon)\, v(\varepsilon) = +1$, so ist

$$\zeta(s; \lambda_n v, \mathfrak{K}) = \sum_{(\mu) \text{ in } \mathfrak{K}} \frac{\lambda_n(\mu)\, v(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \frac{1}{e(1)} \sum_{(\mu)_0 \text{ in } \mathfrak{K}} \frac{v(\mu)}{|\mu|^{s+inc}\,|\mu'|^{s-inc}}$$

die mit dem Größencharakter $\lambda_n v$ des Ideals (μ) gebildete Zetafunktion der Klasse $\mathfrak{K}$; dagegen soll sein

$$\zeta(s; \lambda_n v, \mathfrak{K}) = 0, \text{ wenn } \lambda_n(\varepsilon)\, v(\varepsilon) \neq 1 \text{ für eine Einheit } \varepsilon.$$

Von diesen ζ-Funktionen habe ich bewiesen:

Setzt man

$$\xi(s; \lambda_n v, \mathfrak{K}) = A^s\, \Gamma\!\left(\frac{s + a + inc}{2}\right) \Gamma\!\left(\frac{s + a - inc}{2}\right) \zeta(s, \lambda_n v, \mathfrak{K})$$

mit

$$A = \frac{1}{\pi} |\sqrt{d}|,$$

so ist ξ eine ganze transzendente Funktion von s (wenn $\lambda_n v \neq 1$) und genügt der Gleichung

$$\xi(1 - s; \overline{\lambda_n v}, \mathfrak{K}') = \xi(s; \lambda_n v, \mathfrak{K}).$$

Dabei ist $\overline{\lambda_n v}$ der konjugiert imaginäre, d. h. reziproke Charakter zu $\lambda_n v$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ ist die Klasse von $\frac{1}{\sqrt{d}}$, d. h. $\mathfrak{K}'$ die zu $\mathfrak{K}$ reziproke Klasse.

Auf Grund dieser Tatsachen läßt sich das Integral für B_n in der Art auswerten, daß der Integrationsweg $\mathfrak{R}(s) = \sigma_0$ ins negativ Unendliche gerückt wird. Indem wir nämlich vermöge der Funktionalgleichung $\zeta(s)$ durch $\zeta(1 - s)$ ausdrücken, finden wir durch eine kleine Rechnung

$$B_n(v, \mathfrak{K}) =$$

$$\frac{e(1)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{\pi A^{1-2s}2^{2s-2}\zeta(1-s;\overline{\lambda_n v},\mathfrak{K}')\,ds}{t^{s+inc}\,t'^{s-inc}\sin\pi\left(\frac{s+1-a}{2}+\frac{inc}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{s+1-a}{2}-\frac{inc}{2}\right)}.$$

Hieraus erkennen wir, daß das Integral gegen Null strebt, wenn $\sigma_0 \to -\infty$, falls

$$\left|\frac{A^2 t t'}{4}\right| < 1. \tag{18}$$

Mithin ist, wenn noch nach bekanntem Muster das Verhalten des Integranden bei beschränktem $\mathfrak{R}(s)$ und unendlich werdendem Imaginärteil von s berücksichtigt wird, unter der Bedingung (18) $B_n(v,\mathfrak{K}) =$ Summe der Residuen des Integranden im Gebiete $\mathfrak{R}(s) \leqq 1$. So erhält man

I. $n \neq 0$.

$$B_n(v, \mathfrak{K}) = \frac{e(1)\,A}{2\sin\pi\, inc}\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{A^2 t t'}{4}\right)^{1-a+2q}\left\{\begin{aligned}&\zeta(2-a+2q-inc,\overline{\lambda_n v},\mathfrak{K}')\left(\frac{At}{2}\right)^{-2inc}\\ -&\zeta(2-a+2q+inc,\overline{\lambda_n v},\mathfrak{K}')\left(\frac{At'}{2}\right)^{2inc}\end{aligned}\right\}$$

II. 1. $n = 0$, $a = 0$ (d. h. $v = v_0$):

$$B_0(v_0, \mathfrak{K}) = \frac{R\,e(1)}{t t'} - \frac{A\pi\, e(1)}{4}R$$

$$-\frac{A}{\pi}e(1)\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\zeta(2+2q,\mathfrak{K}')\log\frac{A^2 t t'}{4}+\zeta'(2+2q,\mathfrak{K}')\right\}\left(\frac{A^2 t t'}{4}\right)^{1+2q}.$$

Dabei ist R das Residuum der Reihe $\zeta(s;\mathfrak{K}')$ im Punkte $s = 1$, unabhängig von $\mathfrak{K}'$, nämlich

$$R = \frac{4}{e(1)}\frac{\log\eta}{|\sqrt{d}\,|}.$$

II. 2. $n = 0$, $a = 1$, ($v = v_1$):

$$B_0(v_1, \mathfrak{K}) =$$

$$-\frac{A\,e(1)}{\pi}\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\zeta(1+2q,\bar{v}_1,\mathfrak{K}')\log\frac{A^2 t t'}{4}+\zeta'(1+2q,\bar{v}_1,\mathfrak{K}')\right\}\left(\frac{A^2 t t'}{4}\right)^{2q}.$$

Für die hierin auftretenden ζ trage man nun, solange der reelle Teil des Argumentes >1, die absolut konvergenten Dirichletschen Reihen ein; nach Vertauschung der Summation über q und $(\mu)_0$ läßt sich dann die über q ausführen, und man erhält folgende im ganzen Teilraum der t, t' konvergente Darstellung:

$$B_0(v_0, \mathfrak{K}) = \frac{R e(1)}{t t'} - \frac{A \pi e(1)}{4} R - \frac{A^3 t t'}{4 \pi} \sum_{(\mu)_0 \text{ in } \mathfrak{K}'} \frac{1}{N(\mu)^2} \frac{\log \frac{A^2 t t'}{4 |N(\mu)|}}{1 - \left(\frac{A^2 t t'}{4 N(\mu)}\right)^2}.$$

$$B_n(v_0, \mathfrak{K}) \text{ (für } n \neq 0) = \frac{A^3 t t'}{8 \sin \pi i n c} \sum_{(\mu)_0 \text{ in } \mathfrak{K}'} \frac{1}{N(\mu)^2} \frac{\left(\frac{A t}{2 \mu}\right)^{-2inc} - \left(\frac{A t'}{2 \mu'}\right)^{2inc}}{1 - \left(\frac{A^2 t t'}{4 N(\mu)}\right)^2},$$

$$\begin{aligned} B_0(v_1, \mathfrak{K}) = & - \frac{A e(1)}{\pi} \zeta(1, \bar{v}_1, \mathfrak{K}') \log t t' \\ & - \frac{A e(1)}{\pi} \left\{ \zeta(1, \bar{v}_1, \mathfrak{K}') \log \frac{A^2}{4} + \zeta'(1, \bar{v}_1, \mathfrak{K}') \right\} \\ & - \frac{A^5 t^2 t'^2}{16 \pi} \sum_{(\mu)_0 \text{ in } \mathfrak{K}'} \frac{\bar{v}_1(\mu)}{|N(\mu)|^3} \frac{\log \frac{A^2 t t'}{4 |N(\mu)|}}{1 - \left(\frac{A^2 t t'}{4 N(\mu)}\right)^2}. \end{aligned}$$

$$B_n(v_1, \mathfrak{K}) \text{ (für } n \neq 0) =$$

$$\frac{A e(1)}{2 \sin \pi i n c} \left\{ \zeta(1 - inc, \overline{\lambda_n v_1}, \mathfrak{K}') \left(\frac{A t}{2}\right)^{-2inc} - \zeta(1 + inc, \overline{\lambda_n v_1}, \mathfrak{K}') \left(\frac{A t'}{2}\right)^{2inc} \right\}$$

$$+ \frac{A^5 t^2 t'^2}{32 \sin \pi i n c} \sum_{(\mu)_0 \text{ in } \mathfrak{K}'} \frac{\bar{v}_1(\mu)}{|N(\mu)|^3} \frac{\left(\frac{A t}{2 |\mu|}\right)^{-2inc} - \left(\frac{A t'}{2 |\mu'|}\right)^{-2inc}}{1 - \left(\frac{A^2 t t'}{4 N(\mu)}\right)^2}$$

und damit

$$4 \log \eta \sum_{\mu \succ 0} e^{-t\mu - t'\mu'} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{B_n(v_0, \mathfrak{K}_1) + B_n(v_1, \mathfrak{K}_1)\}.$$

Diese Doppelreihe in $n, (\mu)_0$ konvergiert absolut gleichmäßig in dem Kegelraum

$$\left.\begin{array}{ll} -\frac{\pi}{2} + \delta < \begin{array}{c} \arg t \\ \arg t' \end{array} < \frac{\pi}{2} - \delta & (\delta > 0) \\ |t| < \text{const.}, \ |t'| < \text{const.} & \end{array}\right\} \text{(Raum } K\text{)}.$$

Lassen wir in K eine oder beide Variablen t, t' gegen Null konvergieren, so bleiben alle $B_n (n \neq 0)$ beschränkt und weiter folgt nach (16), (17) für irgendein Ideal $\mathfrak{a}$ aus der Klasse $\mathfrak{K}$

$$(19) \quad \sum_{\substack{\mu \succ 0 \\ \mu \equiv 0 (\mathfrak{a})}} e^{-t\mu - t'\mu'} = \frac{1}{t t' \sqrt{d}\, N(\mathfrak{a})} - \frac{A e(1)}{4 \pi \log \eta} \zeta(1, \bar{v}_1; \mathfrak{K}) \log t t' + O(1).$$

(Die Abschätzung $O(1)$ ist dabei gleichmäßig in K gemeint.)

Auf der linken Seite durchläuft μ alle total positiven, durch $\mathfrak{a}$ teilbaren ganzen Körperzahlen. Wir haben, um das einzusehen, nur t, t'

durch $t|\alpha|$, $t'|\alpha'|$ zu ersetzen, worin die ideale Zahl α das Ideal $\mathfrak{a}$ aus der Klasse $\mathfrak{K}^{-1}$ bestimmt. Die Zahlen $\alpha\mu$ sind dann alle durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Körperzahlen, wenn μ die idealen Zahlen aus $\mathfrak{K}$ durchläuft.

Bei Annäherung an den Punkt 0, t' in K werden daher unsere Reihen (19) unendlich groß; wegen der additiven Periodizität gilt das Gleiche für den Punkt $2\pi i\mu$, t', wo μ eine beliebige durch $\mathfrak{a}$ teilbare Körperzahl ist. Da diese Punkte in dem Raume $\Re(t) = 0$ überall dicht liegen, *sind die Reihen nicht fortsetzbar.*

Ähnliche Entwickelungen gelten nun auch in der Nähe der Randpunkte $2\pi i\mu$, t', wo μ eine *gebrochene* Körperzahl ist. Wir wollen aber hierfür nicht die vollständigen Reihen für die den B_n entsprechenden Glieder berechnen, sondern uns mit der Aufstellung der unendlich werdenden Bestandteile begnügen.

§ 6. Potenzreihen im Körper k, deren Koeffizienten Klassen- oder Größencharaktere sind.

Wir verallgemeinern das Bildungsgesetz der zu untersuchenden Potenzreihen zunächst in folgender Weise:

Sei $\mathfrak{f}$ ein beliebiges ganzes Ideal des Körpers ($\neq 0$), $\eta = \eta(\mathfrak{f})$ die Grundeinheit mod. $\mathfrak{f}$ ($\eta > 1$) und

$$\lambda(\mu) = \left|\frac{\mu'}{\mu}\right|^{ic}, \quad c = \frac{\pi}{\log\eta}, \quad \lambda(\eta\mu) = \lambda(\mu)$$

sei der erzeugende Größencharakter der idealen *Zahl* μ. Ferner bedeute $\chi_0(\mu)$ einen Klassencharakter der Zahl μ mod. $\mathfrak{f}$, für den engsten Aequivalenzbegriff:

$$\chi_0(\mu) = 0, \text{ wenn } (\mu, \mathfrak{f}) \neq 1.$$
$$\chi_0(\mu) = \chi_0(\nu), \text{ wenn } \mu \equiv \nu \,(\text{mod. } \mathfrak{f}),\ \frac{\mu}{\nu} \gg 0,\ (\mu, \mathfrak{f}) = 1.$$

Mit irgendeiner ganzen rationalen Zahl k bilden wir nun die Funktion von t, t' ($\Re(t) > 0$, $\Re(t') > 0$)

$$\Phi(t, t'; \lambda^k\chi_0) = \sum_{\mu}{}' \lambda^k(\mu)\,\chi_0(\mu)\, e^{-t|\mu| - t'|\mu'|}.$$

μ durchläuft dabei sämtliche ganzen idealen Zahlen unseres Systems, exkl. 0. Diese Funktion hat die Invarianzeigenschaft

$$\Phi(\eta t, \eta' t'; \lambda^k\chi_0) = \Phi(t, t'; \lambda^k\chi_0)$$

und kann daher nach der Methode des vorigen Paragraphen behandelt werden. Wir erhalten eine *konvergente Entwickelung* nach Potenzen von t^{ic} und t'^{ic} und wir wollen jetzt die *Glieder* derselben bestimmen, *welche* bei Annäherung an $t=0$ oder $t'=0$ innerhalb des Raumes K *unendlich werden*. In den zu (14) analogen Integralen treten die Funktionen auf:

$$\zeta(s;\ \lambda^n\chi_0) = \sum_{(\mu)}{}' \frac{\lambda^n(\mu)\,\chi_0(\mu)}{|N(\mu)|^s}.$$

Dabei soll $\lambda^n(\varepsilon)\,\chi_0(\varepsilon) = 1$ für jede Einheit ε des Körpers sein.

Andernfalls soll das Zeichen ζ die Null bedeuten. Ich erinnere nun an folgende früher von mir bewiesenen Sätze:

1. Wenn $\lambda^n\chi_0$ nicht der Hauptcharakter ist, so ist $\zeta(s;\lambda^n\chi_0)$ eine ganze Funktion von s, andernfalls ist $s=1$ ein einfacher Pol und die einzige Singularität im Endlichen.

2. Wenn $\lambda^n\chi_0$ ein *eigentlicher Charakter nach* $\mathfrak{f}$ ist, so genügt die Funktion

$$\xi(s;\lambda^n\chi_0) = \Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}+\frac{inc}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}-\frac{inc}{2}\right)A^s(\mathfrak{f})\,\zeta(s;\ \lambda^n\chi_0)$$

$\left(A(\mathfrak{f}) = \frac{1}{\pi}\sqrt{d\,N(\mathfrak{f})},\ a_1,\ a_2\right.$ die Exponenten von χ_0, gleich 0 oder 1$\Big)$ der Funktionalgleichung

$$\xi(s;\lambda^n\chi_0) = W(\lambda^n\chi_0)\,\xi(1-s;\overline{\lambda^n\chi_0}).$$

W ist hierbei eine von s unabhängige Konstante vom Betrage 1. Man erhält so nach der Methode des vorigen Paragraphen folgende Entwickelung: Sei $e(\mathfrak{f})$ die Anzahl der mod. $\mathfrak{f}$ nicht assoziierten Einheiten, für jeden eigentlichen Charakter $\lambda^k\chi_0$ mod. $\mathfrak{f}$ ist

$$\Phi(t,t';\lambda^k\chi_0) = \frac{1}{\log\eta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n(\lambda^k\chi_0).$$

$$B_n(\lambda^k\chi_0) = \frac{e(\mathfrak{f})}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\Gamma(s+inc)\,\Gamma(s-inc)}{t^{s+inc}\,t'^{s-inc}}\,\zeta(s;\ \lambda^{n+k}\chi_0)\,ds$$

$$= \frac{W(\lambda^{n+k}\chi_0)\,e(\mathfrak{f})}{2i}\times$$

$$\times\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{A(\mathfrak{f})^{1-2s}\,2^{2s-2}\,\Gamma(s;n,k)\ \zeta(1-s;\ \overline{\lambda^{n+k}\chi_0})\,ds}{t^{s+inc}\,t'^{s-inc}\sin\pi\left(\frac{s+1-a_1}{2}+\frac{i(n+k)c}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{s+1-a_2}{2}-\frac{i(n+k)c}{2}\right)},$$

wo

$$\Gamma(s;n,k) = \frac{\Gamma(s+inc)\,\Gamma(s-inc)}{\Gamma(s+i(n+k)c)\,\Gamma(s-i(n+k)c)}.$$

Durch Verschiebung des Integrationsweges bis etwa zur Graden $\Re(s) = -\frac{1}{2}$ erhalten wir folgende asymptotische Entwickelung:

a) $\lambda^k \chi_0$ ist der Hauptcharakter, also $\mathfrak{f} = 1$, $k = 0$, $\chi_0 \equiv 1$

$$\Phi(t, t'; 1) = \frac{4h}{\sqrt{d}} \frac{1}{tt'} + O(1). \quad (h \text{ die Klassenzahl}) \tag{20}$$

b) $k = 0$, $a_1 = a_2 = 1$

$$\Phi(t, t'; \chi_0) = -\frac{A(\mathfrak{f})}{\pi} \frac{e(\mathfrak{f})}{\log \eta} W(\chi_0)\, \zeta(1; \overline{\chi_0}) \log tt' + O(1). \tag{21}$$

c) $k = 0$, a_1, a_2 nicht beide $= 1$, $\chi_0 \not\equiv 1$

$$\Phi(t, t'; \chi_0) = O(1). \tag{22}$$

d) $k \neq 0$, $\chi_0 \equiv 1$, also $\mathfrak{f} = 1$

$$\Phi(t, t'; \lambda^k) = \frac{4\pi i k c}{\sin \pi i k c} \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{t^{1-ikc} t'^{1+ikc}} \tag{23}$$

$$+ \frac{A e(1) i k c}{2 \log \eta} W(\lambda^k) \operatorname{tg} \frac{\pi i k c}{2} \zeta(1; \lambda^{-k}) \log tt' + O(1).$$

e) $k \neq 0$, $\chi_0 \not\equiv 1$

$$\Phi(t, t'; \lambda^k \chi_0) = \tag{24}$$

$$\frac{A(\mathfrak{f})\, e(\mathfrak{f})\, i k c \cdot \sin \pi i k c\; W(\lambda^k \chi_0)}{4 \log \eta\, (\mathfrak{f}) \sin \pi \frac{1 - a_1 - ikc}{2} \sin \pi \frac{1 - a_2 - ikc}{2}} \zeta(1; \overline{\lambda^k \chi_0}) \log tt' + O(1).$$

Hieraus gewinnen wir auch die Kenntnis des Verhaltens von Φ, wenn χ_0 ein uneigentlicher Charakter ist. Dann erzeugt nämlich χ_0 einen ganz bestimmten eigentlichen Charakter χ_0' nach einem Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$. Mit Hilfe der Möbiusschen Funktion $M(\mathfrak{a})$ für die Ideale $\mathfrak{a}$ im Körper k finden wir dann leicht:

$$\Phi(t, t'; \chi_0) = \sum_{\mu}{}' e^{-t|\mu| - t'|\mu'|}\; \chi_0'(\mu) \sum_{\substack{(\delta)|\mathfrak{f} \\ (\delta)|\mu}} M(\delta);$$

in der inneren Summe hat δ die verschiedenen gemeinsamen Idealteiler von $\mathfrak{f}$ und μ zu durchlaufen. Also wird weiter

$$\Phi(t, t'; \chi_0) = \sum_{(\delta)|\mathfrak{f}} M(\delta)\, \chi_0'(\delta)\, \Phi(|\delta| t, |\delta'| t'; \chi_0').$$

Ist insbesondere χ_0, also auch χ_0', der Hauptcharakter, so folgt

$$(25)\qquad \begin{aligned} \Phi(t, t';\, \chi_0) &= \frac{4\,h}{t\,t'\sqrt{d}} \sum_{(\delta)\mid \mathfrak{f}} \frac{M(\delta)}{|N(\delta)|} + O(1), \\ &= \frac{4\,h\,\varphi(\mathfrak{f})}{t\,t'\sqrt{d}\,N(\mathfrak{f})} + O\,(1), \end{aligned}$$

$h\,\varphi(\mathfrak{f})$ ist dabei die Anzahl der Klassen idealer Zahlen mod. $\mathfrak{f}$, die zu $\mathfrak{f}$ prim sind. Ist aber χ_0, also auch χ_0' nicht der Hauptcharakter, so folgt

$$(26)\qquad \Phi(t, t';\, \chi_0) = c(\chi_0) \log t\,t' + O(1),$$

wo

$$c(\chi_0) = -\frac{A(\mathfrak{f}_1)\,e(\mathfrak{f}_1)}{\pi \log \eta(\mathfrak{f}_1)}\, W(\chi_0')\,\zeta\,(1;\, \chi_0') \sum_{(\delta)\mid \mathfrak{f}} M(\delta)\,\chi_0'(\delta),$$

wenn $a_1 = a_2 = 1$; dagegen

$$c(\chi_0) = 0, \text{ wenn } a_1,\ a_2 \text{ nicht beide } 1.$$

Hieraus entnehmen wir endlich das Verhalten von

$$G(t, t') = \sum_{\mu \gg 0} e^{-t\mu - t'\mu'}$$

in den Randpunkten $2\pi i \varrho$, $2\pi i \varrho'$. Sei ϱ eine Körperzahl, die als Quotient ganzer idealer Zahlen in der Form

$$\varrho = \frac{\alpha}{\beta\sqrt{d}},\ (\alpha, \beta) = 1,\ (\beta) \neq 1$$

dargestellt sei. Wir finden

$$G(t + 2\pi i \varrho, t' + 2\pi i \varrho') = \sum_{\varkappa \bmod. \beta} e^{2\pi i\, S(\rho\varkappa)} \sum_{\substack{\mu \gg 0 \\ \mu \equiv \varkappa (\bmod. \beta)}} e^{-t\mu - t'\mu'}.$$

Hier durchläuft $\varkappa$ ein volles System mod. β inkongruenter Körperzahlen. Sei nun

$$(\varkappa, \beta) = \delta,\ \ \varkappa = \delta\,\varkappa_1,\ \ \beta = \delta\,\beta_1,$$

σ eine ganze ideale Zahl, so daß

$$(\sigma, \beta_1) = 1,\ \frac{\sigma}{\delta} \gg 0,\ \sigma\varkappa_1 \equiv 1\,(\bmod.\ \beta_1),$$

so wird

$$\sum_{\substack{\mu \gg 0 \\ \mu \equiv \varkappa \,(\mathrm{mod.}\, \beta)}} e^{-t\mu - t'\mu'} = \sum_{\substack{\sigma\nu \gg 0 \\ \sigma\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, \beta_1)}} e^{-t|\delta|\,|\nu| - t'|\delta'|\,|\nu'|}.$$

$$= \frac{1}{4h\,\varphi(\beta_1)} \sum_{\chi_0} \chi_0(\sigma) \sum_{\mu}{}' \chi_0(\mu)\, e^{-t|\delta|\,|\mu| - t'|\delta'|\,|\mu'|}$$

$$= \frac{1}{4h\,\varphi(\beta_1)} \sum_{\chi_0} \chi_0(\sigma)\, \Phi(|\delta|\, t, |\delta|\, t'; \chi_0),$$

und zwar durchläuft χ_0 sämtliche Charaktere mod. β_1. Nach (25), (26) ist also

$$\sum_{\substack{\mu \gg 0 \\ \mu \equiv \varkappa \,(\mathrm{mod.}\, \beta)}} e^{-t\mu - t'\mu'} = \frac{1}{tt'\sqrt{d}\, N(\beta)} + g(\varkappa) \log tt' + O(1), \tag{27}$$

worin $g(\varkappa)$ nur von der Restklasse $\varkappa$ abhängt. Da das erste Glied aber von $\varkappa$ unabhängig ist, kommt durch Summation über $\varkappa$ wegen

$$\sum_{\varkappa \,\mathrm{mod.}\, \beta} e^{2\pi i S(\rho\varkappa)} = 0, \text{ falls } (\beta) \neq 1,$$

$$G(t + 2\pi i \varrho,\ t' + 2\pi i \varrho') = \sum_{\varkappa \,\mathrm{mod.}\, \beta} g(\varkappa)\, e^{2\pi i S(\rho\varkappa)} \log tt' + O(1). \tag{28}$$

§ 7. Die logarithmischen Reihen im Körper k.

Endlich wollen wir noch kurz die Reihen

$$L(t, t') = \sum_{\mu \gg 0} \frac{e^{-t\mu - t'\mu'}}{N(\mu)}$$

in der Nähe der singulären Mannigfaltigkeit behandeln. Ich gebe nur die Hauptpunkte der Rechnung an. In der obigen Bezeichnung werde gesetzt für einen Charakter χ_0 mod. $\mathfrak{f}$

$$\Psi(t, t'; \chi_0) = \sum_{\mu}{}' \frac{\chi_0(\mu)}{|N(\mu)|} e^{-t|\mu| - t'|\mu'|}.$$

Es wird

$$\Psi(t, t'; \chi_0) = \frac{1}{\log \eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\chi_0),$$

$$C_n(\chi_0) = \frac{e(\mathfrak{f})}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\Gamma(s + inc)\, \Gamma(s - inc)}{((s-1) + n^2c^2)\, t^{s-1+inc}\, t'^{s-1-inc}} \zeta(s, \lambda^n \chi_0)\, ds,$$

$$\Psi(t, t'; \chi_0) = -\frac{e(\mathfrak{f})}{\log \eta(\mathfrak{f})} \zeta(1, \chi_0) \log tt' + O(1), \tag{29}$$

wenn χ_0 ein eigentlicher oder uneigentlicher Charakter, nur nicht der Hauptcharakter ist.

Wir entwickeln ferner, wenn χ der Hauptcharakter mod. $\mathfrak{f}$ ist, die Funktion $\zeta(s, \chi)$ in der Umgebung des Poles $s = 1$ nach Potenzen von $s - 1$:

$$\zeta(s, \chi) = \frac{R(\mathfrak{f})}{s-1} + P(\mathfrak{f}) + Q(\mathfrak{f})(s-1) + \ldots .$$

Hierin ist übrigens bekanntlich

$$R(\mathfrak{f}) = R \cdot \frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N(\mathfrak{f})}.$$

Dann ergibt sich für den Hauptcharakter

$$\Psi(t, t'; \chi) = \sum_{(\mu, \mathfrak{f})=1} \frac{e^{-t|\mu| - t'|\mu'|}}{|N(\mu)|}$$

$$(30) \qquad = \frac{R(\mathfrak{f})\, e(\mathfrak{f})}{2 \log \eta(\mathfrak{f})} \log^2 t t' - \frac{(2 R(\mathfrak{f})\, \Gamma'(1) + P(\mathfrak{f}))\, e(\mathfrak{f})}{\log \eta(\mathfrak{f})} \log t t' + O(1).$$

Und aus (29) und (30) folgt dann wie in § 6

$$L(t, t') = \frac{R\, e(1)}{2 \log \eta(1)} \log^2 t t' - \frac{(2 R \Gamma'(1) + P(1))\, e(1)}{\log \eta(1)} \log t t' + O(1)$$

und bei Annäherung an einen Randpunkt $2 \pi i \varrho$, wo $\varrho \sqrt{d}$ eine nicht ganze Körperzahl

$$L(t + 2 \pi i \varrho,\ t' + 2 \pi i \varrho') = l(\varrho) \log t t' + O(1)$$

mit einem von t, t' unabhängigen $l(\varrho)$.

Das Bemerkenswerte an den asymptotischen Formeln aus § 6 und 7 ist, daß hier die *Werte von Zetafunktionen im Punkte* $s = 1$ als Grenzwerte unendlicher Reihen dargestellt sind, in *deren Summationsbedingungen die Einheiten nicht vorkommen.*

Hamburg, Dezember 1921.