# Ueber die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Aus einem Schreiben an H. Weber in Strassburg

von

L. Baur in Darmstadt.

---

1. Hängt die Veränderliche $y$ mit der unabhängigen Variablen $x$ durch eine — reducibele oder irreducibele — algebraische Gleichung zusammen, die in Bezug auf $y$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade ist, so gilt der Satz:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $n$ conjugirten Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jener Gleichung für $x = a$ genau $\varrho$ von einander verschiedene Werthe annehmen, ist die, dass für $x = a$ alle aus dem System*

$$(s_{h+i}) \qquad (h, i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

*gebildeten Minoren $(\varrho + 1)^{ten}$ Grades verschwinden, die $\varrho^{ten}$ Grades aber nicht mehr alle;*

oder kürzer:

*Die Anzahl der an der Stelle $(x = a)$ von einander verschiedenen Wurzeln der genannten Gleichung $n^{ten}$ Grades ist gleich dem für $x = a$ betrachteten Range des Systems $(s_{h+i})$.*

Dass, falls für $x = a$ *höchstens* $\varrho$ der conjugirten Werthe von $y$ von einander verschieden sind, die vorhin genannte Bedingung nothwendig erfüllt sein muss, ist fast selbstverständlich. Bedeutet nämlich $M_\tau$ irgend eine Minore $\tau^{\text{ten}}$ Grades des Systems $(s_{h+i})$, so kann $M_\tau$ dargestellt werden als das Resultat der Composition zweier rechteckigen Systeme aus $n$ Colonnen und $\tau$ Zeilen bezw. aus $n$ Zeilen und $\tau$ Colonnen, deren Elemente sämmtlich solche Potenzen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ sind, die innerhalb jeder Zeile bezw. innerhalb jeder Colonne stets denselben Exponenten haben. Sobald also $\tau > \varrho$ ist, muss in Folge der Voraussetzung jede Minore $\tau^{\text{ten}}$ Grades dieser beiden rechteckigen Systeme mindestens 2 gleiche Reihen enthalten, mithin verschwinden, also nach dem Multiplicationssatz für Matrizen auch $M_\tau$.

Dass aber umgekehrt, wenn für $x = a$ alle Minoren $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $(s_{h+i})$ verschwinden, unter den $n$ conjugirten Werthen von $y$ für $x = a$ zunächst *höchstens* $\varrho$ von einander verschiedene Werthe $y', y'', \ldots y^{(\varrho)}$ sich finden können, ist eine Behauptung, deren Richtigkeit für $\varrho = n - 1$ bekannt ist, und deren allgemeine Gültigkeit auf dem Wege der Induction bewiesen werden kann. Ist dieselbe nämlich richtig für irgend einen Werth von $\varrho$, so mögen für $x = a$ etwa $\lambda_\alpha$ Wurzeln den Werth $y^{(\alpha)}$ haben, wobei die Möglichkeit noch vorliegt, dass auch unter den $y^{(\alpha)}$ sich noch gleiche Werthe befinden. Dann geht für $x = a$ die Potenzsumme $s_i$ über in $\Sigma \lambda_\alpha y^{(\alpha)^i}$ und demgemäss die Determinante

$$D_\varrho(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varrho-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\varrho-1} & s_\varrho & \cdots & s_{2\varrho-2} \end{vmatrix}$$

in

$$D\,(a) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho \prod_{\alpha > \beta} (y^{(\alpha)} - y^{(\beta)})^2 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Verschwinden nun auch alle aus $(s_{h+i})$ gebildeten Minoren $\varrho^{\text{ten}}$ Grades für $x = a$, so muss sicher auch $D_\varrho(a) = 0$, mithin mindestens noch ein $y^{(\alpha)}$ gleich einem $y^{(\beta)}$ sein, woraus das Gesagte und damit auch die Richtigkeit des aufgestellten Satzes folgt.

Da bei der Beweisführung ausser dem Verschwinden sämmtlicher Minoren $(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades nur noch das Verschwinden der einen Minore $\varrho^{\text{ten}}$ Grades $D_\varrho(x)$ an der Stelle $x = a$ benutzt wurde, so kann das Resultat auch noch so ausgesprochen werden:

> *Die $n$ conjugirten Wurzeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ nehmen an der Stelle $x = a$ immer dann und nur dann genau $\varrho$ von einander verschiedene Werthe an, wenn an dieser Stelle die Determinanten $D_{\varrho+1}, D_{\varrho+2}, \ldots D_n$ sämmtlich verschwinden, $D_\varrho$ aber nicht.*

Beiläufig folgt hieraus noch:

> *Verschwinden an irgend einer Stelle die Determinanten $D_\varrho, D_{\varrho+1}, \ldots D_n$ gleichzeitig, so verschwinden an dieser Stelle alle Minoren $\varrho^{\text{ten}}$ Grades des Systems $(s_{h+i})$,*

eine Bemerkung, die von Wichtigkeit sein kann dei der Entscheidung der Frage, ob an der betrachteten Stelle die Determinante $D_\varrho$ regulär sich verhält oder nicht.

Das Resultat liesse sich noch etwas einfacher aussprechen, wenn man die betrachtete Gleichung als irreducibel voraussetzen würde. Ich habe es vorgezogen, keinerlei Beschränkungen einzuführen, und so unter anderem auch den Fall mit zu umfassen, dass die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die sämmtlichen conjugirten Werthe mehrerer durchaus von einander unabhängigen algebraischen Functionen von $x$ sind.

Sind insbesondere die Gleichungscoefficienten *ganze* rationale Functionen von $x$, der von $y^n$ gleich 1, sind also $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lauter ganze algebraische Functionen von $x$, so sind die Potenzsummen $s_{h+i}$ lauter ganze rationale Functionen von $x$. Dann aber kann, indem man die von Kronecker im 107. Bande des Journals für Mathematik für ganzzahlige Systeme gegebenen Vorschriften auf den jetzt vorliegenden Fall ausdehnt, das System $(s_{h+i})$ durch die elementaren Transformationen in ein Diagonalsystem

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & e_2 & 0 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots e_n \end{pmatrix}$$

verwandelt werden. Dieses System ist dem ursprünglichen Systeme $(s_{h+i})$ äquivalent, besitzt also mit ihm die gleichen Elementartheiler und diese sind, da seiner Entstehungsweise nach $e_{k+1} \equiv 0 \pmod{e_k}$, die Elemente $e_1, e_2, \ldots e_n$ selbst. In Verbindung mit dem zuerst ausgesprochenen Satze führt diese Bemerkung zu dem Corollar:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass unter den $n$ conjugirten ganzen algebraischen Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von $x$ an der Stelle $x = a$ genau $\varrho$ verschiedene Werthe sich finden, ist die, dass der $(\varrho+1)^{te}$ Elementartheiler des Systems $(s_{h+i})$ mod. $(x-a)$ verschwindet, der $\varrho^{te}$ aber nicht; oder auch,* was dasselbe ist, *dass in dem obigen Diagonalsysteme die $\varrho$ ersten Elemente den Factor $(x-a)$ nicht enthalten, während die übrigen durch $(x-a)$ theilbar sind.*

So ist z. B. für

$$y^4 - 2x^3y^3 + 2x^4y - x^2 = 0$$

$$(s_{h+i}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2(x^5-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2(x^5-1) \end{pmatrix}$$

und es gehört daher zu $x = 0$ nur 1 Werth von $y$ und zu $x = \sqrt[5]{1}$ stets 2 verschiedene Werthe von $y$. —

Es ist ohne weiteres klar, dass die angestellten Betrachtungen sinngemäss auch dann bestehen bleiben, wenn die Gleichungscoefficienten irgend welchem Rationalitätsbereiche angehören, dessen Elemente die Veränderliche $x$ gar nicht enthalten. Wir haben dann einfach den Satz:

*Die Anzahl der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung $n^{ten}$ Grades mit constanten Coefficienten ist gleich dem Rang des Systems $(s_{h+i})$; sie ist auch gleich der Zahl $\varrho$, die so beschaffen ist, dass $D_\varrho$ von 0 verschieden ist, während die Determinanten $D_{\varrho+1}, D_{\varrho+2}, \ldots, D_n$ sämmtlich verschwinden.*

*In dem besonderen Falle*, wo die Gleichungscoefficienten lauter ganze rationale Zahlen und der der höchsten Potenz von $y$ gleich 1 ist, wo also die conjugirten Grössen $y_1, y_2, \ldots y_n$ lauter ganze algebraische und die $s_{h+i}$ lauter ganze rationale Zahlen sind, *besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung*, dafür, dass unter ihnen genau $\varrho$ verschiedene Werthe sich finden, *darin dass der $(\varrho+1)^{te}$ Elementartheiler des Systems $(s_{h+i})$ verschwindet, der $\varrho^{te}$ aber nicht;* oder darin, dass in dem diesem Systeme äquivalenten Diagonalsysteme die $\varrho$ ersten Elemente von 0 verschieden sind, während die übrigen verschwinden.

2. Ich will für das folgende jetzt zunächst voraussetzen, dass die Gleichungscoefficienten irgend welche Constanten sind. Hat man dann auf die eben angegebene Weise gefunden, dass die vorgelegte Gleichung genau $\varrho$ von einander verschiedene Wurzeln besitzt, so mögen, wie vorhin, $\lambda_\alpha$ Wurzeln gleich $y^{(\alpha)}$ sein, wo wiederum

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varrho = n$$

ist, die Grössen $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$ jetzt aber alle von einander verschieden sind. Bildet man dann die für $y = y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$ verschwindende Determinante

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ y' & y'' & \cdots & y^{(\varrho)} & y \\ y'^2 & y''^2 & \cdots & y^{(\varrho)2} & y^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ y'^\varrho & y''^\varrho & \cdots & y^{(\varrho)\varrho} & y^\varrho \end{vmatrix}$$

und componirt dieselbe mit der Determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 y' & \cdots & \lambda_1 y'^{\varrho-1} & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_2 y'' & \cdots & \lambda_2 y''^{\varrho-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \lambda_\varrho & \lambda_\varrho y^{(\varrho)} & \cdots & \lambda_\varrho y^{(\varrho)\varrho-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so erhält man unter Berücksichtigung der Thatsache, dass jetzt

$$s_i = \Sigma \lambda_\alpha y^{(\alpha)^i}$$

ist, die Function

$$(3)\qquad B_\varrho(y) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varrho-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\varrho & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_\varrho & s_{\varrho+1} & \cdots & s_{2\varrho-2} & y^\varrho \end{vmatrix},$$

d. i. eine ganze Function $\varrho^{\text{ten}}$ Grades von $y$, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Potenzsummen, mithin ebensolche Functionen der Gleichungscoefficienten sind. Die Nullstellen dieser Function sind $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$; der Coefficient von $y^\varrho$ ist gleich $D_\varrho$, man hat also die Identität:

$$B_\varrho(y) = D_\varrho(y-y')(y-y'')\ldots(y-y^{(\varrho)})$$

und da $D_\varrho$ in unserem Falle sicher nicht verschwindet, so ergiebt sich der Satz:

*Die $\varrho$ von einander verschiedenen Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades mit constanten Coefficienten werden geliefert durch die Gleichung*

$$B_\varrho(y) = 0.$$

*Sind die Gleichungscoefficienten nicht constant*, sondern rationale Functionen der Veränderlichen $x$ und nimmt $y$ an der Stelle $x = a$ genau $\varrho$ von einander verschiedene Werthe $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$ an, *so bleiben die vorstehenden Betrachtungen wörtlich bestehen, wenn man nur für die Grössen $s_0, s_1, \ldots, s_{2\varrho-2}$ ihre für $x = a$ berechneten Werthe setzt.*

Noch sei bemerkt, dass die Functionen $B_\varrho$ und $D_\varrho$ leicht in solche umgewandelt werden können, die die Gleichungscoefficienten explicit enthalten. Ich gedenke hierauf im Zusammenhang mit einigen anderen naturgemäss hier sich darbietenden Fragen demnächst zurückzukommen. Als Beispiel sei hier nur noch kurz der Fall $n = 4$ gestreift, wo also $y$ der Gleichung

$$a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = 0$$

mit constanten Coefficienten genügt. Es lässt sich dann vermittelst der Newton'schen Formeln $D_4$, welches mit der Gleichungsdiscriminante identisch ist, leicht in die Form setzen:

$$-a_0^6 \cdot D_4 = \begin{vmatrix} 4a_0 & 1a_1 & 2a_0a_2 & 3a_0a_3 \\ 3a_1 & 2a_2 & 3a_0a_3 + 1a_1a_2 & 4a_0a_4 + 2a_1a_3 \\ 2a_2 & 3a_3 & 4a_0a_4 + 2a_1a_3 & 3a_1a_4 + 1a_2a_3 \\ 1a_3 & 4a_4 & 3a_1a_4 & 2a_2a_4 \end{vmatrix},$$

und es sind dann die Determinanten $+a_0D_1$, $-a_0^2D_2$, $+a_0^4D_3$ nichts anderes als die drei Hauptunterdeterminanten*) von $-a_0^6 . D_4$,

*) Die $\lambda^{\text{te}}$ Hauptunterdeterminante von $-a_0^6 . D_4$ besteht aus den $\lambda$ ersten Zeilen und $\lambda$ ersten Colonnen des Schemas auf der rechten Seite.

während man die Functionen $B_1$, $B_2$, $B_3$ bezügl. aus $D_2$, $D_3$, $D_4$ dadurch erhält, dass man die Elemente der letzten Colonne der Reihe nach durch die Functionen $Y_0$, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ ersetzt. Dabei bedeutet $Y_\lambda$ die bekannte, durch die Gleichung

$$Y_\lambda = a_0 y^\lambda + a_1 y^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda$$

definirte Function.

Ist nun z. B.

$$D_3 = D_4 = 0; \quad D_2 \neq 0$$

so besitzt die vorliegende Gleichung zwei verschiedene Wurzeln, geliefert durch die Gleichung

$$B_2(y) = 0^{*)}.$$

*) Bereits bekannt, wenn auch ganz anderen Betrachtungen entstammend, ist, wie ich nachträglich sehe, der folgende Satz:

*Die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe* $D_1, D_2, \ldots D_n$.

(Vgl. Jacobi in Borchardt's gesammelten Werken S. 471).

Nimmt man diesen Satz, angewendet auf die ursprüngliche oder auch auf die Gleichung $B_\varrho(y) = 0$, zu meinen Entwicklungen hinzu, so entsteht ein wohlabgerundetes Ganze. — Jacobi berührt allerdings nicht die (bei meinen Sätzen nicht in Betracht kommende) Möglichkeit des Verschwindens zweier auf einander folgender Hauptdeterminanten $D$, aber auch dieser Fall lässt sich leicht vermittelst der bekannten Sätze über die Transformation quadratischer Formen erledigen.