

Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen.

Von

F. KLEIN in Leipzig.

Vor nun anderthalb Jahren richtete ich im Anschluss an meine Vorlesungen die Uebungen meines Seminars auf die Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere der elliptischen Modulfunctionen, um so eine Reihe von Problemen, die mir von meiner früheren Beschäftigung mit der genannten Theorie her geläufig waren, zur Bearbeitung und gleichförmigen Erledigung zu bringen. Von den Untersuchungen, welche aus diesem Anlasse entstanden sind, haben einige wenige in den Mathematischen Annalen Aufnahme gefunden (vergl. Morera: *Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen* (Bd. 25) und zwei Aufsätze von Pick in Bd. 25 und 26: *Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen*); die anderen sind in den Schriften der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften erschienen oder werden binnen kurzem als Dissertationen veröffentlicht werden. Es ist Gefahr vorhanden, dass diese letzteren Arbeiten der Beachtung des mathematischen Publicums mehr oder minder entgehen, und es schien mir also zweckmässig, an gegenwärtiger Stelle ein zusammenhängendes Referat über dieselben zu erstatten. —

Ich will dabei den Gesamtstoff von vorneherein auf zwei Abschnitte vertheilen. — Einmal nämlich handelte es sich um die weitere Durchführung jenes Programms einer reinen Theorie der elliptischen Modulfunctionen, welches sich aus meinen Untersuchungen in den Bänden 14 und 15 dieser Annalen entwickelt hat, andererseits aber um die Aufgabe, die betreffenden Ueberlegungen mit der eigentlichen Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere mit den Fundamentalformeln, wie sie Weierstrass in seinen Vorlesungen zu geben pflegt, in Verbindung zu bringen.

In ersterer Hinsicht muss ich voranstellen, dass in der Note „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen“, welche ich im December

1879 der Münchener Akademie vorlegte*) und auf die ich mich wiederholt zu beziehen habe, nur ein *Theil* des in Rede stehenden Programms niedergelegt ist. Ich beschränke mich dort durchaus auf Modulfunctionen im engeren Sinne, d. h. auf Functionen des Periodenverhältnisses ω , während die weitergehende Untersuchung durchaus verlangt, Modulformen, d. h. homogene Functionen der Perioden ω_1, ω_2 in Betracht zu ziehen. Man kann sich das Verhältniss etwa in der Weise vorstellen, dass die Riemann'schen Methoden, welche ich damals voranstellte, (die Construction und Discussion der Fundamentalpolygone etc.) die zuerst erforderliche Vorarbeit leisten, während die feinere Ausbildung der Betrachtungen und die Durchführung auch in complicirten Fällen der formentheoretischen Behandlung vorbehalten bleiben muss, — beide beherrschend aber die gruppentheoretische Auffassung (die Stufeneintheilung etc.) das oberste Eintheilungsprincip abgiebt. Ich möchte mit Rücksicht hierauf insbesondere auf die Hurwitz'sche Abhandlung im 18. Bande der Mathematischen Annalen verweisen (*Grundzüge einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc.*). Man beachte namentlich, wie dort (in § 9 des ersten Theiles) der Uebergang von der Modulfunction der ersten Stufe, die ich J nenne, zu den Modulformen derselben Stufe, d. h. zu g_2 und g_3 , gefunden wird, indem $\frac{dJ}{d\omega}$ als Durchgangspunkt dient.

Die ersten Arbeiten, über welche ich nunmehr zu berichten habe, machen übrigens von dem Begriffe der Modulform nur beiläufigen Gebrauch und basiren dementsprechend in der Hauptsache auf der Discussion algebraischer Functionen im Riemann'schen Sinne.

Ich referire zunächst über die Untersuchungen von Hrn. Fricke**). Bekanntlich ergiebt die Betrachtung der Kreisbogendreiecke der ω -Ebene und der aus ihnen gebildeten Fundamentalpolygone, dass für $n=3, 4, 5$ sich sämmtliche Modulfunctionen der zugehörigen Stufe rational je durch einen Hauptmodul darstellen lassen, welcher, wenn man J als gegeben ansieht, beziehungsweise mit einer der durch die regulären Körper definirten Irrationalitäten, nämlich der Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Irrationalität, coincidirt. Denselben Ansatz habe ich dann in meinen früheren Arbeiten auch noch für die Fälle $n=7$ und $n=11$ in Anwendung gebracht, wobei sich aber eine steigende Complication einstellte, so dass die Leistungsfähigkeit der Methode auf kleine Stufenzahlen beschränkt erscheint. Um so wünschenswerther musste es sein, die kleinen Werthe von n nun auch sämmtlich in dem

*) Dieselbe ist in Bd. 17 dieser Annalen wieder abgedruckt.

**) Siehe meine noch öfter zu nennende Notiz in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 2. März 1885: „*Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen*“.

angedeuteten Sinne discutirt zu sehen. Dies ist, was Herr Fricke für $n = 6, 8, 16$ und neuerdings auch bei $n = 10$ ausgeführt hat.*) Es handelt sich dabei selbstverständlicherweise in jedem Falle um Definition solcher einfachster algebraischer Functionen der Invariante J , durch welche sich alle anderen Functionen derselben Stufe rational darstellen lassen. Herr Fricke hat dabei seine Aufgabe so gefasst, dass er es unternahm, alle Moduln der genannten Stufen, welche in der ausgedehnten hierher gehörigen Litteratur als wesentlich vorkommen, explicit auf die Fundamentalgrössen zurückzuführen. So finden sich hier in die modernen Anschauungen eingeordnet insbesondere jene Relationen über dritte und fünfte Theilwerthe der Thetafunctionen, welche man im Anschlusse an den Gaussischen Nachlass neuerdings vielfach behandelt hat.

Ich wende mich ferner zu den Untersuchungen der Herren Friedrich und Fiedler**). Dieselben beziehen sich auf die Theorie der *Modulargleichungen* in dem allgemeinen Sinne, wie ich dieselbe in meiner soeben genannten Münchener Note skizzirt habe, und knüpfen an eine dort gegebene Bemerkung an, vermöge deren bei zweckmässiger Wahl der zu Grunde zu legenden Moduln Ueberlegungen *invariantentheoretischer Natur* bei Aufstellung der Modulargleichungen am Platze sind. Herr Friedrich hat in diesem Sinne die Modulargleichungen der regulären Körper behandelt. Es seien λ, a, o, η die Benennungen für Doppelverhältniss, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Irrationalität; mit λ', a', o', η' bezeichnen wir die transformirten Werthe. Die linke Seite der Modulargleichung muss dann eine solche ganze rationale Function von λ und λ' , etc., sein, dass sie bei gewissen linearen Substitutionen, denen λ und λ' simultan zu unterwerfen sind, bis auf einen Factor ungeändert bleibt. Hieraus nun leitet man durch rein algebraische Ueberlegungen ab, dass die linke Seite der Modulargleichung eine ganze Function einiger charakteristischer Verbindungen von λ, λ' etc. sein wird, wodurch die wirkliche Berechnung der Modulargleichungen auch bei höheren Transformationsgraden auf die Auswerthung relativ weniger Zahlencoefficienten zurückgeführt ist. Herr Friedrich giebt — unter Beschränkung auf solche Transformationsgrade, welche beziehungsweise zu 2, 3, 4, 5 relativ prim sind — für λ, a, o, η die Durchführung dieser Theorie und als Beleg jeweils eine Zahl ausgerechneter Beispiele. Dabei liegt ein interessanter Vergleichspunkt in dem Umstande, dass die Modulargleichungen für λ, λ' in den Fällen $n = 3$ und $n = 5$ schon in Jacobi's Fundamenten auftreten, wo sie

*) Die betreffenden Resultate sollen im Zusammenhange in der demnächst erscheinenden Dissertation d. Verf. veröffentlicht werden.

**) Vergl. wieder die schon genannte Note in den Berichten d. k. sächs. Ges. d. W. oder auch die bezüglichen, demnächst erscheinenden Dissertationen.

„non sine calculo prolixo“ abgeleitet werden (wie Jacobi dies selbst ausdrückt), während jetzt die empirische Berechnung je eines Zahlencoefficienten genügt. — Ganz ähnliche Bemerkungen sind hinsichtlich der Arbeit des Herrn Fiedler am Platze. Es handelt sich bei Herrn Fiedler nicht um Modulargleichungen im engeren Sinne, sondern um *Modularcorrespondenzen* und zwar insbesondere um diejenigen, welche zwischen $x = \sqrt[n]{\lambda}$, $y = \sqrt[n]{1 - \lambda}$ einerseits und den transformirten Werthen dieser Grössen, die x' , y' heissen mögen, bestehen. In meiner wiederholt genannten Münchener Note hatte ich die Frage offen gelassen, wie man eine solche Correspondenz in jedem Falle algebraisch vollständig darzustellen habe, so dass hier in der Theorie eine wesentliche Lücke blieb, welche erst durch die neueren Untersuchungen von Herrn Hurwitz ausgefüllt worden ist*). An letztere Untersuchungen anknüpfend leitet Herr Fiedler den Satz ab, dass im Falle des von ihm betrachteten Modulsystems zur Darstellung der Modularcorrespondenz ausser den selbstverständlichen Relationen $x^s + y^s = 1$, $x'^s + y'^s = 1$ immer eine Gleichung genügt, sobald der Transformationsgrad n (den Herr Fiedler der Einfachheit halber durchweg als ungerad voraussetzt) entweder selbst von der Gestalt $8\kappa + 7$ ist oder einen in ungerader Potenz vorkommenden Primfactor von der Gestalt $8\kappa + 7$ hat. Er entwickelt ferner, dass man diese eine Gleichung immer so auswählen kann, dass sie bei gewissen ternären linearen Substitutionen, denen einerseits x , y , andererseits (und zwar gleichzeitig) x' , y' zu unterwerfen sind, ungeändert erhalten bleibt, und zeigt endlich, dass in Folge der genannten Eigenschaft die linke Seite der Gleichung als ganze Function bestimmter, aus x , y , x' , y' zusammengesetzter Ausdrücke sich aufbauen lässt. Die einfachste hierher gehörige Gleichung ist die bekannte, welche Gützlaff für den 7^{ten} Transformationsgrad gab:

$$xy + x'y' = 1;$$

Herr Fiedler steigt mit den von ihm durchgerechneten Beispielen bis zu den Transformationsgraden 55, 71, 79 auf, ohne dabei übermässig lange numerische Rechnungen zu gebrauchen.

Dem Gegensatze entsprechend, der soeben zwischen Modulfunctionen und Modulformen gefunden wurde, treten an Seite der Modulargleichungen die *Multiplicatorgleichungen*. Unter einem *Multiplicator* verstehe ich überhaupt einen Quotienten, dessen Zähler der transformirte Werth einer Modulform ist, während der Nenner durch den anfänglichen Werth der Modulform gegeben wird. Der Multiplicator ist also zunächst *Modulfunction* und dementsprechend stellen sich die Coefficienten der *Multiplicatorgleichung* zuvörderst ebenfalls als Modul-

*) Siehe insbesondere dessen Mittheilung in den Göttinger Nachrichten von 1883: „Zur Theorie der Modulargleichungen“.

functionen dar. Wenn wir dann aber hinterher mit einer geeigneten Potenz der im Nenner des Multipliers stehenden Modulform heraufmultiplizieren, so verwandelt sich die Multiplorgleichung in eine solche, welche den transformirten Werth einer Modulform von den gegebenen Werthen irgendwelcher anderer Modulformen abhängig macht. Eben hierin nun erblicke ich die innere Bedeutung der Multiplorgleichungen.

Dem Gesagten zufolge giebt es so viele Multiplorgleichungen, als es Modulformen giebt, für die eine Transformationstheorie existirt. Die Jacobi'schen Multiplorgleichungen, sowie die anderen, die ich Multiplorgleichungen erster Stufe nenne*), sind nur die ersten einfachen Beispiele.

Herr Biedermann**) hat nun insbesondere diejenigen Multiplorgleichungen untersucht, welche durch Betrachtung der *Theilwerthe der Weierstrass'schen σ -Function* erwachsen. Ich verstehe unter letzteren, wenn s eine beliebig gegebene Zahl bezeichnet, die folgenden Grössen:

$$\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{-\frac{-(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2)(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)}{2s^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{s}, \omega_1, \omega_2\right),$$

wo dann, unter n den Transformationsgrad, unter a, b, c, d vier ganze Zahlen von der Determinante $ad - bc = n$ verstanden, als Wurzeln der Multiplorgleichung die folgenden Quotienten genommen werden müssen:

$$x_{\lambda\mu} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)}.$$

Indem Herr Biedermann die Zahl s insbesondere gleich 2, 3, 4 setzt und dann, der Einfachheit halber, den Transformationsgrad n zu 2, bez. zu 3, relativ prim nimmt, bestimmt er mit Hülfe der zugehörigen in der ω -Ebene gelegenen Fundamentalpolygone die Form der entstehenden Multiplorgleichungen und ist dadurch in der Lage, für niedere Transformationsgrade die Schlussformeln fast ohne Rechnung hinzuschreiben. Die Bedeutung dieser Untersuchungen soll wieder nicht nur in der Erledigung eines einzelnen Falles beruhen, sondern in dem methodischen Fortschritte, der mit ihnen für alle ähnlichen Probleme, insbesondere auch für die Theorie der Jacobi'schen Multiplorgleichungen, gegeben erscheint. —

Indem ich mich nunmehr zum zweiten Theile meines Referates

*) Vergl. die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Bd. 18 dieser Annalen, sowie die einschlägigen Arbeiten von Kiepert, insbesondere die hier unmittelbar vorausgehende zusammenfassende Darstellung des Letzteren.

**) Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 4. Mai 1885. (Der Inhalt dieser Note soll wieder in einer Dissertation besonders ausgeführt werden):

wende, gedenke ich zunächst der Untersuchungen des Herrn Nimsch. Die Perioden $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung lassen sich bekanntlich, wie Herr Bruns zuerst hervorhob*), aus den Invarianten g_2, g_3 durch hypergeometrische Reihen berechnen. Inzwischen fehlte es bislang an einer zusammenhängenden Darstellung der Theorie unter Heranziehung derjenigen Anschauungen, welche Riemann der Theorie der hypergeometrischen Functionen zu Grunde gelegt hat**). Eben hier hat Herr Nimsch eingesetzt und den Gegenstand so weit gefördert, dass seine Untersuchungen, die demnächst (als Dissertation) publicirt werden sollen, mit einer Tabelle numerischer Werthe abschliessen.

Ich erwähne ferner die Untersuchungen von Herrn Molien***). Die achte Einheitswurzel, welche in der Theorie der unendlich vielen Formen der Function Θ auftritt, kann bekanntlich vom Weierstrass'schen Standpunkte aus auf die Aenderungen zurückgeführt werden, welche die achte Wurzel aus der Discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ bei linearer Transformation der Perioden erfährt. Statt $\sqrt[8]{\Delta}$ wird man dann lieber gleich $\sqrt[24]{\Delta}$ in Betracht ziehen, welches in gewissem Sinne die eigentliche fundamentale Grösse ist, die freilich ihrerseits (wie Jacobi gelegentlich in den Fundamenten bemerkt) durch Heranziehen einer Transformation dritter Ordnung auf die Θ -Function und also wieder auf $\sqrt[8]{\Delta}$ zurückgeführt werden kann. Herr Molien hat nun den Factor, um welchen sich $\sqrt[24]{\Delta}$ bei linearer Transformation der Perioden ändert, in der Weise bestimmt, dass er von der Euler'schen Reihenentwicklung für $\Pi(1 - q^{2r})$ ausging und auf diese das Cauchy'sche Verfahren der Reihenvergleichung anwandte†). Die Gestalt, welche Herr Molien den Schlussformeln giebt, entspricht genau derjenigen, welche Stephen Smith bei der Transformation der Θ -Functionen zur Geltung bringt††) und die in mancher Hinsicht der von Hermite ge-

*) Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung (Dorpater Festschrift 1875); vergl. auch meine Darstellung in Bd. 14 dieser Annalen, p. 124–126 daselbst.

**) Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe darstellbaren Functionen. Es ist übrigens bemerkenswerth, dass Riemann in dieser Abhandlung (cf. pag. 72 der Werke) unter den rationalen Transformationen, welche unter Umständen eine gegebene P -Function in eine neue P -Function überführen, bereits folgende anbietet: $y = \frac{4}{27} \frac{(1-x+x^2)^3}{x^2(1-x)^2}$, die genau dem Uebergange vom Doppelverhältnisse $\lambda = x$ zur absoluten Invariante $J = y$ entspricht, so dass man annehmen darf, Riemann habe die Abhängigkeit der ω_1, ω_2 von J ihrem Wesen nach sehr wohl gekannt.

***) Berichte d. k. sächs. Ges. d. W. vom 12. Januar 1885.

†) Cauchy im Bulletin de la Société Philomatique von 1817.

††) Reports of the British Association for the Advancement of Science, Bd. 35 (1865): Report VI on the Theory of Numbers (cf. insbesondere p. 329).

wählten Form vorzuziehen sein dürfte. Ich will übrigens nicht unerwähnt lassen, dass eben die Aenderungen von $\sqrt[24]{\Delta}$ in neuerer Zeit auch von anderer Seite untersucht worden sind, so von Hrn. Weber im 6^{ten} Bande der *Acta Mathematica* auf arithmetischem Wege und von Herrn Kiepert in dem hier vorausgehenden Aufsätze vermöge der Hermite'schen Methode.*)

Herr Engel hat eine andere Specialfrage zur Beantwortung gebracht**). Abel bemerkt in seinem *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, dass zwischen den n^{ten} Theilwerthen der von ihm betrachteten elliptischen Functionen lineare Identitäten bestehen, deren Coefficienten n^{te} Einheitswurzeln sind, eine Behauptung, welche dann später von den Herren Sylow und Kronecker ausführlich begründet und weiter verfolgt worden ist***). Man wird fragen, was aus diesen Relationen wird, wenn man durchweg die Weierstrass'schen Functionen $p(u)$, $p'(u)$ einführt. Man könnte hier Complicationen erwarten; indess sind die Formeln, welche Herr Engel findet, ebenso einfach wie die früheren, auf die älteren Functionen bezüglichen. Schreiben wir der Kürze halber $p_{\lambda\mu}$, $p'_{\lambda\mu}$ für $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ und ε für $e^{\frac{2i\pi}{n}}$, so lauten die von Herrn Engel gefundenen Relationen für $\lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$:

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}}{p'_{\lambda\mu}} = 0, \quad \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu} \cdot p_{\lambda\mu}}{p'_{\lambda\mu}} = 0. —$$

Ich habe nunmehr über meine eigene Abhandlung Bericht zu erstatten, die unter dem Titel: *Ueber die elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung und zugehörige Moduln der n^{ten} Stufe* im 14^{ten} Bande der Abhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften erschienen ist (Mai 1885) und die insofern hierher zu rechnen ist, als dieselbe

*) Vom Standpunkte einer reinen Theorie der elliptischen Functionen aus liegt die Schwierigkeit (oder das Charakteristische) der in Rede stehenden Untersuchungen darin, dass $\sqrt[24]{\Delta}$ und $\sqrt[8]{\Delta}$ keine *eindeutigen* Functionen von ω_1 , ω_2 sind, sondern nur *unverzweigte* Functionen der Grössen, welche erst durch eine willkürliche Festsetzung (durch Ziehen eines Querschnittes im Gebiete der ω_1 , ω_2) zu eindeutigen Functionen gemacht werden können. Bei $\sqrt[12]{\Delta}$ ist es noch anders und es kann also die elegante Behandlung, welche Herr Hurwitz in seiner öfter genannten Abhandlung (Bd. 18 der *Annalen*, siehe insbesondere p. 564–566 daselbst) der $\sqrt[12]{\Delta}$ zu Theil werden lässt, nicht ohne Weiteres auf die anderen Wurzeln übertragen werden.

**) Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 31. Juli 1884.

***) Sylow in den Verhandlungen der Akademie von Christiania, 1864 und 1871, Kronecker in den Berliner Monatsberichten, 1875 und 1876.

aus Seminarvorträgen entstand, die ich im Winter 1884—85 gehalten habe*). Es handelt sich in derselben um eine Wiederaufnahme derjenigen Ideen, die ich in einer der Münchener Akademie vorgelegten Note vom Juli 1880 skizzirt habe**) und die Herr Bianchi sodann für $n=3$ und $n=5$ eingehend verfolgt hat***). Die elliptische Normalcurve n^{ter} Ordnung d. h. die Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlecht 1 des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen, ist dabei nur das Gegenbild für das planmässige Operiren mit solchen n -gliedrigen σ -Producten, deren Residuensumme derselben Constanten gleich ist (so dass der Quotient irgend zweier Producte doppeltperiodisch ist). Indem ich die Curve auf verschiedene Coordinatensysteme beziehe, werden charakteristische Gleichungen derselben und in den Coefficienten dieser Gleichungen ausgezeichnete Modulfunctionen gewonnen. Der Uebergang von einem Coordinatensysteme zum anderen lässt sodann einfache Beziehungen zwischen den eingeführten Modulsystemen erkennen. Es kann hier nicht die Absicht sein, über die Einzelheiten der betreffenden Untersuchungen, welche im Princip die ganze Transformationstheorie der elliptischen Functionen umfassen, Bericht zu erstatten. Ich bemerke also nur, erstlich, dass ich mich auf ungerade n beschränke, sodann, dass die Modulformen n^{ter} Stufe (n ungerade) z_a, A_a , deren Eigenart ich bereits in einer vorläufigen Note in Band 17 dieser Annalen zur Sprache brachte†) und deren Interesse darin ruht, dass sie sich für $n=3, 5, 7, 11$ an jene einfachsten Grössen anschliessen, deren Existenz die functionentheoretische Methode ergeben hatte, nunmehr in gleichförmiger und sozusagen nothwendiger Weise gewonnen werden, wobei sich zugleich die Mittel darbieten, um andere Grössen der Theilungs- und Transformationstheorie (z. B. die Theilwerthe $p_{\lambda\mu}, p'_{\lambda\mu}$) mit ihnen in Verbindung zu setzen. Hier benutze ich denn auch jene Theilwerthe der σ -Function, deren Definition soeben gegeben wurde, und die, für ungerade s , Modulformen von der Stufe s^2 sind.

Eine naheliegende Aufgabe, betreffs derer ich in Band 17 der Annalen bereits einige Andeutungen machte††), die ich aber in meiner

*) Siehe auch meine vorläufige Mittheilung in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 14. November 1884: *Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe.*

**) *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (wieder abgedruckt in Band 17 dieser Annalen).

***) *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung*, Band 17 der Math. Annalen.

†) *Ueber gewisse Theilwerthe der Θ -Function.*

††) Indem ich nämlich die „Curven“ der z_a, A_a in Betracht zog, ihre Ordnung bestimmte etc. Siehe meine vorgenannte Note: *Ueber gewisse Theilwerthe der σ -Function.*

Abhandlung nicht weiter in Betracht gezogen habe, ist die, den Zusammenhang der z_α , A_α mit der Invariante J , bez. g_2 , g_3 genauer zu studiren. Es geschieht dies vielleicht am zweckmässigsten derart, dass die Ansätze verallgemeinert werden, die ich in den Bänden 14, 15 dieser Annalen für $n = 5, 7, 11$ gegeben habe. Die Moduln z_α etc. erscheinen dann schliesslich als die Lösungen bestimmter *Formenprobleme**), deren Coefficienten sich aus g_2, g_3 aufbauen. Inzwischen dürfte eine Durchführung dieses Gedankens schwierig sein. Einfacher ist es jedenfalls, zunächst die Grösse A_0 von g_2, g_3 durch die Multiplicatorgleichung erster Stufe abhängig zu machen (wegen dieser Gleichung siehe oben), dann A_0 zu adjungiren und zuzusehen, wie sich unter dieser Voraussetzung die z_α , bez. die A_α berechnen, was der Theorie zufolge durch Wurzelzeichen gelingen muss. In zwei neuerdings erschienenen Noten hat Herr Morera den hiermit bezeichneten Gedanken wenigstens in allgemeinen Zügen durchgeführt**).

Ich kann dieses Referat nicht schliessen, ohne die Untersuchungen wenigstens genannt zu haben, welche Herr Hurwitz im Zusammenhange mit meinen eigenen Bestrebungen neuerdings ebenfalls in den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss. veröffentlicht hat***). Die Zwecke, welche Herr Hurwitz bei ihnen verfolgt, sind durch die Titel der Arbeiten hinreichend angedeutet. Ich möchte aber ausdrücklich auf die Methode aufmerksam machen, deren sich der Verf. zur Erreichung seiner Zielpunkte bedient, insofern dieselbe an sich hervorragendes Interesse beanspruchen dürfte. Dieselbe besteht darin, die *überall endlichen Integrale*, welche zur n^{ten} Stufe gehören, als Functionen von ω wirklich aufzustellen und eingehend zu discutiren. —

Zum Schlusse will ich noch einer anderen Arbeit gedenken, die, aus meinen Seminarübungen hervorgegangen, allerdings nicht direct die Theorie der elliptischen Modulfunctionen aber doch die eng verwandte Lehre von den Irrationalitäten der regulären Körper betrifft. In seiner Dissertation†) entwickelt Herr Fischer vielseitige Methoden, um das Elementardreieck des Ikosaeders auf die anderen von den

*) Wegen dieser Ausdrucksweise siehe meine *Vorlesungen über das Ikosaeder etc.* (Leipzig 1884), insbesondere p. 123—126 daselbst.

**) *Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen*, Berichte d. k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 1. Juni 1885; *Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari*, Rendiconti del Istituto Lombardo, ser. 2, vol. 18, fasc. 13 (1885).

***)) Berichte vom 15. Dec. 1884: *Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*, sowie Berichte vom 4. Mai 1885: *Ueber die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe*.

†) *Conforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittelst algebraischer Functionen* (Leipzig, 1885).

Symmetriebögen derselben Configuration umgrenzten sphärischen Dreiecke conform abzubilden, was jedesmal mit Hülfe algebraischer Functionen gelingen muss. Insbesondere ist es interessant, dass die algebraischen Functionen in gewissen Fällen rational werden, wo dann die Bestimmung der Coefficienten der rationalen Functionen in ähnlicher Weise durch Hilfsmittel der Invariantentheorie abgekürzt werden kann, wie dies in der Theorie der Modulargleichungen in den oben besprochenen Fällen gelang.

Leipzig, den 17. September 1885.
