Über bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Funktion.

Von **Niels Nielsen** in Kopenhagen.

§ 1. Das Analogon des zweiten Eulerschen Integrals.

Für die in der Theorie der Gammafunktion auftretende, in ν ganze transzendente Funktion

$$Q(x, 1-\nu) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^\nu}\, dt \tag{1}$$

habe ich neuerdings diese asymptotische Reihe [1])

$$e^x\, Q(x, 1-\nu) \backsim \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\, \Gamma(\nu+s)}{x^{\nu+s}}, \tag{2}$$

welche für jeden überaus großen Wert von $|x|$ anwendbar ist, entwickelt.

Als Spezialfälle der Funktion $Q(x, 1-\nu)$ wollen wir hier den Integrallogarithmus $\mathrm{li}\,(e^{-x})$ und die Krampsche Transzendente $K(x)$ hervorheben.

Setzt man nämlich

$$\mathrm{li}\,(e^{-x}) = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\, s}, \tag{3}$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet, während der Logarithmus rechter Hand so zu bestimmen ist, daß er für positive x reell wird, so ist bekanntlich

$$\mathrm{li}\,(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -Q(x, 0). \tag{4}$$

Die entsprechende, aus (2) für $\nu = 1$, erhaltene asymptotische Reihe zeigt, daß der Integrallogarithmus sich für überaus große

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 59, p. 92; 1904.
[2]) loc. cit. p. 100.

Werte des Argumentes x wie die Exponentialfunktion verhält. Die entsprechenden Analogien der trigonometrischen Funktionen werden von dem Integralcosinus $C_i(x)$ und dem Integralsinus $S_i(x)$ gebildet; diese beiden Funktionen werden am einfachsten durch die Identitäten

$$C_i(x) = \frac{\mathrm{li}(e^{ix}) + \mathrm{li}(e^{-ix})}{2} \tag{5}$$

$$S_i(x) = \frac{\mathrm{li}(e^{ix}) - \mathrm{li}(e^{-ix})}{2i} \tag{6}$$

definiert, wo, wie überall in den folgenden Formeln

$$\pm i = e^{\pm \frac{\pi i}{2}}$$

zu setzen ist.

Was die Krampsche Transzendente $K(x)$ betrifft, so kann dieselbe folgendermaßen definiert werden

$$K(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s!\,(2s+1)}, \tag{7}$$

und somit gibt die Substitution $t = \sqrt{z}$ diese andere Darstellung

$$K(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \cdot Q\left(x, \frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

Als die entsprechenden Analogien der trigonometrischen Funktionen haben wir hier die Fresnelschen Integrale $F_1(x)$ und $F_2(x)$, nämlich

$$F_1(x) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}} . K\left(x . e^{\frac{\pi i}{4}}\right) + e^{\frac{\pi i}{4}} . K\left(x . e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)}{2} \tag{9}$$

$$F_2(x) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}} . K\left(x . e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - e^{\frac{\pi i}{4}} . K\left(x . e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)}{2i}. \tag{10}$$

Um nun die so eingeführten Funktionen für bestimmte Integrale anwenden zu können, bemerken wir zuerst, daß (1) diese andere Formel

$$D_x\, Q(x, 1-\nu) = -\frac{e^{-x}}{x^\nu} \tag{11}$$

liefert und somit ergibt ein bekannter Satz [1]) den Grenzwert

$$\lim_{x=0} \left(x^{\nu-1+\sigma} . Q(x, 1-\nu)\right) = 0, \tag{12}$$

[1]) U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Größe, p. 105; Leipzig, Teubner 1892.

wo σ eine angebbare positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet.

Nach diesen Erörterungen betrachten wir nunmehr das folgende Analogon des zweiten Eulerschen Integrals

$$J(\nu, \rho) = \int_0^\infty Q(tx, 1-\nu) \, . \, t^{\rho-1} \, dt,$$

welches demnach einen Sinn hat, falls allgemein $\Re(x) > 0$, $\Re(\rho - \nu) > -1$ oder speziell $\Re(x) = 0$, $-1 < \Re(\rho - \nu) < +1$ angenommen werden.

Eine partielle Integration liefert aber nun ohne Mühe

$$J(\nu, \rho) = \left[\frac{t^\rho}{\rho} \cdot Q(tx, 1-\nu)\right]_0^\infty + \frac{x^{1-\nu}}{\rho} \cdot \int_0^\infty e^{-tx} \, t^{\rho-\nu} \, dt,$$

woraus unter Anwendung einer bekannten Integralformel [1]) das erwünschte Resultat:

$$\int_0^\infty Q(tx, 1-\nu) \, t^{\rho-1} \, dt = \frac{\Gamma(\rho - \nu + 1)}{\rho \, . \, x^\rho}, \tag{13}$$

welche Formel ja mit der soeben angewendeten aus der Theorie der Gammafunktion ganz ähnlich ist.

Aus (13) kann man eine andere interessante Formel herleiten, indem man nach ρ differentiert und dann $\rho = 1$ setzt; man findet dadurch

$$\int_0^\infty Q(tx, 1-\nu) \log t \, dt = \frac{\Gamma(2-\nu)}{x} (\Psi(2-\nu) - 1 - \log x), \tag{14}$$

wo gesetzt ist:

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right), \tag{15}$$

und C die Eulersche Konstante bedeutet.

Für die oben eingeführten Spezialfälle der Q-Funktion ergeben sich nun aus (13) ohne weiteres die entsprechenden Formeln:

$$\int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-tx}) \, . \, t^{\rho-1} dt = -\frac{\Gamma(\rho)}{\rho \, . \, x^\rho} \tag{16}$$

$$\int_0^\infty K(tx) \, t^{2\rho-1} \, dt = \frac{\Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right)}{4\rho \, . \, x^{2\rho}}, \tag{17}$$

von welchen die erste schon Schlömilch [2]) bekannt war.

---

[1]) Man vergleiche mein Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 151.

[2]) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, p. 74; Jena 1843.

Eine Anwendung der Identitäten (5) und (6) liefert dann wegen (16) die ähnlichen Formeln

$$\int_0^\infty C_i(tx)\,.\,t^{\varrho-1}\,dt = -\frac{\Gamma(\rho)\cos\frac{\pi\varrho}{2}}{\rho\,.\,x^\varrho} \tag{18}$$

$$\int_0^\infty S_i(tx)\,.\,t^{\varrho-1}\,dt = -\frac{\Gamma(\rho)\sin\frac{\pi\rho}{2}}{\rho\,.\,x^\varrho}, \tag{19}$$

welche also nur für positive x und für $0 < \Re(\rho) < 2$ anwendbar sind. Das Integral (18) verschwindet für $\rho = 1$. Die Analogie zwischen den Integralen (16), (18) und (19) und denjenigen, welche die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen enthalten, ist vollkommen.

In ähnlicher Weise findet man aus (17) wegen (9) und (10) die weiteren Formeln

$$\int_0^\infty F_1(tx)\,t^{2\varrho-1}\,dt = \frac{\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\cos(2\rho+1)\frac{\pi}{4}}{\rho\,.\,x^{2\varrho}} \tag{20}$$

$$\int_0^\infty F_2(tx)\,t^{2\varrho-1}\,dt = \frac{\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\sin(2\rho+1)\frac{\pi}{4}}{\rho\,.\,x^{2\varrho}}, \tag{21}$$

wo man also x als positiv und $-\frac{1}{2} < \Re(\rho) < \frac{3}{2}$ annehmen muß. Für $\rho = \frac{1}{2}$ verschwindet das Integral (20).

Wir erwähnen noch die folgenden aus (14) für $\nu = 1$ hergeleiteten Formeln

$$\int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-t})\,.\log t\,dt = \int_0^\infty S_i(t)\,.\log t\,dt = C + 1 \tag{22}$$

$$\int_0^\infty C_i(t)\,.\log t\,dt = \frac{\pi}{2}\,. \tag{23}$$

§ 2. Herleitung eines allgemeinen Integralsatzes.

Wir wollen nunmehr aus unseren Analogon des zweiten Eulerschen Integrals § 1, (13) den folgenden allgemeinen Satz herleiten:

Es sei

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{\Gamma(\rho - \nu + s + 1)} \cdot x^s \tag{1}$$

eine solche ganze transzendente Funktion in x, daß der Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

eine angebbare Größe ist, dann hat man allgemein

$$\int_0^\infty Q(ty, 1-\nu) F(tx) t^{\varrho - 1} dt = x^{-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{\rho + s} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho + s}, \tag{3}$$

und diese Formel bleibt richtig, falls gleichzeitig $\Re(y) > 0$, $|x| < r \,.\, |y|$ und $\Re(\rho - \nu) > -1$ angenommen werden.

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{Q(ty, 1-\nu) a_s t^{\varrho + s - 1}}{\Gamma(\rho - \nu + s + 1)} \tag{4}$$

im Intervall $0 \leqq t \leqq K$, wo K eine endliche aber beliebig große positive Zahl bedeutet, in t eine gliedweise integrable und, für $t > 0$, eine gleichmäßig konvergente ist, falls nur $\Re(\rho - \nu) > -1$ vorausgesetzt wird. Setzt man demnach in der durch gliedweise Integration aus (4) erhaltenen Reihe $K = \infty$, so kommt, wegen § 1, (13) eben die Reihe rechter Hand in (3). Da nun diese Reihe immer, außer für $\rho = -p$, wo p eine ganze nicht negative Zahl bedeutet, da konvergiert, wo dies mit der aus (2) erhaltenen Potenzreihe für $f\left(\frac{x}{y}\right)$ der Fall ist,[1] so gibt ein allgemeiner Satz[2] über die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe unmittelbar die Formel (3).

Als die erste unter den zahlreichen Anwendungen von (3), welche uns auf bekannte Funktionen führen, betrachten wir den einfachsten Fall, wo $a_s = 1$ angenommen wird. Die entsprechende Funktion $F(x)$ reduziert sich dann auf die zu $Q(x, \nu)$ komplementäre Funktion $P(x, \nu)$, nämlich

$$P(x, \nu) = \int_0^x e^{-t} t^{\nu - 1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu + s}}{s!\,(\nu + s)}, \tag{5}$$

so daß allgemein

$$P(x, \nu) + Q(x, \nu) = \Gamma(\nu)$$

sein muß.

---

[1] Man vergleiche mein Hanbbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 127.
[2] U. Dini, Grundlagen etc., p. 523.

Eine wiederholte partielle Integration ergibt indessen vermöge (5) für $F(x, \nu)$ diese andere Reihenentwicklung

$$(6) \qquad P(x, \nu) = \Gamma(\nu) \, . \, e^{-x} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+s+1)} \cdot$$

Für $\nu = 1$ findet man speziell aus (5) oder (6)

$$(7) \qquad P(x, 1) = 1 - e^{-x}.$$

Nach diesen Erörterungen findet man für $a_s = 1$ diesen Ausdruck für die entsprechende Funktion $F(x)$, nämlich

$$F(t\,x) = \frac{e^{tx}\,(t\,x)^{\nu\varrho}}{\Gamma(\rho-\nu)} \cdot P(t\,x, 1-\nu),$$

und somit ergibt sich wegen (3) diese Integralformel

$$(8) \quad \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu) \, . \, P(tx, \rho-\nu) \, . \, e^{tx} t^{\nu-1} \, dt = \frac{\Gamma(\rho-\nu)}{x^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\rho+s} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s},$$

wo also im allgemeinen $|x| < |y|$, $\Re(y-x) > 0$, $\Re(\rho-\nu) > -1$ oder speziell $|x| < |y|$, $\Re(y-x) = 0$, $-1 < \Re(\rho-\nu) < +1$ anzunehmen sind.

Setzt man demnach in (8) $\rho = 1$ und $1-\nu$ statt ν, so entfließt die elegantere Formel

$$9) \qquad \int_0^\infty Q(ty, \nu)\, P(tx, \nu)\, e^{tx}\, t^{-\nu}\, dt = -\frac{\Gamma(\nu)}{x^{1-\nu}} \cdot \log\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot$$

Als zweites Beispiel setzen wir in (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s\, \Gamma(\rho-\nu+s+1)}{s!},$$

und somit entfließt diese andere Formel

$$(10) \int_0^\infty e^{-tx}\, Q(ty, 1-\nu)\, t^{\varrho-1}\, dt = x^{-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\, \Gamma(\rho-\nu+s+1)}{s!\,(\rho+s)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho+s},$$

welche allgemein für $\Re(y+x) > 0$, $|x| < |y|$ und $\Re(\rho-\nu) > -1$ oder speziell, wenn $\Re(y+x) = 0$, $-1 < \Re(\rho-\nu) < +1$, anwendbar ist.

Unter den zahlreichen Formeln, welche aus (10) hergeleitet werden können, betrachten wir zuerst den Fall $x = y = 1$, $\rho = \nu$;

eine leichte Änderung der Bezeichnungen ergibt dann ohne weiteres die Formel

$$(11) \quad \int_0^\infty Q(t, 1-x)\, e^{-t} \,.\, t^{x-1}\, dt = \beta(x) = -D_x \log \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

Als zweites Beispiel setzen wir in (10) $x = -1$, $y = +1$, die Gaußsche Formel

$$(12) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

gibt dann mit Zuhilfenahme der Eulerschen Identität

$$(13) \qquad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

diese andere Integraldarstellung

$$(14) \qquad \int_0^\infty e^t\, Q(t, 1-\nu)\, t^{\varrho-1}\, dt = \frac{\pi\, \Gamma(\varrho)}{\Gamma(\nu) \sin \pi (\nu-\varrho)},$$

wo man also $1 > \Re(\varrho - \nu) > 0$ voraussetzen muß.

Um die in § 1 besprochenen Spezialfälle der Q-Funktion einzuführen, setzen wir zuerst in (10) $\varrho = \nu = 1$; dann kommt

$$(15) \qquad \int_0^\infty e^{-tx} \operatorname{li}(e^{-ty})\, dt = -\frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{x}{y}\right),$$

wo man also $\Re(y + x) \leqq 0$ und $x + y$ von Null verschieden annehmen muß; aus § 1, (5) und (6) folgert man dann ohne weiteres die beiden ähnlichen Formeln

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-tx}\, C_i(ty)\, dt = -\frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$(17) \qquad \int_0^\infty e^{-tx}\, S_i(ty)\, dt = -\frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

wo also $\Re(x \pm iy) \geqq 0$ und $x \pm iy$ von -1 verschieden angenommen werden muß; die Formel (15) war schon Schlömilch[1]) bekannt.

[1]) Beiträge, p. 74.

In ähnlicher Weise findet man aus (15) die beiden anderen Formelgruppen

$$(18) \qquad \int_0^\infty \cos(tx)\,\mathrm{li}(e^{-ty})\,dt = -\frac{1}{x}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$$

$$(19) \qquad \int_0^\infty \cos(tx)\, C_i(ty)\,dt = 0$$

$$(20) \qquad \int_0^\infty \cos(tx)\, S_i(ty)\,dt = \frac{1}{2x}\cdot \log\frac{y-x}{y+x},$$

von welchen (18) von Schlömilch [1]) gefunden worden ist und

$$(21) \qquad \int_0^\infty \sin(tx)\,\mathrm{li}(e^{-ty})\,dt = -\frac{1}{2x}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$$

$$(22) \qquad \int_0^\infty \sin(tx)\, C_i(ty)\,dt = -\frac{1}{x}\cdot \log\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$(23) \qquad \int_0^\infty \sin(tx)\, S_i(ty)\,dt = 0,$$

von welchen die erste ebenfalls Schlömilch [2]) angehört.

In (18) und (21) muß man $\Re(y \pm ix \geqq 0$ annehmen, während die vier übrigen Formeln nur für reelle und verschiedene Wertepaare von x und y einen Sinn haben.

Setzt man endlich in (10) $\rho = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, so folgt nach einer einfachen Änderung der Bezeichnungen diese andere von Schlömilch [3]) herrührende Formel

$$(24) \qquad \int_0^\infty e^{t^2x^2}\,\mathrm{li}(e^{-t^2})\,dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{x}\cdot \arcsin x,$$

welche für $x=0$, $y=1$ interessante numerische Resultate liefert.

§ 3. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Analogie der Funktionen $Q(x, \nu)$ und e^x auch auf bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen ausgedehnt werden kann, indem es möglich ist, eine Reihe solcher

[1]) [2]) [3]) Beiträge, p. 75.

Integrale, welche den altbekannten mit Zylinderfunktionen und der Exponentialfunktion [1]) analog sind, mittels bekannter Funktionen auszudrücken.

Erstens setzen wir in § 2, (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s}{s!},$$

dann kommt

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\,\Gamma(\rho - \nu + s + 1)} = x^{\frac{\nu-\varrho}{2}} \cdot J^{\varrho-\nu}(2\sqrt{x}),$$

und somit findet man

$$(1) \qquad \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\, J^{\varrho-\nu}(2\sqrt{tx})\, t^{\frac{\nu+\varrho}{2}-1}\, dt = x^{-\frac{\nu+\varrho}{2}} P\left(\frac{x}{y}, \rho\right);$$

wo $P(x, \nu)$ diejenige in § 2 eingeführte komplementäre Funktion bedeutet; in (1) muß man offenbar allgemein $\Re(y) > 0$, $\Re(\rho - \nu) > -1$ oder speziell wegen des asymptotischen Ausdruckes für $J^\nu(x)$, [2]) $\Re(y) = 0$, x positiv und $-1 < \Re(\rho - \nu) < 3$ annehmen.

Aus (1) findet man daher für $x = y = 1$ die elegantere Formel:

$$(2) \qquad \int_0^\infty Q(t, 1-\nu)\, J^{\varrho-\nu}(2\sqrt{t})\, t^{\frac{\nu+\varrho}{2}-1}\, dt = P(\rho),$$

während die Annahme $\rho = 1$, nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen, wegen § 2, (7), diese andere Integraldarstellung liefert:

$$(3) \qquad \int_0^\infty Q(ty, \nu)\, J^\nu(2\sqrt{tx})\, t^{-\frac{\nu}{2}}\, dt = x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{y}}\right),$$

woraus für $\nu = 0$ die spezielleren Formeln

$$(4) \qquad \int_0^\infty \mathrm{li}(e^{-t})\, J^0(2\sqrt{tx})\, dt = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$(5) \qquad \int_0^\infty C_i(t)\, J^0(2\sqrt{tx})\, dt = -\frac{2\sin\frac{2x}{2}}{x}$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty S_i(t)\, J^0(2\sqrt{tx})\, dt = -\frac{\sin x}{x};$$

in den beiden letzten Formeln darf x nur p o s i t i v sein.

---

[1]) Man vergleiche mein Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 184 ff.; Leipzig, Teubner, 1904.

[2]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 156 und 7.

Weiter gibt eine Anwendung der Formel [1])

$$J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x,$$

indem man in (3) $\nu = \frac{1}{2}$ einführt, diese andere Formelgruppe mit Krampschen und Fresnelschen Integralen:

$$(8) \qquad \int_0^\infty K(t) \sin(2tx)\, dt = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \cdot \left(1 - e^{-x^2}\right)$$

$$(9) \qquad \int_0^\infty F_1(t) \sin(2tx)\, dt = -\frac{2 \sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{\pi}}$$

$$(10) \qquad \int_0^\infty F_2(t) \sin(2tx)\, dt = -\frac{2 \cos\frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{\pi}};$$

in (9) und (10) darf x wieder nur als *reell* angesehen werden.

Als zweites Beispiel setzen wir in § 2, (3)

$$a_s = \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\rho - \nu + 1}{2} + s\right)}{s!};$$

die bekannte Reihenentwicklung [2])

$$(11) \qquad e^{-x} J^\nu(xi) = \frac{(2xi)^\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\nu + s + \frac{1}{2}\right)}{s!\, \Gamma(2\nu + s + 1)} \cdot (2x)^s$$

ergibt dann unmittelbar diese andere Integralformel

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu)\, J^{\frac{\varrho-\nu}{2}}\left(\frac{txi}{2}\right) e^{-\frac{tx}{2}}\, t^{\frac{\nu-\varrho}{2}}\, dt = \\ & = \frac{i^{\frac{\varrho-\nu}{2}}}{x^{\frac{\nu+\varrho}{2}}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\rho - \nu + 1}{2} + s\right)}{s!\, (\rho + s)} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\varrho + s}, \end{aligned} \right.$$

woraus für $\nu = \rho = \frac{1}{2}$ diese speziellere Formel

$$(13) \qquad \int_0^\infty K(t)\, e^{-\frac{t^2 x^2}{2}} J^0\left(\frac{t^2 x^2 i}{2}\right) dt = \frac{2}{x} \cdot \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right);$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 156 und 7.

[2]) Ebenda, p. 21, 87 und 227.

setzt man noch in (13) xi statt x, so erhält man eine Integraldarstellung für $\arcsin x$.

Weiter setzen wir in (12) $\rho = \nu + 1$, dann kommt wegen (7) die Formel § 2, (10) für $\rho = \nu$.

Als drittes Beispiel setzen wir in § 2, (3)

$$\nu = \frac{\rho+1}{2} \qquad a_s = \frac{(-1)^s \, \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+s\right)}{s! \, \Gamma(\rho+s)};$$

dann entfließt wegen (11) diese andere Formel

$$(14) \qquad \int_0^\infty Q\left(ty, \frac{1-\rho}{2}\right) J^{\varrho-1}(2\sqrt{tx}) \, t^{\frac{\varrho-1}{2}} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{i^{\frac{\varrho}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}} \cdot J^{\frac{\varrho}{2}}\left(\frac{xi}{2}\right),$$

woraus für $\rho = 1$ die Formel (4).

Wir haben noch in diesem Zusammenhang die Lommelsche Funktion [1])

$$(15) \; \Pi^{a,b}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(a-b) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{b+2s}}{\Gamma\left(\frac{b+a}{2}+s+1\right) \Gamma\left(\frac{b-a}{2}+s+1\right)},$$

anzuwenden. Zu dem Ende setzen wir in § 2, (3)

$$a_s = \frac{1}{\Gamma(\rho+s)};$$

dann kommt diese andere Darstellung der P-Funktion

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty Q(ty, 1-\nu) \, \Pi^{\nu-1, 2\varrho-\nu-1}(2i\sqrt{tx}) \, t^{\frac{\nu-1}{2}} \, dt = \\ & = \frac{i^{2\varrho-\nu-1} \cdot \cos\frac{\pi}{2}(\rho-\nu)}{\Gamma(\rho) \, x^{\frac{\nu-1}{2}}} \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot P\left(\frac{x}{y}, \rho\right), \end{aligned} \right.$$

woraus für $\rho = 1$ eine neue Herleitung der Formel (3); denn es ist offenbar

$$\Pi^{a,a}(x) = J^a(x), \;\; \Pi^{a,-a}(x) = \cos a\pi \, . \, J^{-a}(x).$$

Setzt man weiter in (16) $\rho = \nu$, so kommt nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen die andere Formel

$$(17) \int_0^\infty Q(ty, \nu) J^{-\nu}(2i\sqrt{tx}) \, t^{-\frac{\nu}{2}} \, dt = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1}}{\Gamma(1-\nu)} \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot P\left(\frac{x}{y}, 1-\nu\right);$$

[1]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 21, 87 und 227.

kombiniert man demnach diese Formel mit der aus (3) erhaltenen, indem man dort $-x = x \cdot e^{\pi i}$ statt x einführt, so gibt die Definition der Zylinderfunktion zweiter Art[1])

$$Y^{\nu}(x) = \cot \nu\pi \,.\, J^{\nu}(x) - \frac{1}{\sin \nu\pi} \cdot J^{-\nu}(x)$$

diese andere Formel

$$(18)\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\infty} Q(t,\nu)\, Y^{\nu}(2i\sqrt{tx})\, t^{-\frac{\nu}{2}}\, dt = \\ &= i^{-\nu} x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{x}\left[(1-e^{-x})\, e^{\nu\pi i} \cdot \cot\nu\pi - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\sin\nu\pi} \cdot P(x, 1-\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Für $\nu = 0$ wird der Ausdruck rechter Hand in (18) unbestimmt; die gewöhnliche Methode liefert, aber durch Anwendung der Identität[2])

$$Y^0\left(x \,.\, e^{\frac{\pi i}{2}}\right) = Y^0(x) + \pi i \cdot J^0(x)$$

und der Formel (4), diese neue Integraldarstellung

$$(19)\qquad \int_0^{\infty} \mathrm{li}(e^{-t})\, Y^0(2\sqrt{tx})\, dt = \frac{1}{\pi x} \cdot \left[C + \log x - e^{x}\,\mathrm{li}(e^{-x})\right],$$

und somit erlaubt die Differentialformel[3])

$$D_x^n\, Y^0(2\sqrt{tx}) = \left(-2\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^{n} \cdot Y^n(2\sqrt{tx})$$

dieses noch allgemeinere Integral

$$\int_0^{\infty} \mathrm{li}(e^{-t})\, Y^n(2\sqrt{tx})\, t^{\frac{n}{2}}\, dt$$

zu bestimmen; der so erhaltene Ausdruck wird indessen äußerst kompliziert.

Setzt man endlich in (17) $\nu = \frac{1}{2}$, so kommt diese mit (19) analoge Formel

$$(20)\qquad \int_0^{\infty} K(t) \cos(2itx)\, dt = \frac{2e^{x^2}}{\pi x} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - K(x)\right).$$

Kopenhagen, 2. Oktober 1905.

---

[1]) [2]) [3]) Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 11, 12 und 28.