SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

par M. **Émile Picard**, à Paris.

Adunanza del 9 aprile 1899.

Considérons sur une surface algébrique deux systèmes *irréductibles* et *complets* $|C_1|$ et $|C_2|$ définis respectivement comme intersection de la surface f avec les deux systèmes linéaires de surfaces

$$\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_r P_r = 0,$$

$$\beta_0 Q_0 + \dots + \beta_{r'} Q_{r'} = 0.$$

Le système

$$\sum \lambda_{j,k} P_j Q_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r;\ k = 1, 2, \dots, r') \tag{1}$$

définit un système *irréductible* qui contient totalement toutes les courbes composées $C_1 + C_2$, mais qui peut ne pas être complet. Envisageons alors le système complet $|C|$ défini par une courbe $C_1 + C_2$, ayant comme points-base les points-base de $|C_1|$ et de $|C_2|$, de telle sorte qu'un point-base d'ordre λ_1 pour $|C_1|$ et d'ordre λ_2 pour $|C_2|$ soit d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$ pour $|C|$. Ce système complet $|C|$ est, par définition, la *somme des deux systèmes donnés*. Il est complètement déterminé par une courbe C_1 et par une courbe C_2, et en plus par les points-bases des deux systèmes et la manière de se comporter en ces points qui a été spécifiée.

Il est immédiat que si n_1 et n_2 sont les *degrés* respectifs des systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$, et si i est le nombre des points variables de rencontre d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2, on aura pour le degré n de $|C|$

$$n = n_1 + n_2 + 2i.$$

Dans son beau mémoire (*Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche,* Société Italienne des Sciences, 1896), M. Enriques établit (page 30) une formule donnant le genre de la courbe générale de $|C|$, et qui est toute semblable à celle que l'on connaît dans le cas où la surface se réduit à un plan. En appelant π_1 et π_2 les genres respectifs d'une C_1 et d'une C_2, on a pour le genre π d'une courbe C

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

La démonstration de M. Enriques fait intervenir des considérations assez délicates sur la connexion. Je veux indiquer comment on peut vérifier la formule précédente par un calcul tout élémentaire.

Désignons par q_1 le degré d'une courbe C_1 (qui n'a aucun rapport avec le *degré* du système $|C_1|$), et par q_2 le degré d'une courbe C_2; soient en outre λ_1 et λ_2 les ordres respectifs d'un même point-base pour les deux systèmes.

Effectuons la perspective des deux courbes C_1 et C_2 et d'une courbe C sur un plan arbitraire et en prenant un point de vue arbitraire. On aura pour la perspective de la courbe C_1

$$\pi_1 = \frac{(q_1 - 1)(q_1 - 2)}{2} - h_1 - k_1 - \sum \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}{2},$$

h_1 étant la part provenant des points multiples de C_1 situés sur les lignes multiples de la surface f, et k_1 le nombre des points doubles apparents de C_1. On aura de même pour la courbe C_2

$$\pi_2 = \frac{(q_2 - 1)(q_2 - 2)}{2} - h_2 - k_2 - \sum \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}{2}.$$

La courbe C étant déterminée par une surface appartenant au système des surfaces adjointes dont l'une détermine la courbe composée $C_1 + C_2$, son degré sera égal à $q_1 + q_2$; elle aura comme points multiples provenant des lignes multiples un nombre de points équivalent (pour notre problème) à $h_1 + h_2$ points doubles, et ceux provenant des points-bases seront d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$. Quant aux points doubles apparents de C, leur nombre sera égal à

$$k_1 + k_2 + H,$$

en désignant par H le nombre des points doubles apparents provenant des droites qui rencontrent à la fois C_1 et C_2 et passent par le point de vue. On a évidemment

$$q_1 q_2 = H + i + \sum \lambda_1 \lambda_2$$

et, comme manifestement

$$\pi = \frac{(q_1 + q_2 - 1)(q_1 + q_2 - 2)}{2} - h_1 - h_2 - k_1 - k_2 - H$$
$$- \sum \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}{2},$$

on trouve de suite

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

comme nous voulions l'établir.

ÉMILE PICARD.