

10. Notiz, betreffend die Möglichkeit einer zugleich den elastisch-optischen wie den electromagnetischen Principien entsprechenden Dispersionsformel; von E. Ketteler.

Im letztem Hefte der Annalen¹⁾ ist es Hrn. von Helmholtz gelungen, die Gesetze der Farbenzerstreuung aus den Principien der electromagnetischen Lichttheorie abzuleiten. Im Folgenden soll die von ihm gewonnene Dispersionsformel mit denjenigen Gleichungen zusammengestellt werden, die ich selber früher auf elastisch-optischer Grundlage aufgestellt habe.

Zunächst findet man in diesen Annalen²⁾ und weiter in meiner Optik p. 93 die Bewegungsgleichungen der Aether- und Körpertheilchen in folgender Form ausgedrückt:

$$(8a) \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} - m' \frac{d^2 \xi}{dx^2} C = e \frac{d^2 \xi}{dx^2} + b m' \xi'$$

$$(9) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} C + \frac{d^2 \xi'}{dx^2} = -f \xi' - g \frac{d \xi'}{dt}$$

Darin beziehen sich m , e , ξ auf die Aethertheilchen, m' , ξ' auf die Molecüle, und sind

$$C, b (= Bf), f \left(= \frac{4\pi^2}{T_m^2} \right), \quad g \left(= G \frac{2\pi}{T_m} \right)$$

Constanten.

Die Integration derselben mittels der Ausdrücke:

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - n \frac{x}{\lambda} \right), \quad \xi' = A' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - n \frac{x}{\lambda} \right),$$

worin $n = v + \kappa \sqrt{-1}$ das complexe Brechungsverhältniss bedeutet, führt zur Bedingungsgleichung:

$$(11) \quad n^2 - 1 = \frac{m'}{m} \frac{B C \frac{T^2}{T_m^2} - C^2}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1} G \frac{T}{T_m}},$$

unter T die variable Schwingungsdauer verstanden.

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. **48**. p. 389. 1893.

2) v. Helmholtz, Wied. Ann. **21**. p. 199. 1884; Ketteler, Theoretische Optik. Braunschweig, 1885. Die Nummern der im Folgenden citirten Formeln sind die der Optik.

Weiterhin habe ich in meinem Buche p. 95 die Gleichung (8a) durch Hinzufügung eines neuen Dämpfungsgliedes zu verallgemeinern gesucht, sodass dann das System entsteht:

$$(12) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} - m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} C = e \frac{d^2 \xi}{dx^2} + b m' \xi' + c m' \frac{d \xi'}{dt} \\ \frac{d^2 \xi}{dt^2} C + \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = -f \xi' - g \frac{d \xi'}{dt}. \end{cases}$$

Setzt man darin $c = (2\pi / T_m) H'$, so erhält man die entsprechende Bedingungsgleichung:

$$(XII) \quad n^2 - 1 = \frac{m'}{m} \frac{B C \frac{T^2}{T_m^2} - \mathfrak{C}^2 - \sqrt{-1} H' C \frac{T}{T_m}}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1} G \frac{T}{T_m}}$$

Beide Ausdrücke (11) und (XII) geben für $\lambda = \infty$, bez. $\lambda = 0$ die identischen Extremwerthe:

$$(28) \quad n_\infty^2 - 1 = \frac{m'}{m} B C, \quad n_0^2 - 1 = \frac{m'}{m} C^2.$$

Führt man schliesslich (p. 101) statt H' eine neue Constante H ein, die mit ihr verknüpft ist, durch die Gleichung:

$$H' - B G = H,$$

so geht Ausdruck XII dadurch über in:

$$(XIIc) \quad n^2 - n_\infty^2 = \frac{m'}{m} \frac{(B - C) C - \sqrt{-1} C H \frac{T}{T_m}}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1} G \frac{T}{T_m}}.$$

Bezüglich der Bedeutung des Coefficienten H ist p. 101 bemerkt, dass die Annahme $H = 0$ in der eigentlichen Optik auf Grund der bisherigen Erfahrungen wohl durchweg genügen werde, dass indess das mit dem Coefficienten H behaftete Glied doch immerhin für die quantitative Spectralanalyse sowie besonders für die Lichtbewegung in Metallen und vielleicht auch für die von Kerr entdeckte Doppelbrechung electricisirter Flüssigkeiten zu einem merklichen Einfluss werde gelangen können.

In den ferneren Abhandlungen ist dann wesentlich aus practischen Gründen durchweg $H = 0$ gesetzt, sodass Ausdruck (XIIc) sich dadurch abkürzt auf:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{n_\infty^2 - n_0^2}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1} G \frac{T}{T_m}} \quad (H' = 0),$$

während der etwas weniger bequeme Ausdruck (11) der Annahme $H' = c = 0$ entspricht. Derselbe schreibt sich nunmehr:

$$n^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1) \frac{T^2}{T_m^2} - (n_0^2 - 1)}{\frac{T^2}{T_m^2} = 1 - \sqrt{-1} G \frac{T}{T_m}} \quad (H' = 0).$$

Wie ich übrigens vor kurzem¹⁾ nachgewiesen habe, lassen sich die Gleichungen (12) unter der Annahme $H = 0$ auch auf die Form bringen:

$$(a) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = e \frac{d^2 \xi}{dx^2} - B C m' \frac{d^2 \xi}{dt^2} - (B - C) m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} \\ \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = -\mathfrak{k}_\mu' \xi' - g_\mu' \frac{d \xi'}{dt} + \frac{C}{1 + C} \left(\frac{d^2 \xi'}{dt^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right). \end{cases} \quad (H = 0).$$

Dagegen erhält das System der Gleichungen (8a) und (9) durch die gleiche Transformirung noch ein zusätzliches Glied und geht so über in:

$$(b) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = e \frac{d^2 \xi}{dx^2} - B C m' \frac{d^2 \xi}{dt^2} - (B - C) m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} - B(1 + C) m' g_\mu' \frac{d \xi'}{dt} \\ \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = -\mathfrak{k}_\mu' \xi' - g_\mu' \frac{d \xi'}{dt} + \frac{C}{1 + C} \left(\frac{d^2 \xi'}{dt^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right). \end{cases} \quad (H' = 0).$$

Auf dem von mir eingehaltenen Standpunkte sind die Gleichungen (8a) und (9), bez. (12) die eigentlichen Grundgleichungen der Theorie, die als solche ausführlich begründet sind. Aus ihnen wie nicht minder aus den Gleichungen (a) und (b) ersieht man, dass es wesentlich die Constante C ist, welche die Wechselwirkung zwischen den Aether- und Molecularschwingungen vermittelt. Es würde daher auch ein Nullsetzen von C die ganze Theorie vernichten.

Andererseits ist nicht ausgeschlossen, vielleicht wegen der Kleinheit der Molecularamplituden sogar recht wahrscheinlich, dass C eine äusserst kleine Grösse ist, so klein vielleicht, dass es genügt, nur die erste Potenz derselben beizubehalten, dagegen schon die zweite zu vernachlässigen. Unter dieser Annahme wird zufolge Gleichungen (28) für $\lambda = 0$:

$$(c) \quad n_0^2 = 1,$$

und so schreibt sich dann der Ausdruck (11):

1) Ketteler, Wied. Ann. 46. p. 572. 1892.

$$(d) \quad n^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1) \frac{T_m^2}{T_m^2}}{\frac{T_m^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1} G \frac{T_m^2}{T_m^2}}$$

in denkbar bequemster Weise. Die von mir sogenannte dispergirende Kraft:

$$D = n_\infty^2 - n_0^2$$

würde folglich hiernach mit der brechenden Kraft $(n_\infty^2 - 1)$ identisch werden.

Vorstehende Formel spaltet sich schliesslich in die beiden reellen Theilausdrücke:

$$v^2 - x^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1) \left(1 - \frac{T_m^2}{T^2}\right)}{\left(1 - \frac{T_m^2}{T^2}\right)^2 + G^2 \frac{T_m^2}{T^2}}, \quad 2vx = \frac{(n_\infty^2 - 1) G \frac{T_m^2}{T^2}}{\left(1 - \frac{T_m^2}{T^2}\right)^2 + G^2 \frac{T_m^2}{T^2}}.$$

* * *

Wenden wir uns hiernach zu den aus der electromagnetischen Lichttheorie abgeleiteten Formeln des Herrn v. Helmholtz.

Die von demselben aufgestellte Gleichung (146) auf p. 396, welche lautet:

$$p = -\frac{q}{in} + \frac{1}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{1+h}{1-h}},$$

schreibt sich bei meiner Bezeichnung:

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{-1} q T + \frac{1}{v} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{1+h}{1-h}},$$

oder kürzer:

$$N^2 = (\sqrt{-1} x + v)^2 = \frac{1+h}{1-h}.$$

Entnehmen wir weiter den Werth von h der zweiten der Gleichungen (13c), so kommt:

$$N^2 = \frac{a^2 - m n^2 + k i n + 1}{a^2 - m n^2 + k i n - 1}.$$

Oder auch:

$$N^1 - 1 = \frac{2}{a^2 - m n^2 + k i n - 1}.$$

Darin sind a^2 , m , k Constanter und bedeutet n die Schwingungszahl. Man kann dafür dann weiter schreiben:

$$N^2 - 1 = \frac{\frac{2}{m} T^2}{\left(\frac{\alpha^2 - 1}{m}\right) T^2 - 1 + \sqrt{-1} \frac{k}{m} T}.$$

Führt man jetzt die Bezeichnungen ein:

$$\frac{2}{\alpha^2 - 1} = n_\infty^2 - 1, \quad \frac{m}{\alpha^2 - 1} = T_m^2, \quad \frac{2}{m} = \frac{n_\infty^2 - 1}{T_m^2}, \quad \frac{k}{m} = - \frac{G}{T_m}$$

so erhält man die Dispersionsformel:

$$N^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1) \frac{T^2}{T_m^2}}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1} G \frac{T^2}{T_m}},$$

die sonach völlig mit Gleichung (d) übereinstimmt.

Vorläufig ist der Abhandlung nicht explicite zu entnehmen, ob T_m und G , wie es die optische Erfahrung zu verlangen scheint, von der Dichtigkeit unabhängig ist, und ob $(n_\infty^2 - 1)$ den optischen Versuchen von Arago, Dulong und mir und den electrischen Versuchen von Boltzmann und Klemenčič entsprechend genau oder wenigstens genähert der Dichtigkeit proportional ist.

Würden diese Voraussetzungen zutreffen, so würde das für Gase von mir experimentell gefundene weitere Dispersionsgesetz, dass der Abstand zweier Spectrallinien eines Gas-spectrums der Dichtigkeit des Gases proportional ist, auch durch die electromagnetische Lichttheorie erwiesen sein.

Münster i./W., im April 1893.