

Es ist ersichtlich, dass aus Gleichung (VI) die untere, aus (V) aber die obere Grenze abgeleitet wird, denn meine Theorie setzt den Effect der Reibung zu gross an, also muss sich die gesuchte Entfernung zu klein ergeben; umgekehrt ist es mit jener in (V) verkörperten Rechnungsweise. Da ferner meine Formeln genauere Werthe liefern, so liegt die untere Grenze näher. Für meinen Apparat würde also für die Luft $H = 20$ mm, für Wasser aber $H = 11$ mm sein; darnach würde sich die Bewegung im Wasser ungefähr einhalbmahl so weit fortpflanzen wie in der Luft. Jene Entfernungen H sind aber jedenfalls bis zu einem gewissen Grade abhängig von den Constanten des Apparats.

**VII. Bestimmung der Reibung von Flüssigkeiten
nach der Methode von Maxwell;
von Theodor Siegfried Schmidt aus Breslau.**

(Hierzu Taf. V Fig. 4.)

§ 1. Der erste, welcher die Abnahme der Amplituden einer innerhalb einer Flüssigkeit schwingenden Scheibe dazu benutzte, den Reibungswiderstand der Flüssigkeit zu bestimmen, war Coulomb.¹⁾ Auf F. Neumann's Anregung nahm O. E. Meyer diese Untersuchungen auf und führte das Experiment theoretisch durch.²⁾ Er nahm die Tiefe der Flüssigkeit, in welcher die Scheibe ihre Schwingungen ausführte, so gross an, dass sie in der Rechnung gleich unendlich gesetzt werden durfte, und leitete unter dieser Voraussetzung Formeln ab, welche es gestatteten, den Reibungscoefficienten einer Flüssigkeit in absolutem Maasse zu berechnen. Nach den von ihm entwickelten Formeln ist eine grosse Anzahl von Experimenten über Flüssigkeiten und Gase ausgerechnet worden. Zur Bestimmung des Reibungscoefficienten der Gase hat J. Clerk Maxwell³⁾ das Experiment wesentlich

1) Coulomb, Mém. de l'Inst. nat. 3. an 9. p. 246.

2) O. E. Meyer, Crelle's Journ. 59. p. 229. 1861 u. 62. p. 201. 1863.

3) Maxwell, Phil. Trans. 156. p. 249. 1866.

abgeändert. Er liess ein System von drei Scheiben zwischen vier festen Scheiben schwingen und brachte die Entfernung der schwingenden und festen Scheiben, welche sehr klein angenommen wurde, in Rechnung. Unter gewissen Voraussetzungen gestaltete sich die Theorie dieses Experimentes sehr einfach und erwies sich in voller Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Dies bestimmte O. E. Meyer dazu, das Maxwell'sche Experiment auch auf Flüssigkeiten anwenden zu lassen. Die festen Scheiben würden bei diesen durch den Boden des Gefässes zu ersetzen sein, und es kam darauf an, eine bequeme Vorrichtung zu ersinnen, die Entfernung von Scheibe und Boden leicht und scharf zu messen. An einem noch ziemlich unvollkommenen Apparate arbeitete zuerst L. Grossmann.¹⁾ Er wies nach, dass es in der That möglich sei, auf diese Weise auch für Flüssigkeiten den Reibungscoefficienten zu ermitteln, und leitete Formeln ab, welche gestatten, eine obere Grenze für den Reibungscoefficienten anzugeben. Als er, durch Verhältnisse genöthigt, die Arbeit abbrach, wurde der Verfasser mit dieser Aufgabe betraut. In meiner Dissertation²⁾ führte ich zunächst die Theorie des Experimentes durch, und es gelang mir, mehrere einfache Formeln zur Berechnung des Reibungscoefficienten zu ermitteln. Auch fand ich das zunächst freilich nur theoretisch interessante Resultat, dass das logarithmische Decrement der schwingenden Scheibe für eine bestimmte Dicke der Flüssigkeitsschicht einen kleinsten Werth besitzt. Der Apparat war inzwischen nach den Erfahrungen L. Grossmann's und den Angaben O. E. Meyer's vervollkommen worden und gestattete, die Dicke der Flüssigkeitsschicht leicht zu messen.

Eine genaue Berechnung des Reibungscoefficienten aus den zahlreichen Beobachtungen, welche ich anstellte, scheiterte jedoch stets an der Schwierigkeit, die Temperatur der dünnen Flüssigkeitsschicht scharf zu messen, sodass es in

1) L. Grossmann, Siehe auch die vorige Abhandlung.

2) Th. S. Schmidt, Die vorliegende Abhandlung ist im wesentlichen ein Abdruck derselben.

der Folge unerlässlich sein wird, bei constanter Temperatur zu beobachten. Aber zur Bestimmung der Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur eignet sich diese Methode überhaupt nicht, hierzu gibt das Strömen der Flüssigkeit durch Capillarröhren ein viel sichereres Mittel. Ich möchte den Nutzen der Maxwell'schen Methode in etwas ganz anderem suchen.

Die Oberfläche der Flüssigkeiten nämlich ist in neuerer Zeit mehrfach der Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen geworden. Nach Plateau¹⁾ besitzt sie eine besondere Zähigkeit, nach Marangoni²⁾ eine gewisse Elasticität, nach Oberbeck³⁾ findet in ihrer Nähe eine rapide Zunahme des Coëfficienten der inneren Reibung statt. Die Methode nun, welche in den folgenden Seiten entwickelt werden wird, gestattet, denjenigen Theil des logarithmischen Decrementes zu berechnen, welcher allein von dem Einflusse der Oberfläche herrührt, und setzt uns also in ausgezeichnete Weise in den Stand, für verschiedene Flüssigkeiten die an der Oberfläche stattfindenden Verhältnisse zu studiren. In die Theorie selbst konnte freilich der Einfluss der Oberfläche nicht aufgenommen werden, schon aus dem Grunde nicht, weil die Abhängigkeit der Bewegung der Flüssigkeitsringe vom Radius nicht näher untersucht wurde.

Das Experiment war folgendes: Eine cylindrische Glas-scheibe vom Radius R mm und dem Trägheitsmomente M mg mm² ist an einem elastischen Drahte so aufgehängt, dass ihre Hauptträgheitsaxe mit der des Drahtes zusammenfällt. Ihre untere Fläche berührt gerade eine Flüssigkeit, welche sich in einem der Scheibe conaxialen cylindrischen Gefässe befindet und dasselbe bis zur Höhe von c_1 mm anfüllt. Es soll das Gesetz ermittelt werden, nach welchem die Bewegung der Scheibe und der Flüssigkeit vor sich geht, unter der Voraussetzung, dass die Flüssigkeit an der Scheibe und am Gefässboden haftet.

1) Plateau, Pogg. Ann. **141**. p. 44. 1870.

2) Marangoni, Nuov. Cim. (2) **5** u. **6**. p. 239. 1872; (3) **3**. p. 50, 97, 192. 1879.

3) Oberbeck, Wied. Ann. **11**. p. 634. 1880.

§ 2. Ich mache die Axe des Drahtes zur X -Axe und rechne x von der unteren Fläche der Scheibe an positiv nach unten. Ist die Flüssigkeitsschicht dünn, so wird die Annahme¹⁾, dass alle der Scheibenfläche und dem Gefäßboden parallelen Flüssigkeitsschichten sich wie compacte Scheiben bewegen, der Wahrheit sehr nahe kommen; bei der obersten und letzten Schicht findet dieses Verhältniss unter der Voraussetzung des Haftens ganz gewiss statt. Ist dann D die Dichtigkeit, η der Reibungscoefficient, so ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit ψ einer Schicht im Abstände x von der Scheibe die Differentialgleichung:

$$D \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

für welche unter Voraussetzung des Haftens die Bedingungen gelten, dass:

für $x = c_1$ $\psi = 0$ sei, und ebenso

„ $t = 0$ $\psi = 0$ sei; dass dagegen

„ $x = 0$ die Flüssigkeit die Geschwindigkeit der Scheibe habe. Ist τ das Torsionsmoment des Drahtes, M das Trägheitsmoment, R der Radius der Scheibe, so ergibt sich ohne principielle Schwierigkeit für die Bewegung der Scheibe die Differentialgleichung:

$$M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\tau \varphi + \frac{R^4 \pi}{2} \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0,$$

wenn φ die Ablenkung der Scheibe aus der Ruhelage bezeichnet; hierbei ist:

$$\psi_{x=0} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Uebrigens soll zur Zeit $t = 0$ $\varphi = \Psi_0$ sein.

Ich werde das Problem nach O. E. Meyer's Vorgange so lösen, dass ich zuerst die erste Differentialgleichung integriere und obige Gleichung zur Constantenbestimmung benutze. Indem ich mich in der Bezeichnung an diejenige von O. E. Meyer in der für derartige Untersuchungen grundlegenden Abhandlung²⁾ anschliesse, setze ich:

1) Diese Annahme macht auch Maxwell; sie scheint mir für Flüssigkeiten noch zulässiger zu sein als für Gase.

2) O. E. Meyer, Crelle's Journ. 59. p. 229. 1861.

$$x = y \sqrt{\frac{\eta}{D}}, \quad c_1 = c \sqrt{\frac{\eta}{D}}, \quad \frac{r}{M} = \alpha^4,$$

$$\frac{\pi R^4}{4M} \sqrt{\eta D} = \beta$$

und erhalte nun folgendes transformirte System von Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

und es soll für:

$$(2) \quad y = c \quad . \quad . \quad . \quad \psi = 0,$$

$$(3) \quad y = 0 \quad . \quad . \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\alpha^4 \varphi + 2\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0,$$

$$(4) \quad t = 0 \quad . \quad . \quad \psi(y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad \varphi = \Phi_0 \quad \text{sein.}$$

Die vollständige Lösung von (1) ist bekanntlich:

$$\psi = \sum e^{-m^2 t} (A \sin my + B \cos my),$$

wo m , A , B Constanten sind und die Summe Σ über alle particularen Integrale auszudehnen ist. Unter Berücksichtigung von (2), (3), (4) ergibt sich:

$$(5) \quad \psi = \sum e^{-m^2 t} B \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc},$$

wo für m die Bestimmungsgleichung gilt:

$$(6) \quad \text{ctg } mc = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3},$$

und für B :

$$B = \frac{\alpha^4 \Phi_0}{2\beta m^2 \left\{ \frac{1}{2\beta} \left(1 - \frac{c}{2} \right) + \frac{c}{2} + \frac{\alpha^4 c}{8\beta^2 m^6} + \frac{\alpha^4}{4\beta m^2} + \frac{cm^2}{8\beta^2} - \frac{\alpha^4}{2\beta m^4} \left(1 + \frac{c}{2} \right) \right\}}$$

Die Gleichung (6) ist für die Berechnung der Reibungsconstanten von der grössten Wichtigkeit; ich will zunächst die analoge Gleichung entwickeln, welche gilt, wenn die Flüssigkeit an der Scheibe und am Boden gleitet.

§ 3. Für die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens im Innern bleibt auch dann selbstverständlich die Gleichung bestehen:

$$D \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Ebenso bleibt die Bedingung erhalten, dass für $t=0$ $\varphi = \Phi_0$, $\psi = 0$ und $d\varphi/dt = 0$ sein soll.

Ist E die Constante der äusseren Reibung, so besteht für $x = c_1$ die Gleichung:

$$D \frac{\partial \psi}{\partial t} dx = -\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx - \psi E,$$

welche sofort die Bedingung liefert:

$$\eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{c_1} = -(\psi)_{c_1} E.$$

Ist ψ_1 die Geschwindigkeit der Scheibe, so ergibt sich für $x = 0$, also für ein Theichen der obersten Schicht die Bedingung:

$$(\psi - \psi_1) E = \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0.$$

Die Bedingungsgleichung der Scheibe lautet:

$$M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\tau \varphi + \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (\psi_1 - \psi) r^3 E,$$

aus welcher sich unter Berücksichtigung der vorigen Gleichung ergibt:

$$M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\tau \varphi + \frac{R^4 \pi}{2} \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0.$$

Führen wir dieselben Abkürzungen wie im vorigen Paragraphen ein, so erhalten wir, wenn wir abkürzend:

$$\frac{\sqrt{D\eta}}{E} = \xi$$

setzen, folgendes System von Gleichungen:

$$(7) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$(8) \quad \text{für } y = c \text{ soll } \xi \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\psi,$$

$$(9) \quad \text{für } y = 0 \text{ soll } \psi - \psi_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0$$

sein; $\psi_1 = (d\varphi/dt)$ soll aber der Gleichung genügen:

$$(10) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\alpha^4 \varphi + 2\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0.$$

Endlich soll für $t = 0$:

$$(11) \quad \varphi = \Phi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{sein.}$$

Zunächst ergibt sich wie oben als vollständige Lösung von (7):

$$\psi = \sum e^{-m^2 t} (A \sin my + B \cos my).$$

Da die Bedingung (4) für alle Zeiten gilt, so muss:

$$A = B \frac{m \zeta \sin mc - \cos mc}{m \zeta \cos mc + \sin mc} = -B F(m)$$

$$\text{sein, wo:} \quad F(m) = \frac{\operatorname{ctg} mc - m \zeta}{m \zeta \operatorname{ctg} mc + 1} \quad \text{ist.}$$

Hieraus folgt:

$$\psi = \sum B \frac{m \zeta \cos m(c-y) + \sin m(c-y)}{m \zeta \cos mc + \sin mc}.$$

Hieraus lässt sich ψ_0 , $(\partial\psi/\partial y)_0$ ermitteln, und sodann nach (9) $d\varphi/dt$, also auch $d^2\varphi/dt^2$ und φ bestimmen. Setzt man diese Grössen in (10) ein, so ergibt sich, dass diese Gleichung nur dann für alle Zeiten bestehen kann, wenn:

$$(12) \quad F(m) = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} (1 + m \zeta F(m)) \quad \text{ist.}$$

Ich will das allgemeine Problem nicht weiter verfolgen, da es mir vor allem nur auf die Ableitung der Gleichung (12) ankommt. Die letztere geht für $\zeta = 0$, also für $E = \infty$, d. h. wenn ein Haften stattfindet, in die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen über.

§ 4. Betrachte ich zunächst den Fall, dass die Scheibe ohne Reibung in dem Medium schwingt, so habe ich η , also auch $\beta = 0$ zu setzen. Dann erhält Gleichung (3) die Form:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\tau\varphi.$$

Diese Gleichung hat die grösste Aehnlichkeit mit der Pendelgleichung und zeigt, dass in diesem Falle periodische Schwingungen eintreten werden. Die Gleichung (6), welche die Gestalt:

$$m^4 + \alpha^4 = 0$$

annimmt, liefert in diesem Falle vier complex imaginäre Wurzeln m . Dass auch in dem Falle, wenn Reibung stattfindet, vier complexe Wurzeln auftreten können, hat O. E.

Meyer im 63. Bde. des Crelle'schen Journ. von einer Gleichung bewiesen, welche mit Gl. (6) durchaus übereinstimmt. Für den Fall einer sehr kleinen Entfernung c_1 scheint jedoch der Beweis, dass die vier complexen Wurzeln in der That auftreten, noch besonders geführt werden zu müssen. Hierzu construiren ich in bekannter Weise die Curven, welche entstehen, wenn ich zu den Grössen m als Abscissen die Werthe der beiden Seiten der Gleichung:

$$(6) \quad \operatorname{ctg} mc = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3}$$

als Ordinaten zeichne. Setzen wir:

$$z_1 = \operatorname{ctg} mc \text{ und } z_2 = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3},$$

so wird m dann eine reelle Wurzel von Gl. (6) sein, wenn es die Abscisse eines Schnittpunktes beider Curven ist; für diesen ist nämlich $z_1 = z_2$.

Die Curve z_1 besteht aus unendlich vielen Zweigen, welche von $+\infty$ an steil herabfallen, die M -Axe schneiden und dann steil bis $-\infty$ sinken, und zwar ist:

$$z_1 \left(\frac{i\pi}{c} + \delta \right) = \infty \text{ für } i = 0, 1, 2 \dots \infty$$

$$z_1 \left(\frac{2i+1}{2} \frac{\pi}{c} \right) = 0 \quad , \quad , \quad , \quad ,$$

$$z_1 \left(\frac{i\pi}{c} - \delta \right) = -\infty \text{ für } , \quad , \quad ,$$

wo δ eine unendlich kleine Grösse ist. Es ist ferner $z_2(0) = \infty$ und

$$\frac{dz_2}{dm} = \frac{m^4 - 3\alpha^4}{2\beta m^4}.$$

Mithin erreicht die Curve für $m = \alpha \sqrt[4]{3}$ ein Minimum.

Ist δ eine sehr kleine Grösse, so ist:

$$z_1(\delta) = \frac{1}{\delta}, \quad z_2(\delta) = \frac{\alpha^4}{2\beta} \cdot \frac{1}{\delta^3}.$$

Während also die Cotangenten für ein sehr kleines m unendlich gross wie $1/\delta$ werden, wird dagegen ebendasselbst z_2 unendlich wie $1/\delta^3$, denn $\alpha^4/2\beta$ hat seiner Definition nach jedenfalls einen endlichen Werth. Daher bleibt in unmittelbarer

Nähe der Ordinate z_2 stets oberhalb des ersten Zweiges von z_1 .

Nun können zwei Fälle eintreten: die kleinste Ordinate von z_2 ist entweder kleiner oder grösser als die Ordinate von z_1 für $m = \alpha \sqrt[4]{3}$. Ist $z_1 < z_2$, so wird der erste Zweig von z_1 zweimal, jeder andere aber nur einmal von z_2 geschnitten.

In diesem Falle hat Gl. (6) augenscheinlich nur reelle Wurzeln. Wird aber für $m = \alpha \sqrt[4]{3}$ $z_2 > z_1$, so verschwinden die beiden Durchschnittspunkte von z_2 mit dem ersten Zweige von z_1 ; d. h. es werden zwei Wurzeln imaginär, und da auf der negativen Seite der M -Axe dasselbe Verhältniss im dritten Quadranten besteht, so werden gleichzeitig vier Wurzeln m imaginär, sobald:

$$z_2 > z_1$$

wird. Ich zeige nun, dass diese Ungleichung für meine Versuche bestand. Es soll also:

$$\frac{2\alpha}{\sqrt[4]{27}\beta} > \operatorname{ctg} \alpha \sqrt[4]{3} c$$

sein. Da stets $\operatorname{ctg} mc > 1/(mc)$ ist, so wird die verlangte Ungleichung bestehen, wenn:

$$\frac{2\alpha}{\sqrt[4]{27}\beta} > \frac{1}{\alpha c \sqrt[4]{3}} \quad \text{oder} \quad c > \frac{\beta}{2\alpha^2} \sqrt[4]{9}$$

ist. Tragen wir für c , β , α^2 ihre Werthe ein und berücksichtigen, dass:

$$\alpha^4 = \frac{\tau}{M} = \frac{\pi^2}{T^2}$$

ist, wo T die Schwingungszeit der Scheibe im leeren Raume ist, so ist zu zeigen, dass:

$$c_1 > \frac{R^4 T \eta}{8M} \sqrt[4]{9}$$

ist. Für meinen Apparat betrug:

$$R = 84,13 \text{ mm}, \quad M = 10^{10} \cdot 1,6803 \text{ mg mm}^2,$$

$$T = 29,8129 \text{ sec.}$$

Da für die meisten Flüssigkeiten $\eta < 2$ ist, so wird selbst für $\eta = 2$ nur verlangt, dass $c_1 > 0,038 \text{ mm}$ ist. Diese Bedingung war für meine Versuche stets erfüllt.

Die reellen Wurzeln der Gleichung (6) werden dargestellt durch die Abscissen der Durchschnittspunkte von z_2 mit den unendlich vielen Zweigen von z_1 . Die Schnittpunkte werden eintreten hinter den Werthen:

$$m = \frac{i\pi}{c} \text{ für } i = 1, 2 \dots \infty.$$

Die reellen Wurzeln von (6) werden also sein:

$$\frac{\pi}{c} + \delta_1, \quad \frac{\pi}{c} + \delta_2, \quad \frac{\pi}{c} + \delta_3, \dots,$$

wo $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ kleine Grössen sind. Da ferner das Minimum von z_2 für einen zwischen $m = 0$ und $m = \pi/c$ gelegenen Werth eintritt (denn für meine Versuche wenigstens ist $\sqrt[4]{3\pi^2/T^2} < \pi/c$), so bilden die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ eine abnehmende Reihe.

Die kleinste reelle Wurzel ist somit $> \pi/c$ oder $> \pi/c_1$. $\sqrt{\eta/D}$. Für die meisten Flüssigkeiten ist $\sqrt{\eta/D}$ ein unechter Bruch, und bei meinen Versuchen überstieg c_1 den Werth 3 mm nicht. Daher ist die kleinste bei diesen Versuchen auftretende reelle Wurzel noch $> \pi/3$. Alle folgenden reellen Wurzeln sind grösser und wachsen bis ins Unendliche.

Was die den reellen Wurzeln m entsprechenden Constanten B betrifft, so zeigt eine kleine Ueberlegung, dass dieselben immer kleiner werden, je grösser die Wurzel m ist.

Nun geht in die Lösung des Problems der Factor $e^{-m^2 t}$ ein. Nehmen wir $t = T_1$ an, wollen also den Werth von ψ nach einer Schwingung ermitteln, so ist der grösste Werth dieser Grösse kleiner als $e^{-(\pi^2/9)T_1}$. Da für meine Versuche ungefähr $T_1 = 30$ Sec. war, so muss selbst der grösste von den reellen Wurzeln herrührende Term verschwinden, da e^{-98} der Null gleich gesetzt werden kann. Aber auch, wenn c_1 einen bedeutenden Werth hat, so leuchtet ein, dass $e^{-m^2 t}$ so klein gemacht werden kann, wie man will, wenn man nur wartet, bis t einen genügend grossen Werth besitzt.

Somit haben sämmtliche reelle Wurzeln der Gleichung (6) keinen messbaren Einfluss und können daher vernachlässigt werden.

Die Gleichung (6) besitzt aber, wie gezeigt ist, ausser unendlich vielen reellen Wurzeln noch vier imaginäre.

Genügt m der Gleichung (6), so genügt ihr auch $-m$; genügt ihr $m = a + bi$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so genügt ihr auch $m' = a - bi$. Sind also a und b zwei positiv reelle Grössen, so sind die vier complexen, allein in Betracht kommenden Wurzeln von (6):

$$\begin{aligned} m_1 &= a + bi & m_2 &= -a - bi \\ m_1' &= a - bi & m_2' &= -a + bi. \end{aligned}$$

Die Gleichung (6) erhält jetzt die Gestalt:

$$(6_a) \quad -\frac{\sin 2ac - i \sinh 2bc}{\cos 2ac - \cosh 2bc} = A + iB,$$

wo der hyperbolische Sinus:

$$\sinh 2bc = \frac{e^{+2bc} - e^{-2bc}}{2}$$

und der hyperbolische Cosinus:

$$\cosh 2bc = \frac{e^{2bc} + e^{-2bc}}{2}$$

ist, und abkürzend gesetzt ist:

$$(13_a) \quad A = a \frac{(a^2 + b^2)^3 + \alpha^4 (a^2 - 3b^2)}{2\beta (a^2 + b^2)^3} \quad \text{und:}$$

$$(13_b) \quad B = b \frac{(a^2 + b^2)^3 + \alpha^4 (b^2 - 3a^2)}{2\beta (a^2 + b^2)^3}.$$

Das Summenzeichen in der Gleichung (5) ist jetzt so zu verstehen, dass die Summation über die vier imaginären Wurzeln m_1, m_1', m_2, m_2' auszudehnen ist. Dann ergibt sich nach geeigneter Umformung und Vereinigung:

$$(14) \quad \psi = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4abi} \Phi_0 \left\{ e^{-m_1^2 t} \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} - e^{-m_1'^2 t} \frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c} \right\}$$

$$(15) \quad \text{und } \varphi = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4abi} \Phi_0 \left\{ \frac{e^{-m_1'^2 t}}{m_1'^2} - \frac{e^{-m_1^2 t}}{m_1^2} \right\}.$$

Vereinigt man die Exponentialfunctionen mit complexen Exponenten und die Kreisfunctionen mit complexen Argumenten, so zeigt es sich, dass φ und ψ reell sind, und zwar ist:

$$(14_a) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi &= -\frac{(a^2 + b^2)^2 \Phi_0}{4ab} e^{-(a^2 - b^2)t} \left\{ A e^{by} \cos(ay - 2abt) \right. \\ &\quad \left. - A e^{-by} \cos(ay + 2abt) + (B + 1) e^{by} \sin(ay + 2abt) \right. \\ &\quad \left. + (B - 1) e^{-by} \sin(ay - 2abt) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(15_a) \quad \text{und } \varphi = \frac{\Phi e^{-(a^2-b^2)t}}{2ab} \left\{ (a^2-b^2) \sin 2abt + 2ab \cos 2abt \right\}.$$

J. Clerk Maxwell gibt in seiner diesen Gegenstand betreffenden Abhandlung¹⁾ eine etwas abweichende Lösung des Problems, welche daher kommt, dass er den Anfangszustand für $t=0$ nicht berücksichtigt. Auch ist daselbst nichts darüber gesagt, weshalb die unendlich vielen reellen Wurzeln von (6) zu vernachlässigen sind.

§ 5. Betrachte ich das bestimmte Integral:

$$\int_0^c \frac{\cos m(c-y) \cos m'(c-y)}{\sin mc \sin m'c} dy = \frac{m \operatorname{ctg} m'c - m' \operatorname{ctg} mc}{m^2 - m'^2}$$

und setze voraus, dass m und m' zwei complex imaginäre Wurzeln von (6) sind, so folgt:

$$\int_0^c \frac{P^2 + Q^2}{P^2 + Q^2} dy = \frac{\alpha^4 (a^2 - b^2)}{\beta (a^2 + b^2)^3}.$$

Da die linke Seite stets positiv ist, so muss es auch die rechte sein. Da a und b , und α positiv reell sind, so folgt:

$$(16) \quad a^2 - b^2 = l > 0.$$

Ferner ist:

$$\int_0^c \frac{\sin m(c-y) \sin m'(c-y)}{\sin mc \sin m'c} dy = \frac{m \operatorname{ctg} mc - m' \operatorname{ctg} m'c}{m'^2 - m^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass m und m' complex imaginäre Wurzeln von (6) sind, ergibt sich:

$$\int_0^c \frac{M^2 + N^2}{m^2 + n^2} dy = \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{\alpha^4}{(a^2 + b^2)^2} - 1 \right\}.$$

Hierzu muss stets:

$$\alpha^4 > (a^2 + b^2)^2 \quad \text{sein, oder} \quad \frac{\tau}{M} = \frac{\pi^2}{T^2} > (a^2 + b^2)^2,$$

wo T die Schwingungszeit der Scheibe im leeren Raume ist.

Da nun nach (16):

$$a - b > 0, \text{ so folgt } (a^2 + b^2) > 2ab, \text{ mithin erst recht:}$$

$$(17) \quad \alpha^2 > 2ab \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{\alpha^2} < \frac{\pi}{2ab}.$$

1) Maxwell, Phil. Trans. 156. p. 1. 1866.

Betrachten wir nun die Gleichungen (14_a) und (15_a), so erkennen wir zunächst, dass die Scheibe pendelartige Schwingungen um ihre Haupt~~axe~~ ausführen muss. φ nimmt dieselben Werthe an, wenn das Argument um 2π wächst, wo π eine ganze Zahl angibt. Setze ich das Argument gleich:

$$2ab \left(t + \frac{2\pi}{2ab} \right),$$

so nimmt φ dieselben Werthe wieder an, wenn eine Zeit von $2\pi/2ab$ Secunden verflossen ist; diese Zeit nennt man die doppelte Schwingungszeit. Als die einfache Schwingungszeit ergibt sich:

$$T_1 = \frac{\pi}{2ab}, \quad 2ab = \frac{\pi}{T_1} = \alpha_1^2,$$

und so bedeutet denn die Ungleichheit (17) nichts anderes als:

die Schwingungszeit der Scheibe im leeren Raume ist kleiner als diejenige in der Flüssigkeit.

Die Ungleichung (16) aber sagt aus, dass die Amplituden in geometrischer Progression abnehmen; der Exponent der Reihe bezogen auf die Zeiteinheit ist $l = a^2 - b^2$, dieselbe Grösse, welche man gewöhnlich das logarithmische Decrement nennt. Man darf jedoch nicht übersehen, dass es sich hier auf natürliche Logarithmen bezieht. Die Ungleichheit $(a^2 + b^2)^2 < \alpha^4$ kann somit geschrieben werden:

$$l^2 < \pi^2 \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_1^2} \right),$$

welche Beziehung besagt, dass das logarithmische Decrement nie unendlich gross werden kann, sondern stets unterhalb der Grenze π/T bleiben muss.

§ 6. Es bleibt schliesslich die Aufgabe, aus den beobachtbaren Grössen: Entfernung c_1 , logarithmisches Decrement l und der Schwingungszeit T_1 durch geeignete Formeln die Grösse des Reibungscoefficienten η in absolutem Maasse zu ermitteln.

Hierzu erinnern wir uns der Gleichung:

$$\operatorname{ctg} mc = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3}.$$

Ist c_1 sehr klein, so kann gesetzt werden:

$$(18) \quad \operatorname{ctg} mc = \frac{1}{mc} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3}, \quad \text{oder: } m^4 - \frac{2\beta}{c} m^2 = -\alpha^4,$$

mithin $m^2 = l \pm \alpha_1^2 i = \beta/c \pm \sqrt{(\beta^2 - c^2 \alpha^4)/c^2}$.

Ist nun $c^2 \alpha^4 > \beta^2$, also:

$$c_1 > \frac{R^4 T}{4M} \eta,$$

so finden folgende Beziehungen statt:

$$l = \frac{\beta}{c}, \quad \alpha_1^2 = \frac{1}{c} \sqrt{\alpha^4 c^2 - \beta^2}, \quad \text{oder:}$$

$$(19) \quad 2lc_1 M = \left(\frac{R^4 \pi}{2} \right) \eta, \quad \text{und:}$$

$$(20) \quad c_1^2 \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_1^2} \right) = \left(\frac{R^4}{4M} \eta \right)^2.$$

Die beiden sehr einfachen Gleichungen (19) und (20) gelten aber nur dann, wenn die Näherungsgleichung (18) erlaubt ist. Diese gilt aber nur für sehr kleine Entfernungen c_1 . Da es aber aus Gründen, die später besprochen werden sollen, misslich ist, Beobachtungen für so ausserordentlich kleine Entfernungen c_1 anzustellen, so habe ich eine Formel abgeleitet, welche auch für etwas grössere Entfernungen gilt.

Indem ich in (6_a) Reelles und Imaginäres trenne und die entstehenden Gleichungen durch Subtraction vereinige, erhalte ich:

$$(6_b) \quad \frac{\frac{\sin 2ac}{a} + \frac{\sinh p 2bc}{b}}{\cosh p 2bc - \cos 2ac} = \frac{2l\alpha^4}{(a^2 + b^2)^2 \beta}.$$

Ich löse die linke Seite in eine Reihe auf:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2ac}{a} + \frac{\sinh p 2bc}{b} &= 4c - \frac{(2c^3)}{3!}(a^2 - b^2) \\ &+ \frac{(2c)^5}{5!}(a^4 + b^4) - \frac{(2c)^7}{7!}(a^6 - b^6) \dots \end{aligned}$$

Ich mache nun die Voraussetzung, dass die folgenden Glieder gegen diese vernachlässigt werden dürfen. Das folgende Glied würde sein:

$$\frac{(2c)^9}{9!}(a^8 + b^8) < \frac{(2c)^9}{9!}(a^2 + b^2)^4,$$

da nach § 5 $(a^2 + b^2)^2 < a^4$ ist, so ist erst recht:

$$\frac{(2c)^9}{9!} (a^8 + b^8) < \frac{(2c)^9}{9!} \alpha^8.$$

Soll nun dieses Glied 10000 mal so klein sein als das erste, also:

$$4c = 10000 \cdot \frac{(2c)^9}{9!} \alpha^8,$$

so muss c genommen werden:

$$c = \frac{\sqrt[9]{0,2835}}{\alpha} = 0,482 \sqrt{T_1}.$$

Man erhält also recht bequeme Entfernungen, wenn man T_1 recht gross wählt; dies geschieht, indem man einen dünnen Aufhängungsdraht anwendet. Bei meinen Versuchen betrug $T_1 = 29,8$ Sec., mithin gilt die Annäherung bis für:

$$c = 2,63.$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } \cosh 2bc - \cos 2ac &= 2c^2(a^2 + b^2) \\ &- \frac{(2c)^4}{4!} (a^4 - b^4) + \frac{(2c)^6}{6!} (a^6 + b^6). \end{aligned}$$

Die übrigen Glieder sind für die berechnete Entfernung zu vernachlässigen. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{2ac}{a} + \frac{\sinh 2bc}{b}}{\cosh 2bc - \cos 2ac} &= \frac{4c}{2c^2(a^2 + b^2)} \frac{1 - \frac{c^2 l}{3} + \frac{c^4 \alpha_1^4}{30}}{1 - \frac{c^2 l}{3} + \frac{c^4 \alpha_1^4}{90}} \\ &= \frac{2}{c(a^2 + b^2)} \left(1 + 0,21923 \frac{c^4}{T_1^2} \right). \end{aligned}$$

Für Wasser war die grösste Entfernung, in der ich beobachtete, $c_1 = 2,28$ mm. Hierfür betrug $l = 0,001437$ und $T_1 = 29,816$ Sec. Berechnet man die linke Seite, indem man $c = c_1$ setzt, so ergibt sich 8,384; rechnet man nach der von mir angegebenen Annäherung, so erhält man 8,380. Die Uebereinstimmung ist also befriedigend.

Es ergibt sich somit die Gleichung:

$$(21) \quad \frac{\alpha^4 l}{(a^2 + b^2)^2 \beta} = \frac{\left(1 + 0,21923 \frac{c^4}{T_1^2} \right)}{c},$$

oder:

$$2lc_1 M = \frac{R^4 \pi}{2} \eta \left(\frac{T}{T_1} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{lT_1}{\pi} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + 0,21923 \frac{c^4}{T_1^2} \right\}.$$

Nach dieser Gleichung habe ich meine Beobachtungen berechnet.

Für grosse Entfernungen lässt sich eine ziemlich einfache Formel herleiten. Dann ist nämlich $\text{ctg } mc = -i$ und daher:

$$0 = (a^2 + b^2)^3 + \alpha^4 (a^2 - 3b^2),$$

$$1 = b \frac{\alpha^4 (3a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)^3}{(a^2 + b^2)^3 \cdot 2\beta}.$$

Für sehr kleine Decremente darf gesetzt werden $(a^2 + b^2) = \alpha_1^2$. Dann ergibt sich nach geeigneten Umformungen:

$$(22) \quad 2Ml \left(\frac{T_1}{T} \right)^2 \sqrt{\frac{T^2 + T_1^2}{\pi T_1}} = \frac{R^4 \pi}{2} \sqrt{\eta D}.$$

Die Formel (21) hat Aehnlichkeit mit der von Maxwell, die Formel (22) mit der von O. E. Meyer angegebenen. In beiden Fällen treten jedoch an Stelle von unendlichen Reihen geschlossene Ausdrücke, welche die Rechnung vereinfachen.

§ 6. Es soll nun untersucht werden, wie sich das logarithmische Decrement und die Schwingungszeit mit der Entfernung der Scheibe vom Gefässboden ändern.

Zunächst gelten für sehr kleine Entfernungen die Formeln (19) und (20). So lange $\beta^2 - c^2 \alpha^4 < 0$, also $c_1 > (R^4 T / 4M) \eta$ ist, hat T_1 einen endlichen Werth. Wie die Gleichung (20) lehrt, wird sich derselbe nur sehr wenig von T unterscheiden, wenn M einen grossen Werth besitzt. Mit wachsender Entfernung muss sodann T_1 kleiner werden und sich schliesslich einem constanten Werthe nähern. Genauer über den Verlauf von T_1 habe ich nicht ermitteln können.

Für $c_1 = (R^4 T / 4M) \eta$ wird $T_1 = \infty$; und für diesen ausgezeichneten Werth von c_1 wird, wie die Gleichung (19) zeigt:

$$l = \frac{\pi}{T}.$$

Dies ist der grösste Werth, den das logarithmische Decrement überhaupt annehmen kann; es wird nicht unendlich gross. Die Erfahrung kann dieses Resultat nicht bestätigen, da der Beobachtung nur das Decrement $L = \log e \cdot T_1 \cdot l$ zugänglich ist, welches mit T_1 selbst unendlich wird. Mit wachsender Entfernung wird nun l kleiner, und zwar ist nach (20) das logarithmische Decrement der Entfernung umgekehrt proportional.

Man sollte nun von vornherein erwarten, dass l mit wachsender Entfernung fortwährend kleiner wird und sich asymptotisch einer festen Grenze nähert; d. h. fragen wir nach derjenigen Entfernung, für welche $dl/dc_1 = 0$ ist, für welche also keine Aenderung mehr stattfindet, so sollte sich voraussichtlich $c_1 = \infty$ ergeben. Dem ist indess nicht ganz so.

Verglichen mit der Veränderlichkeit des logarithmischen Decrementes kann die Aenderung der Schwingungszeit ganz vernachlässigt werden. Ist aber zu setzen $T_1 = \text{const.}$, so folgt, da $T_1 = \pi/2ab$ ist, $a(db/dc_1) - b(da/dc_1) = 0$.

Soll $dl/dc_1 = 0$ sein, so muss:

$$a \frac{da}{dc_1} - b \frac{db}{dc_1} = 0,$$

sein. Diese beiden Gleichungen können nur bestehen, wenn $da/dc_1 = db/dc_1 = 0$ ist. Ich betrachte die Gleichung:

$$\frac{\frac{\sin 2ac}{a} + \frac{\sinh 2bc}{b}}{\cosh 2bc - \cos 2ac} = f(c) = \frac{2l\alpha}{(a^2 + b^2)^3 \beta}.$$

Soll $dl/dc_1 = 0$ sein, so folgt $\partial f / \partial c_1 = 0$, wo das ∂ die Differentiation nach c_1 andeutet, soweit dasselbe explicite in $f(c)$ vorkommt. Die Function $f(c)$ hat aber die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = -2 \frac{\sin 2ac \sinh 2bc}{(\cosh 2bc - \cos 2ac)^2},$$

ist. Dieser Ausdruck verschwindet aber nicht nur für $\cosh^2 2bc = \infty$, also für $c_1 = \infty$, sondern auch, wenn:

$$2ac = (2n + 1)\pi \text{ oder } 2n\pi$$

ist. Die Betrachtung von $\partial^2 f / \partial c_1^2$ für diese Werthe von c lehrt, dass dann:

(23) l ein Minimum ist, wenn $2ac = (2n + 1)\pi$,

(24) l ein Maximum ist, wenn $2ac = 2n\pi$

ist. Hiernach muss also l abwechselnd Maxima und Minima besitzen, welche aber bei einigermaßen bedeutenden Entfernungen in einander übergehen, da dann der zweite Factor:

$$\frac{\sinh 2bc}{(\cosh 2bc - \cos 2ac)^2},$$

für jeden Werth von c_1 Null ist.

Im experimentellen Theile der Untersuchung werde ich die Beobachtungen mittheilen, welche diese merkwürdige Thatsache vollständig bestätigen. Hätte man ein Mittel, die Entfernung scharf zu bestimmen, für welche l ein Minimum ist, so hätte man in der Beziehung $2ac = \pi$ ein gutes Mittel zur Berechnung der Reibungsconstanten. Da dies bis jetzt nicht vorhanden ist, hat die vorstehende Betrachtung nur insofern grossen Werth, als sie die durchgeführte Theorie aufs vollständigste zu prüfen gestattet.

§ 7. Ich will nun Formeln ableiten, um den Coëfficienten der inneren und äusseren Reibung von Flüssigkeiten zu berechnen, welche an der Scheibe und am Gefässboden gleiten. Hierzu erinnere ich mich der Gleichung:

$$(12) \quad F(m) = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} (1 + m\zeta F(m)),$$

wo:
$$F(m) = \frac{\operatorname{ctg} mc - m\zeta}{1 + m\zeta \cot mc},$$

ist. Ich wähle einen solchen Werth von c_1 , dass $\sinh p 2bc = \cosh p 2bc$ gesetzt werden kann, und der zugleich so beschaffen ist, dass $\sin 2ac = 0$, also:

$$2ac = n\pi,$$

ist. Dann kann mit sehr grosser Annäherung gesetzt werden:

$$\operatorname{ctg} mc = -i, \quad \text{also:}$$

$$F(m) = \frac{-i - m\zeta}{1 - m\zeta i} = -i,$$

dann wird also (12):

$$-i = (A + Bi)(1 - i(a + bi)\zeta),$$

und hieraus folgt:

$$(25) \quad 0 = A + \zeta(bA + aB), \quad -1 = B + \zeta(bB - aA),$$

wo A und B die in (13_a) und (13_b) angegebenen Werthe haben. Ich will übrigens einführen:

$$A = \frac{a\mathfrak{A}}{2\beta(a^2 + b^2)^3}, \quad B = \frac{b\mathfrak{B}}{2\beta(a^2 + b^2)^3},$$

dann wird (25):
$$0 = a\mathfrak{A} + ab\zeta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$$

also:
$$\zeta = -\frac{\mathfrak{A}}{b(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}, \quad \text{folglich:}$$

$$(26) \quad E = -\frac{b(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}{\mathfrak{A}} \sqrt{D\eta}.$$

Soll E einen endlichen Werth haben, so muss \mathfrak{A} von Null verschieden sein. Nun ist $\mathfrak{A} = (a^2 + b^2)^3 + a^4(a^2 - 3b^2)$. Also muss $(a^2 + b^2)^3 > a^4(3b^2 - a^2)$ sein; eine Bedingung, welche auch geschrieben werden kann:

$$(26_*) \quad \left\{ \frac{\pi^2}{T_1^2} + l^2 \right\}^{\frac{3}{2}} > \frac{\pi^2}{T^2} \left\{ \left\{ \frac{\pi^2}{T_1^2} + l^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 2l \right\}.$$

Für Flüssigkeiten, welche an der Scheibe haften, muss nach § 5 $\mathfrak{A} = 0$ sein. Da $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = -2(a^2 + b^2)\{\alpha^4 - \alpha_1^4 - l^2\}$ ist, so folgt:

$$(27) \quad E = \frac{2(a^2 + b^2)b}{\mathfrak{A}} \sqrt{D\eta} \{\alpha^4 - \alpha_1^4 - l^2\}.$$

Aus (25) folgt ferner:

$$aB + bA = -a(A^2 + B^2),$$

$$\text{oder:} \quad b(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = -\frac{a^2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2b^2}{2\beta(a^2 + b^2)^3}.$$

Hieraus folgt:

$$(28) \quad \sqrt{D\eta} = \frac{2MT_1}{R^4\pi^2} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{((\alpha^2 - \alpha_1^2)^2 + l^2)((\alpha^2 + \alpha_1^2)^2 + l^2)}{(\alpha^4 - \alpha_1^4 - l^2)}.$$

Hat man aus (28) $\sqrt{D\eta}$ berechnet, so erhält man aus (27) die Grösse E .

Die Zahl E ist bekanntlich nicht von gleicher Dimension mit η . Aus den Gleichungen:

$$D \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \text{und} \quad \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\psi \cdot E,$$

folgt, dass die Dimension:

$$\begin{aligned} &\text{von } \eta \text{ ist } m l^{-1} t^{-1} \\ &,, E ,, \quad m l^{-2} t^{-1}. \end{aligned}$$

§ 8. Es kommt nun darauf an, durch geeignete Experimente die entwickelte Theorie zu prüfen. Die Voraussetzungen, unter denen die Theorie entwickelt wurde, waren:

1) dass die Scheibe und der Gefässboden parallel und horizontal seien;

2) dass der Aufhängungsdraht die Axe der Scheibe und des Gefässes bildet;

3) dass die Scheibe die Oberfläche berührt;

4) dass die Temperatur der Flüssigkeit während des Versuches constant bleibt. Ueberdies muss:

5) der Apparat gestatten, die Entfernung von Scheibe von Gefässboden bequem und scharf zu messen.

Der Apparat, welcher mir bisher zu Gebote stand, ist nach den Erfahrungen von O. E. Meyer, Louis Grossmann und meinen eigenen construirt worden und gehört dem physikalischen Cabinet der Universität Breslau. Er erfüllt die Bedingungen 1, 2, 3 und 5, nicht aber die Bedingung 4. Dass dies aber geschehe, ist um so wichtiger, als für eine grosse Zahl Flüssigkeiten die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur noch gar nicht genau ermittelt ist. Für viele Zwecke (z. B. für die Bestimmung der Reibung von gemischten Salzlösungen, Aenderung der Reibung mit dem Salzgehalte u. s. w.) ist es wünschenswerth, den Reibungscoefficienten für dieselbe Temperatur, wohl am besten für Null Grad, zu kennen. Bevor daher der Apparat die Beobachtung bei constanter Temperatur nicht gestattet, möchte ich die Versuche, welche ich mittheilen werde, nicht als die endgültigen angesehen wissen. Ein anderes Moment kommt noch hinzu. Die Oberfläche nämlich liefert zweifelsohne einen sehr erheblichen Beitrag zum logarithmischen Decrement; aber es ist noch durchaus nicht bekannt, in welcher Weise sich dieser Einfluss mit der Temperatur ändert. Wenn dagegen sämtliche Versuche bei constanter Temperatur angestellt werden könnten, so würde man durch die Theorie denjenigen Betrag des Decrementes berechnen können, welcher von der Reibung der Flüssigkeit allein herrührt, durch die Beobachtung denjenigen, welcher von der Reibung des Systemes an der Luft und der inneren Reibung des Drahtes herrührt: der Rest des Decrementes muss sodann von der Oberfläche herrühren, und man würde auf diese Weise ein schätzenswerthes Mittel erhalten, dieser in neuerer Zeit öfter von Oberbeck¹⁾, Plateau²⁾, Marangoni³⁾ untersuchten Grösse näherzutreten.

Es sollen daher die nachfolgenden Versuche vorläufig

1) Oberbeck, Wied. Ann. 11. p. 634. 1880.

2) Plateau, Pogg. Ann. 141. p. 44. 1870.

3) Marangoni, Nuov. Cim. (2) 5. und 6. 1872.

nur den Zweck haben, die entwickelte Theorie zu bestätigen, so gut es der Apparat bis jetzt zulässt.

Die Glasscheibe G ist an zwei Haken H nach Art der Cardanischen Aufhängung so befestigt, dass der Draht die Verlängerung ihrer Hauptaxe bildet. Um ihr Trägheitsmoment zu vermehren, ist sie mit einer dicken Bleischeibe von gleichem Radius verbunden, doch so, dass man zwischen Glasscheibe und Bleischeibe hindurch die Flüssigkeit erblicken kann. Die Schwingungen der Scheibe werden mit Fernrohr, Spiegel und Scala beobachtet. Der übrige Theil des Apparates dient zur Aufstellung des Gefässes mit der Flüssigkeit und zur Messung der Entfernung der Scheibe vom Gefässboden. Um die Glasplatte P mit der Glasscheibe G conaxial aufstellen zu können, zeichnete ich auf ersterer mit dem Diamante einen mit ihr concentrischen Kreis vom Radius der Glasscheibe; wurde nun der Apparat so lange verschoben, bis die Glasscheibe den Kreis gerade deckte; dann fiel die Hauptaxe der Platte mit der des Drahtes zusammen. Auf diese zuvor horizontal gestellte Platte wurde das Gefäss für die zu untersuchende Flüssigkeit aufgesetzt; da sein Boden fast genau so gross war wie die Platte P , so war mit obiger Manipulation zugleich die Bedingung 2, die übrigens ziemlich unwesentlich ist, erfüllt. Der Boden des Gefässes wurde durch eine dünne planparallele Spiegelglasplatte gebildet; der Rand bestand aus lackirtem Messing und war nur etwa 12 mm hoch, aus Gründen, die ich so gleich auseinandersetzen werde.

Die Platte P kann durch den Messingcylinder A gehoben und gesenkt werden, welcher letzterer durch Drehen an der Schraube S_2 in die Hülse E gezogen wird. Eine Drehung an der Schraube S_2 arretirt den Messingcylinder A an beliebiger Stelle. Da der letztere nicht sehr dick ist, so ist es für die grössere Stabilität des Apparates wünschenswerth, dass er nicht zu weit aus der Hülse E gehoben zu werden braucht; daher muss das Gefäss möglichst niedrig sein. Mit der Platte P wird zugleich ein Mikroskop F gehoben und gesenkt, in welchem man die Scala Sc erblickt; eine Hebung der Platte P bewirkt im Mikroskope eine Veränderung des Bildes. Wird aber das Gefäss auf die Platte P

aufgesetzt und letztere gehoben, bis sie auf die Glasscheibe stösst, so verschiebt sich von jenem Punkte an die Scala nicht mehr gegen das Fadenkreuz. Bringt man letzteres zur Coincidenz mit einem Scalentheile, so hat man es in der Gewalt, das Gefäss um eine beliebige Anzahl Theilstriche zu senken, welche dann gleich ist der Entfernung zwischen Scheibe und Gefässboden. Man hat also nur nöthig, jene Scala recht genau auszumessen, um die Entfernung c , so genau wie möglich zu erhalten. Ich verglich die Theilung mit einem Maassstabe von Porro in Paris, welcher sich in der Sammlung des physikalischen Cabinets der Universität Königsberg befindet; es ergab sich, dass 144 Theilstriche der Scala = 14,41 mm sind, also 1 Theilstrich = 0,100 mm ist.

Um ferner genau controliren zu können, ob die Glasscheibe horizontal hängt, sind in gleicher Entfernung von der Drehungsaxe (und der Peripherie der Scheibe) drei Schrauben S_3 angebracht, deren Gewinde in drei Messingstreifen eingeschnitten sind, welche sich in der Drehungsaxe zwischen Glas- und Bleischeibe unter 120° vereinigen. Diese Schrauben sind der Länge nach durchbohrt, sodass durch sie lange Eisennadeln mit scharfen Spitzen gesteckt werden können. Ich legte zunächst zwei planparallele Glasplatten über einander und setzte die Scheibe auf die obere auf. Dann wurden die Schrauben mit den Nadeln so weit heruntergeschraubt, dass die Spitzen gerade die untere Glasfläche berührten; diese Einstellung kann sehr scharf erreicht werden. Wird nun die Scheibe aufgehängt, so ist die durch die drei Nadelspitzen gelegte Ebene parallel der unteren Fläche der Glasscheibe. Um die verlangte Controle ausführen zu können, hat man einfach ein Gefäss mit Quecksilber unterzusetzen: die drei Spitzen müssen die Oberfläche des letzteren genau gleichzeitig berühren. Dies war bei meiner Scheibe bei der angewandten Art der Aufhängung in der That der Fall.

Die Spitzen haben noch einen anderen wesentlichen Zweck. Nach der angestellten Prüfung wird die Scheibe wieder auf eine ebene Glasplatte (etwa die Platte P) gesetzt und die Spitzen auf die Berührung derselben eingestellt;

nun liegt die Ebene der Spitzen in der Ebene der unteren Scheibenfläche. Giesst man bei jedem Versuche stets so viel Flüssigkeit in das Gefäss, dass die drei Spitzen die Oberfläche derselben berühren, so ist die Bedingung (3) erfüllt. Damit aber die Oberfläche durch die Spitzen nicht verletzt wird, können die Nadeln mit Hülfe eines Magnets aus den Schraubenspindeln herausgezogen werden.

In die Axe der Scheibe ist ein kleiner Magnet μ geschraubt; soll die Scheibe schwingen, so wird ein Pol eines schwachen Magnets dem Nordpol von μ genähert.

Das Gefäss konnte ganz in ein Häuschen aus Blech und Pappe eingeschlossen werden, sodass nur der Spiegel und die Scala Sc zu sehen war.

Die Temperatur der sehr dünnen Flüssigkeitsschicht musste mit Hülfe von Thermoströmen und Galvanometer bestimmt werden. Diese Methode der Temperaturmessung ist zwar sehr empfindlich, allein sie ist nur dann recht brauchbar, wenn man für das Galvanometer einen sehr sicheren Standort hat. Diese Vorbedingung war für das Gebäude, in dem ich arbeitete, das physikalische Institut zu Königsberg, leider nicht erfüllt. Die Schwankungen, in die ein vorüberrollender Wagen die Nadel versetzte, machten die Genauigkeit der Messung illusorisch. Ich habe demnach mein Augenmerk darauf gerichtet, bei möglichst gleicher Temperatur zu arbeiten, und stellte die Versuche des Morgens im ungeheizten Zimmer an. Ich weise nochmals auf das am Eingang des Paragraphen über die Temperatur Gesagte hin.

§ 9. Die Theorie verlangt, dass für sehr kleine Entfernungen c_1 das logarithmische Decrement dieser Entfernung umgekehrt proportional sein soll; dies Gesetz gilt noch bis für $c = 0,482 \sqrt{T_1}$, wenn man statt c_1 die Grösse:

$$\frac{c_1}{\left(1 + \left(\frac{l T_1^2}{\pi}\right)\right) \left(1 + 0,22 \frac{c^4}{T_1^2}\right)} = c'$$

einführt; denn dann ist nach Formel (21) $lc' = \text{const.}$

Hierbei ist aber zu berücksichtigen, dass unter l derjenige Theil des Decrementes zu verstehen ist, der allein von der inneren Reibung der Flüssigkeit herrührt. Ist also l'

das beobachtete Decrement, λ derjenige Theil desselben, der von anderen Einflüssen als der Reibung herrührt, so muss die Formel geschrieben werden:

$$(\lambda' - \lambda) c' = \text{const.} = C$$

Die nachfolgende Tabelle gibt in der ersten Columnne die Entfernung c_1 , in der zweiten das beobachtete Decrement λ' . Nach der Methode der kleinsten Quadrate ist sodann C und λ berechnet und sodann wieder rückwärts λ' ermittelt worden, wie es die Theorie verlangt. Aus C ergibt sich sofort:

$$\eta = 1,258 \text{ für } \vartheta = 12,9^\circ \text{ C.},$$

$$\lambda = 0,000\,134 \quad \text{„} \quad \text{„}$$

Der von der Reibung an der Luft und der inneren Reibung des Drahtes herrührende Betrag ist 0,000 008 9, also ungefähr 15 mal kleiner.

Tabelle I.

Destillirtes Wasser.

$$M = 10^{10} \cdot 1,58315; \quad R = 84,13; \quad T = 29,7544; \quad T_1 = 29,816.$$

c_1 (mm)	λ' (beobacht.)	λ' (berechn.)	c_1 (mm)	λ' (beobacht.)	λ' (berechn.)
1,05	0,002 931	0,002 924	1,57	0,001 972	0,001 999
1,20	0,002 601	0,002 575	1,60	0,002 020	0,001 965
1,23	0,002 555	0,002 516	1,78	0,001 784	0,001 779
1,26	0,002 433	0,002 459	1,78	0,001 765	0,001 779
1,32	0,002 325	0,002 353	1,94	0,001 663	0,001 644
1,37	0,002 235	0,002 273	2,04	0,001 559	0,001 569
1,40	0,002 252	0,002 226	2,14	0,001 508	0,001 502
1,46	0,002 105	0,002 140	2,25	0,001 436	0,001 435
1,47	0,002 108	0,002 127	2,28	0,001 437	0,001 428

Ich bin überzeugt, dass die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung viel grösser sein wird, wenn die Temperatur bei allen Experimenten genau dieselbe sein wird.

Nach der entwickelten Theorie soll das logarithmische Decrement mit wachsender Entfernung kleiner werden, aber von einem Werthe von c_1 ab wieder wachsen, kurz sich wellenförmig einer festen Grenze nähern. Mir kam es vorzüglich darauf an, das erste Minimum zu constatiren. Dasselbe soll nach der Theorie eintreten, wenn:

$$2ac = \pi \text{ ist; hieraus folgt: } c_1^2 = \frac{\eta}{D} \cdot \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Um diese Entfernung schätzen zu können, erinnern wir uns an die Beziehung:

$$\frac{\pi}{2ab} = T_1,$$

und da a von b nicht sehr verschieden ist, kann annähernd gesetzt werden:

$$\frac{\pi}{2a^2} = T_1;$$

also ergibt sich $c_1^2 = (\eta/D) (\frac{1}{2}\pi) T_1$, oder, indem wir für Wasser $\eta/D = 1$ setzen: $c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\pi T_1}$. Hieraus folgt also, dass in der Nähe der Entfernung:

$$c_1 = 6,84 \text{ mm}$$

das logarithmische Decrement ein Minimum besitzen soll.

Tabelle II.
Destillirtes Wasser.

c_1 (mm)	L	c_1 (mm)	L
1,05	0,03788	6,24	0,00907
2,28	0,01858	6,54	0,00908
3,25	0,01377	6,80	0,00913
4,29	0,01124	7,34	0,00929
5,18	0,00990	9,30	0,00950
5,85	0,00938	11,28	0,00987

Die Grösse L ist das unmittelbar beobachtete Decrement der Amplitude. Die Tabelle zeigt, dass das Decrement zwischen 6,24 und 6,54 mm ein Minimum besitzt, also für eine kleinere Entfernung, als die angegebene. Dies rührt daher, dass in Wirklichkeit T_1 nicht vollkommen constant ist, also auch nicht streng $2ab = \text{const.}$ zu setzen war. Jedenfalls aber zeigt sie, dass das Decrement sich in der That so ändert, wie es die Formel (6_b) verlangt.

§ 10. Als Beispiel einer Flüssigkeit, welche möglicher Weise an der Glasscheibe gleiten kann, habe ich das Quecksilber gewählt. Mit dieser Flüssigkeit bin ich jedoch zu sehr verschiedenen Resultaten gelangt, je nach dem Quecksilber, welches ich benutzte. In Breslau presste ich dasselbe vor jedem einzelnen Versuche durch Leder; in Königsberg benutzte ich Quecksilber, welches kurz zuvor im Vacuum destillirt war, und liess es vor jedem einzelnen Experimente

durch einen sehr engen eisernen Hahn strömen. Diese Vorsicht musste angewandt werden, weil ich bemerkte, dass sich das logarithmische Decrement sehr bald ausserordentlich vermehrte, sobald die Oberfläche eine Zeit lang ungestört blieb. Um dies anschaulich zu machen, bestimmte ich das Decrement für dasselbe Quecksilber nach Zeiträumen von ungefähr 50 Minuten. Die folgende Tabelle zeigt die gewaltige Vermehrung des Decrementes mit der Zeit:

Tabelle III.

Quecksilber.

Nach	0 Minuten	$L = 0,02262$	Nach	220 Minuten	$L = 0,07339$
"	54	" 0,02272	"	232	" 0,1153
"	116	" 0,02451	"	248	" 0,2422
"	195	" 0,03675	"	280	" 0,7758

Wenige Zeit später klebt die Scheibe an der Oberfläche so fest, dass die Kraft eines starken Magnets nicht im Stande ist, sie zu bewegen; dabei sieht die gegen Staub geschützte Oberfläche vollständig rein, blank und unverändert aus. Die Versuche müssen daher stets gleich nach dem Einfüllen des Quecksilbers beginnen.

Nach den Untersuchungen von Stefan¹⁾ soll das Quecksilber am Glase gleiten, und zwar gibt er den Werth von E an auf:

$$w = 0,0035,$$

w ist bezogen auf mm, sec und mg. Es wurde berechnet aus den Schwingungen, welche eine Quecksilbermenge in einem heberförmigen Glasgefässe machte. Diese Grösse w enthält aber in ihrem Ausdrucke g im Nenner; um also w auf E zu reduciren, muss man mit:

$$g = 9810 \text{ mm}$$

multipliciren; man erhält sodann nach Stefan den Werth:

$$E = 34,336.$$

Nach den Messungen von Warburg²⁾ ergab sich, dass Quecksilber und Glas aneinander haften, dass also $E = \infty$ zu setzen sei. Der Werth von η beträgt nach ihm:

$$\eta = 1,571, \quad \text{für } \vartheta = 17^\circ.$$

1) Stefan, Wien. Ber. **46**. p. 504. 1862.

2) Warburg, Pogg. Ann. **140**. p. 367. 1870.

Die entwickelte Theorie gestattet, eine Prüfung vorzunehmen, ob die Flüssigkeit an der Scheibe haftet oder gleitet. Haftet die Flüssigkeit an der Scheibe, so soll für bedeutende Entfernungen c_1 nach § 5:

$$\mathfrak{A} = (a^2 + b^2)^3 + \alpha^4(a^2 - 3b^2) = 0$$

sein, wo $2ab = \pi/T_1$, $\alpha^4 = \pi^2/T^2$, $a^2 - b^2 = l$ ist; gleitet dagegen die Flüssigkeit an der Scheibe, so soll nach § 7:

$$\mathfrak{A} = (a^2 + b^2)^3 + \alpha^4(a^2 - 3b^2) > 0 \quad \text{sein.}$$

Ich beobachtete und berechnete folgende Daten:

M		T	T_1	l	\mathfrak{A}
Breslau	$10^{10} \cdot 1,5495$	17,123	17,428	0,003 391 9	0,000 019 7
Königsberg	$10^{10} \cdot 1,6832$	29,760	30,512	0,002 633 8	0,000 003 536

Hieraus berechnet sich nach den angegebenen Formeln:

$$\begin{array}{lll} \text{Breslau} & \text{für } \vartheta = 17,1^\circ \text{ C.} & \eta = 1,543 \quad E = 28,85 \\ \text{Königsberg} & \text{,, ,, } = 13,6^\circ \text{ C.} & \eta = 1,957 \quad E = 36,06. \end{array}$$

Hiernach scheint es, als ob die Reibung bei ganz reinem Quecksilber grösser ist als bei minder reinem. — Zweifellos übt auch hier die Oberfläche einen sehr erheblichen Einfluss auf das Decrement; allein man hat kein Mittel, diesen Einfluss zu schätzen oder zu eliminiren; daher hat hier die Maxwell'sche Methode nicht den Werth, den sie für haftende Flüssigkeiten besitzt. Auch sind die Formeln so complicirt, dass man zur Berechnung die Methode der kleinsten Quadrate nicht wohl anwenden kann. — Gleiten scheint übrigens nur bei ganz frischen Oberflächen stattzufinden; später klebt die Scheibe an der Flüssigkeit.

Schluss. In der vorliegenden Arbeit habe ich mich bemüht, zu zeigen, dass die Maxwell'sche Methode zur Bestimmung der Reibung der Flüssigkeiten verwandt werden kann, und dass die entwickelte Theorie mit der Erfahrung im Einklange sich befindet; dass ferner die Methode benutzt werden kann, den Einfluss der Oberfläche der Flüssigkeiten zu bestimmen. Die Experimente, welche ich über Reibung von Salzlösungen angestellt habe, theile ich noch nicht mit, weil mir Schlüsse über die Oberflächenspannung derselben,

die Veränderlichkeit der Reibung mit dem Salzgehalte, die Verhältnisse, welche bei Mischung derselben auftreten, nur dann gerechtfertigt erscheinen, wenn die Temperatur bei allen Lösungen dieselbe war. Hierzu aber muss der Apparat erst verändert werden.

Zum Schluss sage ich Hrn. Professor O. E. Meyer in Breslau, wie Hrn. Professor C. Pape in Königsberg für die Freundlichkeit, mit der sie mir die Instrumente zu Gebote stellten und ihren Rath ertheilten, meinen wärmsten Dank.

Königsberg im April 1882.

VIII. *Untersuchungen über die Volumenconstitution flüssiger Verbindungen; von H. Schröder.*

(Fortsetzung der in Wied. Ann. 11. p. 997–1016. 1880 und 14. p. 656 bis 670 vorgelegten Abhandlung.)

X. Ueber eine noch vorliegende theoretische Lücke und eine zweite mögliche Auffassung.

§ 70. In den Paragraphen 1 bis 16 und 22 bis 30 habe ich lediglich Thatsachen festgestellt, aus welchen sich für die Volumina beim Siedepunkt ergab, dass das Volumenmaass in allen Verbindungsgruppen mit dem Atomgewicht wächst, bei den Alkoholen und den Aldehyden der Normalreihe aber mit dem Atomgewicht abnimmt. Ebenso die Thatsache, dass die Gruppen CH_2 und OH_2 der Alkohole, und CH_2 und O_2 des Carboxyls der Säuren und Ester in jeder einzelnen Verbindung gleiche Raumerfüllung haben. Diese Thatsachen stehen fest.

Nun aber habe ich im § 31 dargelegt, dass, wenn man von dem mittleren beobachteten Volumen der Essigsäure das Volumen des Aethylaldehyds abzieht, für O in OH der Säure sich ein Rest ergibt, mit welchem die Volumina der Essigsäure und des Aldehyds selbst ohne Rest theilbar erscheinen.