

Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques*),

Par H. G. ZEUTHEN.

I. Projection stéréographique de la surface.

1. Dans un article, inséré dans les „Annalen“ vol. VII, p. 410, sur les formes des courbes planes du quatrième ordre, j'ai démontré qu'une courbe quartique sans points multiples a, à côté des tangentes communes à deux branches, quatre tangentes doubles dont tous les deux points de contact se trouvent sur la même branche ou sont imaginaires, et que les branches de la courbe se trouvent soit dans les quatre triangles, soit dans les trois quadrilatères, formés par ces quatre tangentes doubles, 1 ou 0, ou 2 dont l'une est interne à l'autre, dans chacune de ces parties du plan. J'appelais ces quatre tangentes doubles dont nous venons de parler tangentes doubles de première espèce, et les tangentes communes à deux branches, tangentes doubles de seconde espèce.

Grâce à la circonstance, dont M. Geiser a fait le premier des applications sérieuses, que le contour d'une surface cubique, projetée d'un point de la surface sur un plan, est une courbe quartique, je pouvais appliquer les propriétés des quartiques que j'avais trouvées à démontrer les théorèmes de M. Schläfli sur les nombres des droites et plans tangents triples réels des surfaces cubiques, et leur division en espèces qui en résulte. Je trouvais en même temps que les contours des surfaces de la 1^{re}, 2^{me}, 3^{me}, 4^{me} espèce**), sont composés de 4, 3, 2, 1 branches externes l'une à l'autre, et que celui d'une surface de la 5^{me} espèce, est composé de deux branches dont l'une est interne à l'autre si le centre de projection se trouve sur la nappe d'ordre impair, et qu'il n'existe pas s'il se trouve sur la nappe d'ordre pair.

2. Les derniers intéressants mémoires de MM. Schläfli***) et Klein†) sur les surfaces cubiques contiennent plusieurs autres résul-

*) Die diesen Aufsatz begleitende Figur findet man am Ende des Aufsatzes.
Anm. d. Red.

**) L'usage actuel des noms de 4^{me} et 5^{me} espèce, dont on se sert à présent ordinairement, est inverse à celui que j'en ai fait dans mon article précédent.

***) Annali di Matematica t. V.

†) Mathematische Annalen t. VI.

tats qu'il est facile de déduire, grâce à la représentation de ces surfaces dont je viens de parler, des propriétés des courbes quartiques. Appliquons par exemple ce procédé à démontrer *la transition d'une espèce à l'espèce suivante par une surface douée d'un point conique*. Il faut qu'au moment de transition le contour de la surface projetée d'un point d'elle-même ait un point double, à tangentes réelles ou imaginaires; car le nombre de branches du contour s'altère par la transition. Ce point double n'est pas un point de la trace du plan tangent au centre de projection; car dans ce cas, qui a lieu toutes les fois qu'une droite de la surface passe par le centre de projection, le contour aurait après la transition le même nombre de branches qu'avant elle. Or un point double du contour qui n'est pas placé sur la trace du plan tangent est nécessairement la projection d'un point conique de la surface; car la droite joignant le centre de projection au point double ne peut avoir deux contacts avec la surface cubique. Donc etc.

3. Avant d'appliquer la représentation de la surface, qui est une sorte de *projection stéréographique*, à d'autres exemples il sera commode de lui donner une forme plus déterminée. Je prends pour centre de projection un point de la surface où la courbure est elliptique, ce qui n'est impossible que dans un cas limite*), auquel il n'est pas nécessaire d'avoir égard dans la discussion générale. En effet, la courbe à courbure parabolique de la surface, déterminée par son intersection avec sa surface hessienne, a toujours des branches réelles, parce que l'hessienne contient des droites réelles (droites d'intersection des plans réels ou des plans imaginaires conjugués du pentaèdre), et qu'une droite rencontre toujours la surface donnée**).

Je prends pour plan de projection un plan parallèle au plan tangent au centre de projection. Alors le contour de la projection (*Übergangscurve*) sera une quartique ayant la droite à l'infini pour tangente double à contacts imaginaires, et, par conséquent, de première espèce; les autres tangentes doubles du contour sont les projections des droites de la surface. Un point du plan, externe aux branches fermées et finies dont le contour est composé, ou interne à deux branches (5^{me} espèce), représente *deux* points de la surface, pendant qu'un point interne à une seule branche n'en représente aucun point réel. La surface est donc représentée par deux feuilles planes et coïncidentes qui sont

*) La *surface diagonale* dont les propriétés conduisent M. Klein à celles des surfaces générales. Dans ce cas la courbe parabolique ne consiste qu'en points isolés.

***) On peut aussi prouver l'existence réelle de la courbe parabolique en montrant qu'il y a toujours sur la surface des droites à „points doubles“ réels. Voir le n° 5.

réunies par le contour. Nous appellerons *visible* la feuille qui représente la partie de la surface qui est rencontrée la première par des droites menées du centre de projection, dirigées du même côté, par rapport au plan tangent, où se trouvent les points de la surface voisins du centre de projection, et continuées, s'il est nécessaire, par l'infini jusqu'à leur retour au centre de projection. L'autre feuille est *invisible*.

Le centre de projection est le seul point „fondamental“ de la surface, c'est à dire point auquel correspondent tous les points d'une ligne : à ce point correspond la droite à l'infini de la feuille visible. Les courbes de la surface qui passent par le centre de projection sont donc les seules dont les projections s'étendent à l'infini sur la feuille visible. Le plan de projection ne contient aucun point fondamental, ce qui contribue à rendre notre représentation d'une surface cubique plus intuitive que les représentations sur des plans simples.

Ayant donné à la droite à l'infini dans le plan de projection un rôle particulier, nous pourrons parler des tangentes communes *externes* et *internes* de deux branches, dire qu'une droite *sépare* les branches etc.

Nous donnons sur une table suivant à cet article (p. 30) une image *schématique* de la représentation d'une surface de première espèce (à 27 droites). Il est indifférent, dans la plupart des recherches auxquelles nous appliquerons notre représentation, si les contacts des trois tangentes doubles de première espèce qui ne s'éloignent pas à l'infini sont réels ou imaginaires; dans notre figure tous ces contacts sont imaginaires. Les quatre branches du contour se réduisent donc à des ovales, qui doivent être renfermés dans les quatre triangles que forment les quatre tangentes doubles de première espèce. Les formes exactes de ces ovales étant indifférentes ici, nous les avons remplacés par des cercles. Les lignes pointées appartiennent à la feuille invisible*).

Si l'on veut avoir une image schématique de la représentation d'une surface de la deuxième espèce, il faut effacer un des ovales et les droites qui y sont tangentes. Toutefois il faut qu'on se rappelle, que dans ce cas les trois branches du contour peuvent se trouver dans les trois quadrilatères formés par les tangentes doubles de première espèce. On doit donc regarder comme indifférentes des altérations de la situation de l'une de ces tangentes doubles par rapport aux autres pourvu qu'elle garde sa situation par rapport aux ovales. Il est indifférent, pour cette raison, si l'on a effacé l'ovale interne ou un des trois ovales externes.

*) Les quatre branches correspondent dans nos recherches, à plusieurs égards, aux quatre points coniques de M. Klein, les trois droites représentées par des tangentes doubles de première espèce, aux droites qui ne sont pas arêtes du tétraèdre de ce savant.

On peut de même appliquer la figure de notre table à la discussion des propriétés des surfaces de la 3^{me} ou 4^{me} espèce, et de celles de la nappe d'ordre impair de la surface de la 5^{me} espèce.

II. Distribution des droites de la surface et des branches de sa courbe parabolique.

4. Nous avons dit que, dans notre représentation d'une surface cubique, les tangentes doubles du contour à l'exception de la droite à l'infini sont les projections des droites de la surface. Si leurs points de contact sont réels, elles y passent de l'une des deux feuilles à l'autre. Il suffit donc, pour trouver quels sont les segments visibles, de remarquer que les segments qui passent à l'infini sont invisibles, parce que les lignes passant à l'infini sur la feuille visible représentent des lignes de la surface qui passent par le centre de projection. Les tangentes doubles à contacts imaginaires (regardées comme des projections de droites de la surface) appartiennent en entier à la feuille invisible. Deux droites de la surface se rencontrent si le point d'intersection de leurs projections appartient, sur toutes ces deux droites, à la même feuille. En pointant les parties qui appartiennent à la feuille invisible, on peut voir *quelles sont les droites de la surface qui se rencontrent*.

Les propriétés des quartiques planes y fournissent un autre moyen. En effet, deux ou trois droites de la surface se trouvent dans le même plan tangent triple, si les points de contact de leurs projections avec le contour se trouvent sur une conique passant par les points de contact (imaginaires et à l'infini dans la représentation actuelle) de la trace du plan tangent à la surface au centre de projection. Cette conique est la projection de la courbe d'intersection du plan tangent triple avec la quadrique polaire du centre de projection. Or on sait (voir les nos 8 et 9 de mon article sur les formes des quartiques) que les points de contact de trois ou quatre tangentes doubles d'une quartique plane se trouvent sur une conique si leur situation ne le rend pas impossible d'une *manière visible*. Dans le cas actuel la conique, devant passer par deux points imaginaires à l'infini, est une ellipse. Donc, *deux ou trois droites de la surface se trouvent dans le même plan tritangent, si les points de contact de leurs projections forment des quadrilatères ou des hexagones convexes, y compris ceux où des sommets imaginaires se trouvent sur des droites qui ne séparent pas les sommets réels*.

5. On pourrait appliquer les règles du n° 4 à déduire de notre représentation les théorèmes connus sur les intersections des droites de la surface. Au lieu d'y insister, nous démontrerons ici plusieurs résultats dont M. Klein a obtenu ceux qui ont égard aux surfaces de

la première espèce*), par un procédé indirecte, en les cherchant pour une surface particulière (la surface diagonale), et en démontrant ensuite qu'ils ne sont pas altérés, tant que toutes les 27 droites restent réelles.

On sait qu'un plan quelconque par une des droites de la surface y est tangente en deux points, réels ou imaginaires, de la droite, et que la série des couples de points de contact est en involution. Les points d'intersection de la droite avec les deux autres droites d'un plan tangent triple passant par elle en forment un couple, et ses**) points de contact avec le contour, un autre. Les points doubles de l'involution sont imaginaires ou réels suivant que deux couples se séparent (dans le sens projectif de ce mot), ou non. Il n'est donc pas difficile de trouver, par notre représentation, les droites de la surface où ces points doubles sont réels, et celles où elles sont imaginaires.

Les points doubles des trois droites dont les projections sont des tangentes doubles de première espèce sont évidemment réels; car les points de contact de ces tangentes doubles, s'ils sont réels, interceptent un segment qui n'est rencontré par aucune des autres tangentes doubles.

Quant aux autres tangentes doubles, on voit que chacun des deux couples de tangentes communes à deux branches, l'externe et l'interne, représente un couple de droites de la surface qui se trouvent dans un plan passant par la droite représentée par la tangente double de première espèce qui ne sépare pas les deux branches. Une tangente commune externe rencontre cette tangente double et l'autre tangente commune externe en des points qui ne séparent pas ses points de contact; ses points doubles sont donc réels. Mais une tangente double interne rencontre la tangente double de première espèce et l'autre tangente commune interne en des points qui séparent les points de contact; ses points doubles sont donc imaginaires. Nous avons donc prouvé que les *tangentes communes internes représentent les droites dont les points doubles sont imaginaires*.

Il y a donc sur une surface cubique de la 1^{re}, 2^{me}, 3^{me}, 4^{me}, 5^{me} espèce 12, 6, 2, 0, 0 droites dont les points doubles sont imaginaires.

Si la surface est de la *première espèce*, les 12 droites à points doubles imaginaires se trouvent dans six plans qui passent deux à deux par les trois droites représentées par les tangentes doubles de première espèce; car pour chacune de celles-ci il y a deux couples de branches

*) Voir le § 11. du mémoire cité. M. Klein fait observer que son procédé est aussi applicable aux surfaces des autres espèces.

**) Où nous ne sommes pas exposés à causer des malentendus nous ne ferons aucune distinction des parties de la surface et de leurs projections.

du contour qu'elle ne sépare pas. On voit sans difficulté qu'il n'y a pas trois de ces 12 droites qui se trouvent dans le même plan tangent triple. On voit donc que *les droites à points doubles imaginaires d'une surface de la première espèce forment un double-six*. Comme ce double-six se distingue de tous les autres, il est naturel de le prendre pour base de la notation des droites de la surface ce que nous avons fait dans notre figure à la page 30*).

1	2	3	4	5	6
1'	2'	3'	4'	5'	6'

est le double-six dont il s'agit, pendant que les notations des autres droites sont composées de deux chiffres.

Les six droites à points doubles imaginaires d'une surface de la *deuxième espèce* se trouvent en trois plans passant par les trois droites d'un plan tangent triple. Elles seront *les 6 droites réelles de deux doubles-six imaginaires* (voir le n° 24).

Les *deux* droites à points doubles imaginaires d'une surface de la *troisième espèce* sont les deux droites de l'un des trois plans tangents triples qui passent par la septième droite réelle de la surface.

6. Il n'est pas difficile à présent de trouver la situation des différentes branches de la courbe parabolique. Commençons par les surfaces de la *première espèce*.

On sait que la courbure de la surface est hyperbolique en tous les points de ses droites, à l'exception des points doubles dont nous venons de parler, et que ces points doubles sont des points de contact avec la courbe parabolique. La courbure étant elliptique à notre centre de projection, il faut que la partie de la surface, décomposée par ses droites, où se trouve ce centre renferme une partie de la courbe parabolique. Le périmètre (fini ou infini) de cette partie de la surface a pour projection celui du triangle formé par les trois tangentes communes qui renferme toutes les branches du contour [les droites 14, 36, 52 de la figure], et sa propre projection se trouve en partie au dehors de ce dernier périmètre sur la feuille visible, et en partie au dedans de lui sur la feuille invisible. Nous appelons cette partie de la surface un *triangle*. Chacun de ses côtés contient un des points doubles, ou points de contact avec la courbe parabolique, dont nous avons parlé; car le segment interne intercepté sur une de ces droites par ses points de contact avec le contour n'est rencontré par aucune autre droite de la surface.

Comme le centre de projection n'est assujéti à d'autres conditions que celle de se trouver en un point où la courbure est elliptique, nous

*) Nous nous servons ici des mêmes notations que M. Klein.

voyons que toutes les parties de la surface qui contiennent des parties de la courbe parabolique sont des triangles, dont chaque côté a un contact avec cette courbe. Il s'ensuit que, réciproquement, tous les points doubles réels de la surface se trouvent sur les côtés de ces triangles. Puis, en observant que les parties du plan qui ont des côtés communs avec le triangle renfermant le centre de projection sont, suivant la figure, des pentagones [un de ces pentagones est dans notre figure limité par les droites 1', 2, 52, 36, 14], on voit qu'un segment contenant un des points doubles n'est côté que d'un seul des triangles, qui doit contenir, par conséquent, la branche de la courbe parabolique tangente au segment.

La partie de la courbe parabolique renfermée dans un des triangles est une seule branche d'ordre pair. En effet, une branche d'ordre impair serait coupée par le plan des côtés du triangle, et s'il y avait deux branches d'ordre pair on pourrait, évidemment, trouver des droites rencontrant cette partie de la surface en quatre points.

Selon le n° précédent 15 (= 27 — 12) droites ont des points doubles réels. Il y aura donc 30 points doubles, et le nombre des triangles qui nous occupent devient 10.

La courbe parabolique d'une surface cubique de la première espèce est composée de 10 branches d'ordre pair inscrites à 10 triangles formés par les droites de la surface.

7. Avant de chercher pour les autres espèces de surfaces cubiques les branches de la courbe parabolique nous continuerons l'étude de la décomposition de la surface de la première espèce par ses 27 droites.

Commençons par regarder les 20 parties attenantes aux 10 segments d'une droite à points doubles réels. Nous désignerons par a les deux segments où se trouvent ces points doubles, par b , les quatre qui y aboutissent, et par c , les quatre segments qui restent encore. Il suffit de regarder les parties de la surface attenantes à une seule suite de trois segments a, b, c ; car on peut projeter une quelconque de ces suites de manière que, dans notre représentation de la surface, le segment a ait pour projection un côté du triangle qui renferme les quatre branches du contour (par exemple son côté 36).

Nous savons déjà qu'un segment a est côté d'un triangle, dont les deux autres côtés sont aussi des segments a , et d'un pentagone. Les autres côtés de ce pentagone sont deux segments b et deux segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre des pentagones est donc égal à celui des segments a , ou égal à 30.

Un segment b est côté d'un pentagone et d'un tétragone, dont les autres côtés sont: un nouveau segment b , adjacent au premier, et deux segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre des seg-

ments b étant égal à 60, on trouve 30 de ces tétragones que nous appellerons *tétragones de première espèce*. [Exemple: la figure limitée par 36, 14, 1', 6.]

Un segment c est côté de deux tétragones, dont les autres côtés sont: un nouveau segment c , adjacent au premier, et deux segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre de ces tétragones, que nous appellerons *tétragones de la seconde espèce*, est égal à celui des segments c , ou à 60. [Exemple: la figure limitée par 36, 6, 1', 15.]

60 des côtés de nos 30 pentagones, 60 des côtés de nos 30 tétragones de première espèce et 120 des côtés de nos 60 tétragones de seconde espèce, sont des segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre total des segments de ces 12 droites étant 120, aucune des parties de la surface n'est limitée exclusivement de droites à points doubles imaginaires. Nous avons donc épuisé toutes ces parties.

Tous les segments d'une droite à points doubles imaginaires sont côtés de tétragones de seconde espèce, et elles sont en même temps soit côtés de pentagones (segments d), soit côtés de tétragones de première espèce (segments e). Chacun des 5 segments interceptés sur une de ces droites par les 5 autres droites à points doubles imaginaires qui la rencontrent, sépare deux tétragones de seconde espèce d'un pentagone et d'un tétragone de première espèce. Il est donc composé d'un segment d et d'un segment e ; mais l'ordre de ces deux segments, — ou celui du pentagone et du tétragone de première espèce qu'ils limitent — peut varier indépendamment de celui des autres segments d et e de la même droite, ce qu'on voit en faisant varier dans la figure les grandeurs des ovales. Au moment où se fait un changement de cet ordre un des triangles se réduit à zéro.

Les 27 droites d'une surface cubique de la première espèce la décomposent en 10 triangles circonscrits à la courbe parabolique (3 côtés a), en 30 pentagones (1 côté a , 2 côtés b , 2 côtés d), en 30 tétragones de première espèce (2 côtés b et 2 côtés e) et en 60 tétragones de seconde espèce (2 côtés c et 2 côtés d ou 2 côtés e ou 1 côté d et 1 côté e). Dans les pentagones les côtés b sont adjacents au côté a , dans les tétragones les côtés du même nom sont adjacents l'un à l'autre.

8. La décomposition de la surface de la *deuxième espèce* par ses 15 droites, et la composition de sa courbe parabolique, se trouvent de la même manière. Nous nous contenterons d'indiquer les résultats de cette recherche.

Soit a le nom des deux segments des 9 droites à points doubles réels qui contiennent ces points, et b celui des quatre autres segments des mêmes droites. Alors les deux a d'une droite sont séparés, dans tous les deux sens de la droite, par deux b . *Les 15 droites décomposent la*

surface en 6 triangles, circonscrits aux branches de la courbe parabolique, et ayant pour côtés 3 segments a , en 18 pentagones, ayant pour côtés 1 segment a et, adjacents à lui, 2 segments b , et en 18 tétragones, ayant pour côtés, adjacents l'un à l'autre, deux segments b . Les autres côtés des pentagones et des tétragones sont des segments des droites à points doubles imaginaires; on peut en trouver qui sont côtés communs à deux pentagones, à deux tétragones ou à un pentagone et un tétragone; mais cette distribution peut varier un peu. Un segment b est toujours côté commun à un pentagone et un tétragone.

9. Il y a sur une surface de la troisième espèce 1° une droite qui rencontre les six autres et dont les deux segments a , séparés dans tous les deux sens de la droite par deux autres b , contiennent des points doubles, 2° deux couples de droites se rencontrant, l'une l'autre, et rencontrant la première droite, et dont tous les deux segments c contiennent des points doubles, et 3° un couple de droites se rencontrant, l'une l'autre, et rencontrant la première droite, et à points doubles imaginaires (deux segments d). Ces droites ont respectivement pour projections dans notre représentation: 1° la tangente double de première espèce externe aux deux branches du contour, 2° le couple des deux autres tangentes doubles de première espèce et le couple des tangentes communes externes, 3° le couple des tangentes communes internes.

La partie de la surface où se trouve le centre de projection est un triangle limité par la première des droites énumérées et par celles qui ont pour projections les tangentes doubles externes, ou bien par un segment a et deux segments c . La surface contient 4 de ces triangles. Les segments c sont encore côtés de hexagones, limités 1° par deux segments c adjacents l'un à l'autre, 2° par deux segments b adjacents aux deux segments c , et 3° par deux segments d . On voit qu'une seule droite contient deux côtés (les segments b) de chacun de ces hexagones. Le nombre de ces hexagones est égal à 4.

Le centre de projection étant un point quelconque où la courbure est elliptique, on voit que les branches de la courbe parabolique se trouvent dans les 4 triangles, qu'elles touchent leurs côtés c , et que la branche renfermée dans l'une ou l'autre des deux triangles attenants au même segment a , est tangente à ce côté commun.

Les 7 droites d'une surface cubique de la troisième espèce la décomposent en 4 triangles (1 côté a , 2 côtés c), qui renferment les branches de la courbe parabolique, et dont les deux y sont circonscrits pendant que les périmètres des autres ne touchent les branches qui s'y trouvent qu'en deux points (sur les côtés c), et en 4 hexagones (2 côtés c , 2 côtés b et 2 côtés d).

10. Quant à la surface de la quatrième espèce, et à la nappe d'ordre

impair de la surface de la cinquième espèce, on voit sans difficulté que leurs 3 droites les divisent en 3 triangles qui renferment des branches de la courbe parabolique, et que chaque segment d'une droite est une fois tangente à cette courbe. — La courbure est elliptique en tous les points de la nappe d'ordre pair d'une surface de la 5^{me} espèce.

11. Si le centre de projection se meut sur toute la surface — et non seulement sur les parties où la courbure est elliptique — il est clair que la tangente double, trace du plan tangent au centre de projection, reste de la même espèce, tant que ce centre ne franchit aucune droite de la surface. Or elle est de la première espèce si la courbure est elliptique au centre de projection, et elle sera de la seconde espèce si le centre de projection est voisin d'une droite à points doubles imaginaires; car le contour aura un point isolé si le centre se trouve sur une de ces droites. On voit donc que *le contour de la surface, projetée d'un de ses points O, aura la trace du plan tangent en O pour tangente double de première espèce si O se trouve dans un des triangles qui renferment les branches de la courbe parabolique, mais pour tangente double de seconde espèce s'il se trouve dans une des autres parties de la surface.*

Si nous prenons, dans tous les cas, un plan de projection parallèle au plan tangent, le contour aura, pour un centre de projection placé sur la partie hyperbolique d'un des triangles, une branche qui se décompose en deux parties réunies par des points de contact avec la droite à l'infini, et, pour un centre de projection placé sur une autre des parties de la surface, deux branches paraboliques. Si nous regardons toujours comme visibles les points de la surface qui sont rencontrés les premiers par des droites menées par le centre de projection, et dirigées d'un côté déterminé par rapport au plan de projection, les points de contact avec le contour intercepteront sur la droite à l'infini deux segments: les points visibles de l'un seront les projections de points coïncidents avec le centre de projection, ceux de l'autre seront les projections d'autres points de la courbe d'intersection de la surface avec le plan tangent. Il faut donc pointer, dans la projection des droites de la surface, les segments qui rencontrent le premier des deux segments de la droite à l'infini, et non pas ceux qui en rencontrent le second.

III. Étude particulière des surfaces à 27 droites réelles.

12. Nous avons dit que nous prenons pour base de la notation des droites d'une surface de la première espèce le double-six composé des droites à points doubles imaginaires. Le périmètre d'un des 10 triangles de la surface est composé exclusivement de segments de droi-

tes à points doubles réels qui se trouvent dans un plan tangent triple. Ces 15 droites, dont les notations sont composées de deux chiffres, forment encore, à elles seules, 5 plans tangents triples, qui n'ont pas la propriété indiquée. Il sera utile d'avoir égard à cette différence dans la distribution des chiffres 1, 2, 6 aux couples du double-six fondamental.

Si l'on place les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans leur ordre naturel sur une circonférence, les 15 groupes de trois cordes qui n'ont aucun bout commun appartiennent aux 5 classes suivantes:

2 groupes sont composés de cordes qui soustendent des arcs de $\frac{\pi}{3}$;

3 groupes sont composés d'un diamètre et de deux cordes, perpendiculaires à lui, qui soustendent des arcs de $\frac{2\pi}{3}$;

1 groupe est composé de trois diamètres;

6 groupes sont composés de deux cordes qui soustendent des arcs de $\frac{2\pi}{3}$, et d'une corde qui soustend un arc de $\frac{\pi}{3}$;

3 groupes sont composés d'un diamètre et de deux cordes, parallèles à lui, qui soustendent des arcs de $\frac{\pi}{3}$.

On peut obtenir que les cinq groupes appartenant aux deux premières classes

12, 34, 56 ou *A*,

16, 32, 54 ou *B*, et

14, 26, 53 ou *C*,

36, 42, 15 ou *D*,

52, 64, 31 ou *E*,

représentent des droites de la surface qui se trouvent en des plans tangents triples sans limiter des triangles de la surface, et que les autres dix groupes représentent les côtés des triangles de la surface. Alors la différence des deux premières classes de groupes entre elles; ainsi que celles des trois dernières classes, n'appartiennent pas à la surface, mais seulement au point de vue d'où elle est projetée dans la figure. Il est naturel de choisir pour notation du triangle où se trouve le centre de projection le groupe isolé

14, 36, 52 ;

alors les triangles désignés par des groupes de notations appartenant à une même classe présenteront une symétrie, qui est plus complète qu'elle ne semble au premier abord, ce que nous verrons dans le n° suivant.

La figure (p. 30) montre la possibilité du système de notations que nous avons demandé. En effet, il suffit de donner aux tangentes internes communes à la branche interne et aux branches externes les noms de 1 et 2', 3 et 4', 5 et 6'. Alors les tangentes internes communes aux

deux autres branches externes auront, respectivement, les noms de 1' et 2, 3' et 4, 5' et 6, etc. (Voir la figure.)

13. Nous ne devons pas regarder comme essentielles les différences des droites et des triangles qui se remplaceront entre eux dans le cas où le triangle 14, 36, 52 où se trouve le centre de projection, après s'être réduit à zéro, tourne sa convexité du côté opposé, ce qui aura lieu en même temps que, par une déformation de la surface, un des sommets du triangle franchit le côté opposé. [On s'imagine, au moyen de la figure, sans difficulté la déformation analogue d'un autre triangle de la surface, par exemple du triangle 54, 26, 31, et de ses alentours.]

Au moment de transition le contour de la surface se réduira à une courbe composée de la droite à l'infini et d'une cubique, dont les asymptotes seront parallèles aux droites 14, 36, 52 de la surface. Les trois branches externes du contour formeront la branche d'ordre impair de la cubique, et la branche interne sera son ovale. Les projections des droites 14, 36, 52 coïncideront avec la droite à l'infini, pendant que les projections des autres droites de la surface se confondront, deux à deux, dans les douze tangentes de la cubique qui sont parallèles à ses asymptotes: deux droites qui se trouvent dans un plan tangent triple passant par une des droites 14, 36, 52 auront la même projection.

On forme les notations de deux droites qui se couvrent ainsi, l'une de l'autre, en substituant à

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4' & 5' & 6' & 1' & 2' & 3', \end{array}$$

et réciproquement.

Comme la distinction des parties visibles et invisibles de la surface dépend du sens de la concavité, qui change par la transition dont il s'agit, on voit que les droites et les triangles qui se couvrent au moment de transition vont changer de rôle. Les tangentes doubles de la première espèce

$$12, 34, 56$$

du plan tangent triple *A*, prendront les places des tangentes communes externes des trois branches externes qui se trouvent de leur côté interne:

$$45, 61, 23$$

du plan tangent triple *B*. En même temps, chacun des trois autres plans tangents triples que nous avons énumérés dans le n° précédent garde sa situation, et il ne s'y fera qu'un changement de deux de ses droites.

14. Avant d'énumérer les dix triangles de la surface, nous étudierons quelques propriétés rendues visibles par la figure.

On aperçoit que les douze tangentes communes à une des branches du contour et aux trois autres forment un double-six. On trouve par exemple pour la branche interne les droites suivantes

$$1, 3, 5, 46, 62, 24, \\ 35, 51, 13, 2', 4', 6',$$

qui forment un double-six que nous appellerons (avec M. Klein) 135, et, pour les branches externes avec des notations analogues, les doubles-six 524, 146, 362.

Un point interne à une branche est projeté par une droite qui ne rencontre la surface qu'au centre de projection : les branches du contour entourent donc *quatre ouvertures* de la surface qui se présentent à notre point de vue, et nous voyons que la partie de la surface qui entoure une des ouvertures contient des parties de toutes les droites d'un double-six*). Nous désignerons chaque ouverture par le nom du double-six qui l'entoure. On peut indiquer des limites assez naturelles de ces parties de la surface et des droites, en profitant des cinq plans tangents triples dont nous avons parlé dans le n° 12. On voit, par exemple, que les périmètres de l'un des triangles plans formés des droites 12, 34, 56, et de l'un des triangles formés des droites 16, 32, 54 (ceux qui ne sont pas rencontrés par le plan de l'autre), limitent une partie de la surface qui contient des segments des droites du double-six 135, et non pas des autres droites de la surface, et qui entoure l'ouverture 135. Nous appellerons cette partie de la surface la *paroi* de l'ouverture, et nous dirons que les deux triangles *ferment* l'ouverture. — On verra, dans ce qui suit, que les autres ouvertures sont limitées d'une manière analogue.

Une droite, ou une branche d'une courbe, *passé par une ouverture* si elle y entre par l'un et sort par l'autre des deux triangles qui la ferment, sans en rencontrer la paroi.

Une ouverture est visible de chaque point de la surface d'où sortent des droites qui ne rencontrent pas la surface en plusieurs points, et qui sont entourées d'une partie (du moins) de la paroi de l'ouverture. Cela peut avoir lieu si le point se trouve sur la paroi de l'ouverture; s'il ne s'y trouve pas on peut mener par le point des droites passant par l'ouverture. Du centre de projection de notre figure sortent des droites passant par l'ouverture 135; mais nous verrons (dans le n° 16, 8) que le centre de projection se trouve sur les parois des autres ouvertures visibles que nous avons nommées: 524, 146, 362.

La branche du contour qui entoure l'ouverture 135 se trouve, dans

*) M. Klein a indiqué dans son mémoire déjà cité que la surface a dix ouvertures — ce que nous allons montrer aussi — et que chacune d'elles est entourée des droites d'un double-six.

notre figure, en entier sur la paroi de cette ouverture, parce que nous n'y avons donné des contacts réels à aucune des tangentes doubles de première espèce. Si une de ces tangentes avait eu des contacts réels avec la branche 135, l'arc rentrant de cette branche ne se trouverait plus sur cette paroi. Nous dirons que le *contour d'une ouverture est visible* d'un point de la surface, si une branche du contour de la surface, projeté de ce point, se trouve, à ses arcs rentrants près, sur la paroi de l'ouverture. Les contours des ouvertures 135, 524, 146 et 362 sont visibles dans notre figure, ce qu'on voit en regardant les limites de la paroi de l'ouverture 135, que nous avons déjà nommées, et celles des parois de 524, 146 et 362 que nous nommerons dans le n° suivant.

On voit par la figure que les droites dont les projections séparent la branche interne du contour d'une de ses branches externes forment un double-six entourant une ouverture de la surface, qui se trouve entre sa partie visible et sa partie invisible. Les trois ouvertures (doubles-six) qu'on trouve ainsi sont:

354 entre 135 et 524,
516 entre 135 et 146,
132 entre 135 et 362.

En appliquant ensuite à la surface la déformation dont nous avons parlé dans le n° 13, on aperçoit encore trois ouvertures. Cette déformation substituera au double-six abc qui contient aussi les droites $d'e'f'$ le double-six $d_1e_1f_1$, où $d_1 \equiv d + 3 \pmod{6}$ etc. Cette substitution n'altère pas les doubles-six 135, 354, 516, 132; car l'ordre des chiffres qui forment une de ces notations est indifférente; mais les doubles-six

524, 146, 362
seront remplacés par
364, 526, 142.

Ces derniers doubles-six entoureront donc, du moins après la déformation, des ouvertures visibles du centre de projection. Au moment de transition les droites des deux doubles-six 146 et 526 se couvrent, et en même temps les deux ouvertures du même nom coïncident sans disparaître ou devenir invisibles. Il est donc clair, que toutes les deux ouvertures sont visibles soit avant, soit après la transition. [Dans notre figure (526) représente une branche de courbe d'ordre pair qui entoure l'ouverture 526.] Comme, dans la figure, la branche 146 du contour est tangente à plusieurs droites qui n'appartiennent ni au double-six 526, ni aux limites de l'ouverture 526, il est évident, que le contour de cette ouverture n'est pas visible avant la transition dont nous avons parlé. Il le devient après la transition en même temps que celui de 146 cesse d'être visible. Les mêmes remarques s'appliquent aux couples d'ouvertures 362 et 142, 524 et 364.

En résumé, la surface a 10 ouvertures entourées de doubles-six :
l'ouverture

135,

et les trois couples d'ouvertures

524 et 364, 146 et 526, 362 et 142,

sont visibles d'un point du triangle de la surface*) limité par

14, 36, 52,

les ouvertures

354, 516, 132,

invisibles.

Le contour de l'ouverture 135, et ceux de l'un ou l'autre des deux triples d'ouvertures 524, 146, 362 et 364, 526, 142, sont visibles.

Nous dirons que l'ouverture 135 est opposée au triangle que nous venons de nommer. Elle est fermée de triangles formées des droites

12, 34, 56

16, 32, 54

La figure montre que la paroi de l'ouverture 135 contient 9 points d'intersection de droites à points doubles imaginaires. Or, chacun de ces points est sommet commun à deux tétragones de la seconde espèce et à deux autres polygones de la surface, qui peuvent être — suivant la situation des triangles de la surface — des pentagones ou des tétragones de la première espèce (voir le n° 7). L'ouverture 135 pouvant être remplacée par une ouverture quelconque de la surface — ce que nous verrons dans le n° suivant — nous voyons que la paroi d'une ouverture est composée de 18 tétragones de la seconde espèce et de

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 triangles

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 pentagones

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6 tétragones de la première esp. } 18 pentag. et tétrag. de la 1^{re} esp.

15. Les propriétés des 10 ouvertures, et leurs relations entre elles et avec les 10 triangles de la surface, se déduisent à présent par de simples substitutions. Remarquons que les chiffres 1, 3 et 5 que nous avons écrits les premiers dans les notations 14, 36 et 52 des côtés du triangle où se trouve notre point de vue, forment celle de l'ouverture 135 opposée à ce triangle, et que les noms des autres ouvertures visibles sont composés de celui d'un côté et du dernier chiffre d'un autre côté. Le triangle que nous avons regardé étant un quelconque des dix triangles de la surface, il faut qu'on retrouve partout ces mêmes propriétés. Regardons par exemple le triangle 15, 32, 64. Au nombre de ses ouvertures visibles (mais non pas opposées) appartiendront 516, 364 et 132, de façon que les chiffres 1, 3 et 6 doivent être les derniers

*) Aussi d'un point où la courbure est hyperbolique (voir le n° 11).

dans les noms des côtés du triangle. L'ordre des côtés du triangle n'ayant aucune signification*), on peut déduire les résultats qui ont rapport au triangle 51, 23, 46 de ceux qui ont rapport au triangle 14, 36, 52 en substituant

aux chiffres 1 2 3 4 5 6
les chiffres suivants 5 6 2 1 4 3.

On obtiendrait les mêmes résultats par la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ qui correspond à un autre ordre des côtés du nouveau triangle. Des applications successives de cette dernière substitution et de la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, qui correspond à une permutation des côtés du triangle 14, 36, 52, pourraient conduire aux résultats qui ont rapport à tous les triangles de la surface.

Les résultats sont consignés dans la table suivante :

Triangle	Ouverture opposée	Couples d'ouvertures visibles			Ouvertures invisibles	Triangles fermant l'ouverture opposée
14, 36, 52	135	524 364	146 526	362 142	354, 516, 132	12, 34, 56 (A) 16, 32, 54 (B)
51, 23, 46	524	461 231	513 463	236 516	241, 453, 526	56, 21, 43 (A) 53, 26, 41 (C)
13, 45, 62	146	623 453	135 625	452 132	463, 615, 142	12, 43, 65 (A) 15, 42, 63 (D)
35, 61, 24	362	245 615	351 241	614 354	625, 231, 364	34, 65, 21 (A) 31, 64, 25 (E)
31, 65, 42	364	421 651	315 425	652 312	641, 435, 362	32, 61, 45 (B) 35, 62, 41 (C)
53, 21, 64	526	643 213	531 641	214 534	263, 651, 524	54, 23, 61 (B) 51, 24, 63 (D)
15, 43, 26	142	265 435	153 263	436 156	425, 213, 146	16, 45, 23 (B) 13, 46, 25 (E)
32, 56, 41	354	412 562	326 416	561 321	542, 436, 351	31, 52, 46 (E) 36, 51, 42 (D)
54, 12, 63	516	634 124	542 632	123 543	164, 652, 513	53, 14, 62 (C) 52, 13, 64 (E)
16, 34, 25	132	256 346	164 254	345 165	326, 214, 135	15, 36, 24 (D) 14, 35, 26 (C)

*) On aurait pu s'en servir pour indiquer le sens de la convexité du triangle de la surface, en donnant aux côtés l'ordre dans lequel ils se suivent vis d'un

Les ouvertures visibles énumérées dans la même ligne horizontale ont à la fois des contours visibles.

L'ordre des trois chiffres qui composent la notation d'une ouverture, et celui des trois côtés d'un triangle, sont indifférents. Mais l'ordre des deux chiffres qui composent la notation d'une droite nous fournit un moyen de distinguer, dans la dernière colonne, les quatre triangles d'un seul plan tangent triple, l'un de l'autre. En effet, chacune des droites du plan est décomposée par les deux autres en deux segments qu'on peut désigner différemment (par 12 et 21 etc.). Alors si 12, 34, 56 est un des quatre triangles du plan A , 12, 43, 65 en est celui dont le périmètre est composée du côté 12 du premier triangle et des segments supplémentaires à ses deux autres côtés etc. La figure nous montre qu'avec ces significations des notations la dernière colonne indique d'une manière juste, non seulement les plans fermant les ouvertures, mais aussi les triangles de ces plans.

16. La table du n° précédent nous montre qu'une ouverture donnée n'a pas les mêmes relations avec toutes les autres ouvertures, mais que celles-ci se divisent en deux classes: *six* dont les notations contiennent un seul des chiffres de celle de l'ouverture donnée, et *trois* dont les notations en contiennent deux. Nous commencerons par indiquer les *relations de deux ouvertures dont les notations ont un seul chiffre commun*. La table et les explications du n° 14. nous en montrent une partie, la figure, où, à cause de la symétrie 10-tuple de la surface, il suffit de regarder les deux ouvertures: 135 et 524, les autres.

1°. L'une des ouvertures est visible du triangle opposé à l'autre.

2°. Elles forment par rapport à un des triangles de la surface un couple d'ouvertures visibles.

3°. Il y a encore deux triangles d'où elles sont visibles toutes deux. Alors, leurs contours sont visibles tous deux, ou aucun des contours n'est visibles.

4°. Il y a quatre triangles d'où l'une est visible, l'autre invisible. Chacune d'elles est visible des deux de ces triangles.

5°. Il y a un triangle d'où aucune d'elles n'est visible.

6°. *Un des triangles fermants de l'une est formé des mêmes droites que l'un des triangles fermants de l'autre. Dans le voisinage du côté commun à ces triangles, les deux ouvertures se trouvent de différents côtés, soit du plan, soit de la surface.*

point de ce triangle, le sens de rotation étant le même pour tous les triangles. Nous n'avons pas cet égard dans notre table.

7°. *Les parois des deux ouvertures ont en commun une partie de la surface, composée de 2 tétragones de la seconde espèce*) et de*

0, 1, 2 triangles

0, 1, 2 pentagones

2, 1, 0 tétragones de la première espèce } 2 pent. et tétr. de la première esp.

Les deux ouvertures se trouvent du même côté de cette paroi commune.

8°. Un des côtés du triangle opposé à l'une des ouvertures est une partie d'un côté d'un triangle fermant l'autre ouverture (de celui qui ne se trouve pas dans le même plan qu'un triangle fermant la première ouverture). Suivant que le triangle opposé à la première ouverture se trouve de l'un ou de l'autre côté de cette droite, il appartient à la paroi de la seconde ouverture, ou non. Le triangle opposé à l'ouverture 135 se trouve, dans notre figure, sur la paroi de 524, mais non pas sur celle de 364. On voit donc que les droites sortant d'un triangle passent seulement par l'ouverture opposée et par les trois ouvertures visibles dont les contours ne sont pas visibles.

17°. Regardons ensuite les relations de deux ouvertures dont les notations ont deux chiffres communs. 135 et 354 peuvent servir d'exemples.

1°. Chacune des deux ouvertures est invisible du triangle opposé à l'autre.

2°. Il y a encore quatre triangles d'où l'une est visible, l'autre, invisible. Chacune est visible de deux de ces triangles.

3°. Il y a quatre triangles d'où elles sont visibles toutes deux. Alors le contour d'une seule d'elles est visible.

4°. *Les parois des deux ouvertures ont en commun une partie de la surface composée de 8 tétragones de la seconde espèce, de 4 pentagones et de 4 tétragones de la première espèce. Cette paroi commune sépare les deux ouvertures.*

18. On voit en regardant un polygone de chaque espèce**) sur la surface que toute partie de la surface appartient aux parois de trois ouvertures différentes. Les trois ouvertures attenantes à un triangle se trouvent du même côté de cette figure, pendant qu'un tétragone ou pentagone sépare deux des ouvertures attenantes à lui de la troisième. Deux ouvertures qui se trouvent du même côté d'une paroi commune n'ont, dans leurs notations, qu'un chiffre commun : les relations exposées dans

*) On voit, en effet, qu'un seul point d'intersection de droites à points doubles imaginaires se trouve sur la paroi commune.

**) Nous avons déjà vu que le triangle 14, 36, 52 appartient aux parois des ouvertures 146, 362, 524 qui se trouvent du même côté du triangle. Le pentagone 1', 2, 25, 36, 14 et le tétragone de seconde espèce 1', 2, 26, 14 sépare l'ouverture 526 des ouvertures 524 et 362. Les tétragones de première espèce se comportent comme les pentagones.

le n° 16. ont donc lieu entre elles. Deux ouvertures séparées par une paroi commune ont, dans leurs notations, deux chiffres communs: les relations du n° 17. ont donc lieu entre elles. [Voir 16, 7 et 17, 4.]

19. Il est utile de construire aussi des représentations (projections stéréographiques) de la surface vue d'un point, d'un tétragone ou pentagone. Grâce à la symétrie de ses propriétés il suffit de placer le centre de projection sur une seule figure de chaque espèce, et nous pourrons même négliger le cas où il se trouve sur un tétragone de première espèce, qui ne diffère pas essentiellement de celui où il se trouve sur un pentagone. En effet, l'une de ces figures se transforme en l'autre, par une légère altération de la situation d'une droite, qui ne change pas le contour.

Nous avons indiqué dans le n° 11 comment on distingue dans ces cas les parties visibles des parties invisibles. Il n'est pas difficile de construire les figures (schématiques), ni non plus de retrouver les droites de la figure originaire.

Soit premièrement le centre de projection placé dans le pentagone dont les côtés sont des segments des droites 1', 2, 25, 36, 14. Alors nous savons (voir le n° 11.) que le contour sera composé de quatre branches dont les deux sont paraboliques, pendant que les deux autres ne s'étendent pas à l'infini. L'une de celles-ci sera tangente aux droites du double-six 146, l'autre à celles du double-six 135; nous les appellerons 146 et 135. L'une des branches paraboliques est tangente aux droites 2, 13, 5, 16, 4, 1', 12, 3, 15, 6, 14, l'autre aux droites 1', 26, 4', 23, 5', 2, 12, 6' 24, 3', 25. Nous avons donc indiqué quelles sont les 23 tangentes doubles de la seconde espèce (la droite à l'infini, trace du plan tangent au centre de projection, en est le 24^{me}), et à quelles branches elles sont tangentes. Nous y ajouterons que les droites du double-six fondamental, marquées de chiffres simples, sont encore les tangentes communes internes, et que la branche 135 est encore placée du côté interne de toutes les tangentes communes aux autres branches. Les tangentes doubles de la première espèce sont les droites 34 et 56, qui séparent et les branches 135 et 146, et les deux branches paraboliques, la droite 45, qui sépare les branches 135 et 146 des deux branches paraboliques, et la droite 36, qui est placée au dehors de toutes les branches.

Le point d'intersection des droites 14 et 25 se trouve du même côté de la droite 36 que les branches du contour: s'il franchit cette droite le pentagone où se trouve le centre de projection se transformera en un tétragone de la première espèce.

Le centre de projection se trouve (voir le n° 18.) sur la paroi commune aux ouvertures 526, 524 et 362, qui en sépare les deux dernières

de la première. Les droites par le centre de projection ne peuvent donc passer par ces ouvertures quant même elles soient „visibles“. Les droites joignant le centre de projection à des points internes aux branches 146 et 135 passent, respectivement, par les ouvertures des mêmes noms; celles qui le joignent à des points internes à l'une ou l'autre des branches paraboliques passent par l'une ou l'autre des ouvertures 364 et 142. Les ouvertures 156, entre les branches 146 et 135, et 534 et 312 entre la branche 135 et les branches paraboliques, sont invisibles, comme dans le cas où le centre de projection se trouvait dans le triangle 14, 36, 52.

20. Prenons ensuite pour centre de projection un point du tétra-gone de seconde espèce limité par les droites 1', 2, 26, 14. Alors, comme dans le cas précédent, le contour sera composé de deux branches tangentes, respectivement, aux droites du double-six 146 et à ceux du double-six 135, et de deux branches paraboliques tangentes, respectivement, aux droites 2, 13, 5, 16, 4, 1', 12, 3, 15, 6, 14, et aux droites 1', 25, 3', 24, 6', 2, 12, 5', 23, 4', 26. Seulement les ordres des points de contact ont subi à quelques petites modifications*). Celles-ci résultent d'une altération des situations des branches, dont aucune ne se trouve plus du côté interne à toutes les tangentes communes aux autres. Au contraire, la branche 135 a à présent par rapport à l'une des branches paraboliques la même situation, que la branche 146, par rapport à l'autre.

Les tangentes doubles de première espèce sont encore les droites 34, 56, 45 et 36; mais à présent 45 et 36 séparent les deux branches paraboliques, 34 et 56, les deux branches 146 et 135; 36 et 34 séparent 146 de l'une des branches paraboliques, et 45 et 56 séparent 135 de l'autre.

Le centre de projection se trouve encore sur les parois des ouvertures 526, 524 et 362. Les droites joignant le centre de projection à des points internes à la branche 146 ou 135, passent par l'ouverture du même nom, et celles qui le joignent à des points internes à l'une ou l'autre des branches paraboliques passent par l'une ou l'autre des ouvertures 534 et 142. (Dans le cas précédent il était par les ouvertures 364 et 142.) L'ouverture 156 entre les branches 146 et 135, l'ouverture 364 entre la branche 146 et l'une des branches paraboliques, et l'ouverture 123 entre la branche 135 et l'autre branche parabolique, sont invisibles.

*) Pour les branches paraboliques nous avons indiqué ces ordres, en commençant et finissant par les tangentes dont les points de contact sont voisins de ceux de la droite à l'infini.

21. Il n'est pas difficile à présent de s'imaginer les transitions des figures qui ont lieu lorsque le centre de projection franchit une des droites de la surface. Au moment de transition le contour présente un point double, à branches réelles si la droite a des points doubles réels, et à branches imaginaires si elle est une des droites du double-six fondamental.

Regardons par exemple la transition qui aura lieu si le centre de projection se meut du triangle 14, 36, 52 (cas de notre figure) au pentagone 1', 2, 52, 36, 14 (position discutée dans le n° 19.). Au moment de transition les deux branches 524 et 362, dont l'une a obtenu déjà avant la transition des contacts réels avec la droite à l'infini, sont liées l'une à l'autre par un point double à l'infini. La projection de la droite 36 coïncide avec la droite à l'infini et va devenir ensuite tangente double de la première espèce, pendant que la droite à l'infini va devenir tangente commune à deux branches. De même les projections de 12 et 45 coïncident et vont changer de rôle. Les projections des droites

$$3', 6', 24, 25$$

coïncident avec celles de

$$6, 3, 15, 14,$$

et leurs contacts vont se transporter de l'une branche à l'autre. Les deux collections de droites joignant le centre de projection aux points internes aux deux branches passent, avant et après la transition, par les ouvertures 364 et 142, et elles sont aussi séparées pendant la transition*): la seule droite 36 en est une position limite commune. Les droites qui passaient, avant la transition, par l'ouverture 526 vont être remplacées par des droites passant par l'ouverture 146, pour la seule raison que le point de la surface d'où partent les droites se meut de la paroi de l'ouverture 146 à celle de 526.

Les transitions qui ont lieu lorsque le centre de projection franchit d'autres segments de droites à points doubles réels sont semblables à celle dont nous venons de parler: la projection de la droite dont il s'agit change de rôle avec la droite à l'infini, les deux branches qu'elle touche changent de caractère, et les quatre collections de droites qui ne rencontrent pas ultérieurement la surface restent séparées. Si le segment franchi est — comme dans le cas discuté — un segment a [notation du n° 7.], qui sépare un triangle d'un pentagone, ou un segment b , qui sépare un pentagone d'un tétragone de la première espèce,

*) En effet, le segment de 36 qui appartient à la paroi de l'ouverture 364 est limitée par les droites 14 et 45, et celui qui appartient à celle de 142, par 45 et 25, et ces ouvertures se trouvent dans le voisinage de 45 de côtés différents de la surface.

[Le segment de 41 qui est côté commun au pentagone 1', 2', 52, 36, 14 et au tétragone 1', 6, 36, 14 peut servir d'exemple], l'une des deux ouvertures dont les parois sont séparées par le segment [524 et 364 dans l'exemple que nous venons de nommer] est visible de la figure placée sur la paroi de l'autre, et alors une des quatre collections de droites va passer par une nouvelle ouverture. Mais ce changement n'aura pas lieu, si le segment franchi est un segment c , parce que, d'un point de l'un des deux tétragones de la seconde espèce que sépare ce segment, l'ouverture dont la paroi est séparée de ce tétragone par le même segment n'est pas visible. [Le segment de 41 qui sépare le tétragone 1', 2, 26, 14 du tétragone 1', 6, 26, 14 peut servir d'exemple. En effet, nous avons vu, dans le n° 20., que l'ouverture 364 n'est pas visible du premier de ces tétragones.]

Regardons ensuite la transition qui aura lieu si le centre de projection se meut du pentagone 1', 2, 52, 36, 14 (position discutée dans le n° 19.) au tétragone 1', 2, 26, 14 (position discutée dans le n° 20.), en franchissant la droite à points doubles imaginaires 1'. Au moment de transition la branche parabolique tangente à 2, 13, 5 etc. se réduit à un point isolé à l'infini. La projection de la droite 1' coïncide avec la droite à l'infini, les projections des droites

2, 3, 4, 5, 6,

avec celles de

12, 13, 14, 15, 16.

Après la transition une nouvelle branche parabolique, tangente aux mêmes droites que celle qui a disparu, commence à paraître au coin opposé du plan. Les droites qui, avant la transition, joignent le centre de projection aux points internes à la branche qui va disparaître passent par l'ouverture 364, celles qui, après la transition, le joignent aux points internes à la nouvelle branche passent par l'ouverture 534. Au moment de transition, chacune de ces collections se réduit à la seule droite 1'. La transition n'établit donc aucune connexion des deux collections. Les trois autres collections qui ne rencontrent la surface qu'au centre de projection passent après la transition par les mêmes ouvertures qu'avant elle. Les autres cas où le centre de projection franchit une droite à points doubles imaginaires ne diffèrent pas essentiellement de celui dont nous venons de parler.

22. Les discussions précédentes contiennent la démonstration de quelques-unes des propriétés des droites qui rencontrent la surface en un seul point. Leur généralité est prouvée par la circonstance que nous avons eu égard à toutes les positions possibles du centre de projection sur la surface.

1°. Toute droite rencontrant la surface en un seul point passe par

une seule de ses dix ouvertures. On aura ainsi une division de ces droites en dix collections (d'une infinité quadruple).

2°. En un point quelconque de la surface passent des droites de quatre de ces dix collections — de trois, dans le cas particulier où le point se trouve sur une des douze droites à points doubles imaginaires.

3°. La collection passant par une ouverture n'est en connexion qu'avec celles qui passent par les six ouvertures dont les noms contiennent un seul des chiffres de celui de la première collection. Elles en est séparée par six complexes*) de droites rencontrant des parties des segments qui séparent les parois des ouvertures. Chacune de ces parties est composée d'un segment a et de deux segments b , ou bien, elle est interceptée par deux droites à points doubles imaginaires [voir le n° 21.].

Les 30 complexes qui séparent les dix collections de droites étant séparés entre eux, nous pourrions trouver le nombre qui exprime la connexion de la collection totale des droites qui ne rencontrent la surface qu'en un seul point, en nous demandant combien il faut de ces complexes pour lui donner une connexion simple.

Nous pouvons former plusieurs suites cycliques de 5 collections dont chacune n'est en connexion qu'avec la précédente et avec la consécutive. Les collections des ouvertures

524, 135, 526, 354, 516

en font, par exemple, une. On peut interrompre cette suite cyclique par un complexe — par celui, par exemple, qui sépare la dernière collection de la première — sans décomposer par cela la collection totale. Pour lier une des 5 autres collections à cette suite, sans établir de nouvelles connexions, il faut qu'on garde une seule de ses connexions avec les collections de la suite. Le nombre des connexions à garder est donc $4 + 5 = 9$, celui des connexions à interrompre par des complexes sera, par conséquent, $30 - 9 = 21$ **). On voit donc que

4°. Le nombre-maximum des complexes qui interrompent des connexions des droites rencontrant la surface en un seul point, sans décomposer la collection totale de ces droites, est égal à 21.

23. La projection stéréographique d'une surface cubique, qui nous a été très utile pour l'étude des droites de la surface, n'aide pas moins

*) Le mot de complexe ne signifie ici qu'une partie limitée des droites qui rencontrent un segment d'une droite.

***) On peut établir la connexion simple en interrompant toutes les connexions des droites de deux ouvertures, à l'exception de celles qui se font par les complexes

56, 54, 51, 52; 43, 21, 41, 16, 24,

où nous avons donné aux complexes les noms attribués dans la table aux segments que leurs droites rencontrent.

à l'étude de ses autres courbes, par exemple à celle de ses sections planes. M. Klein*), en s'appuyant aux propriétés des surfaces à quatre points coniques, a prouvé qu'il existe trois groupes de collections (d'une infinité triple) de sections planes d'une surface cubique de première espèce qui sont composées d'un ovale et d'une branche d'ordre impair:

- le *premier groupe* comprend 10 collections, où l'ovale, qui se trouve sur un triangle ne rencontre aucune des droites de la surface;
- le *deuxième groupe* comprend 10 collections, où l'ovale, qui entoure une ouverture, rencontre toutes les droites d'un double-six;
- le *troisième groupe* comprend 15 collections, où l'ovale rencontre 16 droites.

Toutes ces collections sont séparées entre elles; car des collections d'une infinité simple ne suffisent pas pour établir une connexion entre des collections d'une infinité triple.

En prouvant ces mêmes résultats au moyen des projections stéréographiques de la surface, ce qui se fait sans aucune difficulté, on trouve en même temps les résultats suivants, où o_r et i_r désignent, respectivement, les nombres des collections, appartenant au $r^{\text{ième}}$ groupe ($r = 1, 2, 3$), où il y a des ovales ou des branches d'ordre impair qui passent en le point de la surface dont il s'agit.

1°. Point d'un triangle**):

$$o_1 = 1, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 3, \quad i_2 = 3; \quad o_3 = 3, \quad i_3 = 3.$$

2°. Point d'un pentagone ou d'un tétragone de première espèce

$$o_1 = 0, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 3, \quad i_2 = 3; \quad o_3 = 4, \quad i_3 = 3.$$

3°. Point d'un tétragone de seconde espèce

$$o_1 = 0, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 3, \quad i_2 = 4; \quad o_3 = 4, \quad i_3 = 2.$$

Le plan tangent appartient, comme position limite, à une des collections du premier, du troisième ou du deuxième groupe, suivant que le point de contact se trouve dans un triangle, dans un pentagone ou tétragone de la première espèce, ou dans un tétragone de la seconde espèce.

IV. Surfaces à 15 droites réelles***).

24. Nous avons déjà dit (dans le n° 3.) que, pour avoir une image (schématique) de la projection stéréographique d'une surface de la deuxième espèce, vue d'un point d'un triangle, il suffit d'effacer dans notre figure une branche quelconque du contour, par exemple la branche

*) Mémoire cité.

***) On ne peut avoir $i_1 = 4$ que dans le cas où le point se trouve dans la partie du triangle où la courbure est hyperbolique.

****) Voir le n° 8.

135. Alors toutes les droites du double-six 135 deviennent imaginaires, et l'ouverture 135 cesse d'exister. Le double-six fondamental devient imaginaire, et celles de ses droites qui restent réelles: 2, 4, 6, 1', 3', 5' sont les droites communes à lui et au double-six 246 qui devient aussi imaginaire. Les doubles-six 524, 146, 362 et 364, 526, 142 restent réels, quant même, dans chacun d'eux, les droites de deux couples deviennent imaginaires, et ils entourent encore des ouvertures visibles à notre point de vue. Les doubles-six 354, 516, 132 deviennent imaginaires, et les ouvertures qu'ils entouraient cessent d'exister. Mais ces ouvertures seront remplacées par trois nouvelles ouvertures invisibles, placées entre les branches du contour, et entourées des doubles-six réels, mais à quatre droites imaginaires; 162, 324, 546.

En même temps que l'ouverture 135, six des dix triangles de la surface cessent d'exister. Aux quatre triangles qui restent s'ajoutent deux qui ont pour périmètres ceux des triangles plans qui fermaient l'ouverture 135. Les autres triangles des mêmes plans (*A* et *B*) servent encore à fermer des ouvertures, de même que trois des triangles plans formés des droites qui entourent chacun des autres triangles de la surface, et nous ne rencontrons plus aucun plan tangent triple dont tous les triangles ferment des ouvertures, les plans *C*, *D*, *E* étant devenus imaginaires.

Les tables suivantes donnent un aperçu sur ces propriétés:

Triangle	Couples d'ouvertures visibles			Ouvertures invisibles
14, 36, 52 (<i>F</i>)	524 364	146 526	362 142	162, 324, 546
56, 12, 34 (<i>A</i>)	346 126	562 342	124 564	524, 146, 362
32, 54, 16 (<i>B</i>)	162 542	324 164	546 326	346, 562, 124
14, 56, 32 (<i>G</i>)	324 564	146 326	562 142	162, 524, 346
36, 12, 54 (<i>H</i>)	546 126	362 542	124 364	324, 146, 562
52, 34, 16 (<i>J</i>)	162 342	524 164	346 526	546, 362, 124

Ouverture	Triangles fermants	Droite correspondante
524	56, 21, 43 (<i>A</i>) et 56, 23, 41 (<i>G</i>)	56
146	12, 43, 65 (<i>A</i>) et 12, 45, 63 (<i>H</i>)	12
362	34, 65, 21 (<i>A</i>) et 34, 61, 25 (<i>J</i>)	34
364	32, 61, 45 (<i>B</i>) et 32, 65, 41 (<i>G</i>)	32
526	54, 23, 61 (<i>B</i>) et 54, 21, 63 (<i>H</i>)	54
142	16, 45, 23 (<i>B</i>) et 16, 43, 25 (<i>J</i>)	16
162	14, 63, 25 (<i>F</i>) et 14, 65, 23 (<i>G</i>)	14
324	36, 25, 41 (<i>F</i>) et 36, 21, 45 (<i>H</i>)	36
546	52, 41, 63 (<i>F</i>) et 52, 43, 61 (<i>J</i>)	52

Les lettres *A*, *B*, *F* etc. indiquent les plans tangents triples où se trouvent les triangles que nous venons d'énumérer, et nous distinguons, comme dans le n° 15., par l'ordre des chiffres qui composent les notations des côtés de ces triangles, les deux segments interceptés sur une droite par les deux autres droites dans un de ces plans tangents triples. Mais le segment 12 d'un triangle du plan *A* est différent du segment 12 d'un triangle du plan *H* etc.

25. On voit que la symmétrie 6-tuple de la surface consiste en deux symmétries triples; car et ses trois premiers triangles, dont les périmètres se trouvent dans les plans *F*, *A* et *B*, et ses trois derniers triangles, dont les périmètres se trouvent dans les plans *G*, *H*, *J*, ont entre eux des relations différentes des relations des trois premiers triangles avec les trois derniers. Si l'on écrit les noms des ouvertures de la manière suivante (en forme de *déterminant*)

$$\begin{array}{ccc} 524, & 146, & 362 \\ 346, & 562, & 124 \\ 162, & 324, & 546, \end{array}$$

les trois séries horizontales formeront par rapport aux premiers triangles, les colonnes verticales par rapport aux derniers, les deux triples d'ouvertures visibles et le triple d'ouvertures invisibles. Deux ouvertures ont entre elles des relations différentes, suivant qu'elles sont placées dans la même série, horizontale ou verticale, du déterminant, ou non. Dans le premier cas leurs notations n'ont qu'un seul chiffre commun, dans le second elles en ont deux.

Deux des segments d'une droite à points doubles réels séparent la paroi d'une ouverture, *correspondant à la droite*, de deux triangles de la surface: la continuation de la face interne de la paroi de l'ouverture sera la face convexe du triangle. Le segment supplémentaire à chacun de ces deux côtés de triangles, sépare les parois des deux ouvertures qui correspondent aux autres côtés du même triangle: la conti-

nuation de la face interne de l'une de ces parois est face externe de l'autre. [Il faut qu'on se rappelle que chacun des deux segments de la droite qui sont côtés de triangles se trouve sur le segment supplémentaire à l'autre, et que les autres parties de la droite appartiennent, à la fois, à tous les deux segments supplémentaires.]

Pour trouver les nombres des polygones qui composent la paroi d'une ouverture, ou la paroi commune à deux ouvertures, il est comode de compter les points d'intersection de droites à points doubles imaginaires qui se trouvent sur ces parties de la surface (voir le n° 8.). On trouve les résultats suivants :

La paroi d'une ouverture est composée de

$$\left. \begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, 4 \text{ triangles} \\ 6, 7, 8, 9, 10 \text{ pentagones} \\ 10, 9, 8, 7, 6 \text{ tétragones} \end{array} \right\} 16 \text{ pentagones et tétragones.}$$

La paroi commune à deux ouvertures dont les noms n'ont qu'un seul chiffre commun, est composée de 0—2 triangles et de 4 pentagones et tétragones (dont les nombres respectifs ne sont pas déterminés par celui des triangles). Les ouvertures se trouvent du même côté de cette paroi commune.

La paroi commune à deux ouvertures dont les notations ont deux chiffres communs, est composée de 8 pentagones et tétragones; elle sépare les ouvertures.

Un triangle de la surface fait partie des parois des trois ouvertures dont les contours sont visibles de points placés sur lui. Les trois ouvertures se trouvent du même côté du triangle.

Un pentagone ou tétragone fait partie des parois de quatre ouvertures: il en sépare les deux des deux autres.

26. Comme un triangle fait partie des parois des ouvertures à contours visibles, une droite sortant d'un point d'un triangle et n'ayant pas des intersections ultérieures, passe seulement par une ouverture visible à contour invisible. On voit de même, en effaçant la branche 135 et ses tangentes de la figure décrite dans le n° 19. (ou de celle qui est décrite dans le n° 20.), qu'on peut faire passer par un point quelconque d'un pentagone ou tétragone trois collections de droites sans des intersections ultérieures avec la surface, et que chacune de ces collections passe par une seule ouverture. On peut donc appliquer à la surface actuelle les trois premiers théorèmes exposés dans le n° 22., en y remplaçant seulement le nombre total des collections de droites par 9, celui des collections contenant des droites passant en un point de la surface, par 3, et celui des collections en connexion avec une collection donnée, par 4. Ces dernières collections passent par les ouvertures qui, dans le „déterminant“ du n° 25., se trouvent dans la même série horizontale ou verticale que l'ouverture donnée.

Les suites cycliques se composent à présent de toutes les collections à l'exception des trois qui passent par trois ouvertures qui formeraient un terme du déterminant. On trouve, en procédant comme dans le n° 22.,

que le nombre-maximum des complexes qui interrompent des connexions des droites rencontrant la surface en un seul point, sans décomposer la collection totale, est égal à 10.

27. Les collections, séparées entre elles, de sections planes à ovales réels n'appartiennent à présent qu'à deux groupes :

le premier groupe comprend 6 collections, où l'ovale, qui se trouve sur un triangle, ne rencontre aucune des droites de la surface;

le second groupe comprend 9 collections, où l'ovale, qui entoure une ouverture, rencontre toutes les droites réelles d'un double-six réel.

En donnant aux notations o_1, i_1, o_2, i_2 les mêmes significations que dans le n° 23., on trouve encore les résultats suivants :

1°. Point d'un triangle :

$$o_1 = 1, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 3, \quad i_2 = 3.$$

Le plan tangent appartient à une collection du premier groupe.

2°. Point d'un pentagone ou d'un tétragone : -

$$o_1 = 0, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 4, \quad i_2 = 3.$$

Le plan tangent appartient à une collection du second groupe.

V. Surfaces à 7 droites réelles*).

28. On aura une image de la projection stéréographique d'une surface de la troisième espèce, vue d'un point d'un triangle, en effaçant dans notre figure les deux branches 135 et 146 du contour. Alors toutes les droites de ces deux doubles-six deviennent imaginaires.

Les droites réelles du double-six 524 sont les mêmes que celles du double-six 362, et il est aussi évident que les deux branches du contour doivent appartenir à la même ouverture. On pourrait dire que cette ouverture visible a deux contours visibles (voir le n° 14.). De même les droites réelles du double-six 324 sont les mêmes que celles du double-six 526 : elles entourent une ouverture invisible. Le centre de projection se trouve dans le triangle : 12, 36, 54. Une déformation analogue à celle du n° 13. n'aura pas des effets essentiels.

La table suivante donne un aperçu sur les propriétés de la surface (comparer aux tables du n° 24.):

Triangle	Ouverture visible	Ouverture invisible	Triangles fermant l'ouverture visible
12, 36, 54 } (H) 12, 63, 45 } (H)	524	526	21, 43, 56 } (A) 21, 34, 65 } (A)
12, 34, 56 } (A) 12, 43, 65 } (A)	526	524	21, 63, 54 } (H) 21, 36, 45 } (H)

On voit que les deux triangles du plan A (ou H) qui ont pour base commune le segment 12 (qui dans le plan H est différent du segment 12

*) Voir le n° 9.

dans le plan A) ont les mêmes périmètres que deux triangles de la surface, pendant que les deux autres triangles du même plan, qui ont pour base commune le segment 21, ferment l'ouverture qui n'est pas visible des deux triangles de la surface que nous venons de nommer. La continuation de la face interne de la paroi d'une ouverture au-delà du segment 21, côté commun aux deux triangles qui la ferment, est face externe de la même ouverture.

Un triangle de la surface se trouve sur la paroi de l'ouverture qui en est visible, et il présente sa concavité du côté de l'ouverture. Les quatre hexagones de la surface se trouvent sur les parois de toutes les deux ouvertures, et ils les séparent.

Dans tous les cas les points de la surface se trouvent sur les parois des ouvertures qui en sont visibles. Aucune droite ne peut donc „passer par“ une ouverture, ce qui résulte aussi de la circonstance que tous ses deux triangles fermants se trouvent dans le même plan. On ne peut, par conséquent, trouver la connexion des droites rencontrant la surface en un seul point par les mêmes procédés qui y servaient pour les surfaces à 27 ou 16 droites; mais on trouve par d'autres considérations que le nombre-maximum des complexes qui interrompent des connexions des droites rencontrant la surface à 7 droites réelles en un seul point sans décomposer la collection de ces droites, est égal à 3. On peut se servir, à cet effet, du complexe des droites de la collection qui rencontrent une des droites à points doubles imaginaires, et des deux complexes qui rencontrent les deux segments interceptés sur la droite 12 par les droites 1' et 2, et qui ne sont pas en connexion avec le premier complexe. Ces deux derniers complexes sont séparés l'un de l'autre, parce que le cône qui en renferme les droites sortant d'un point de 12 se réduit à zéro au moment où ce point est un point d'intersection avec 1' ou 2. [Il existe un autre complexe de droites qui ne rencontrent la surface qu'en des points de 12: il est en connexion avec ceux des droites qui ne la rencontrent qu'en des points de 1' ou 2]*).

Les collections, séparées entre elles, de sections planes à ovales appartiennent à deux groupes, dont le premier comprend quatre collections, où l'ovale, qui se trouve sur un triangle, ne rencontre aucune des droites de la surface, pendant que le second comprend deux collections, où l'ovale, qui entoure une ouverture, rencontre quatre droites. On trouve encore, avec les notations des nos 23. et 27., les résultats suivants:

1°. Point d'un triangle:

$$o_1 = 1, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 1, \quad i_2 = 1.$$

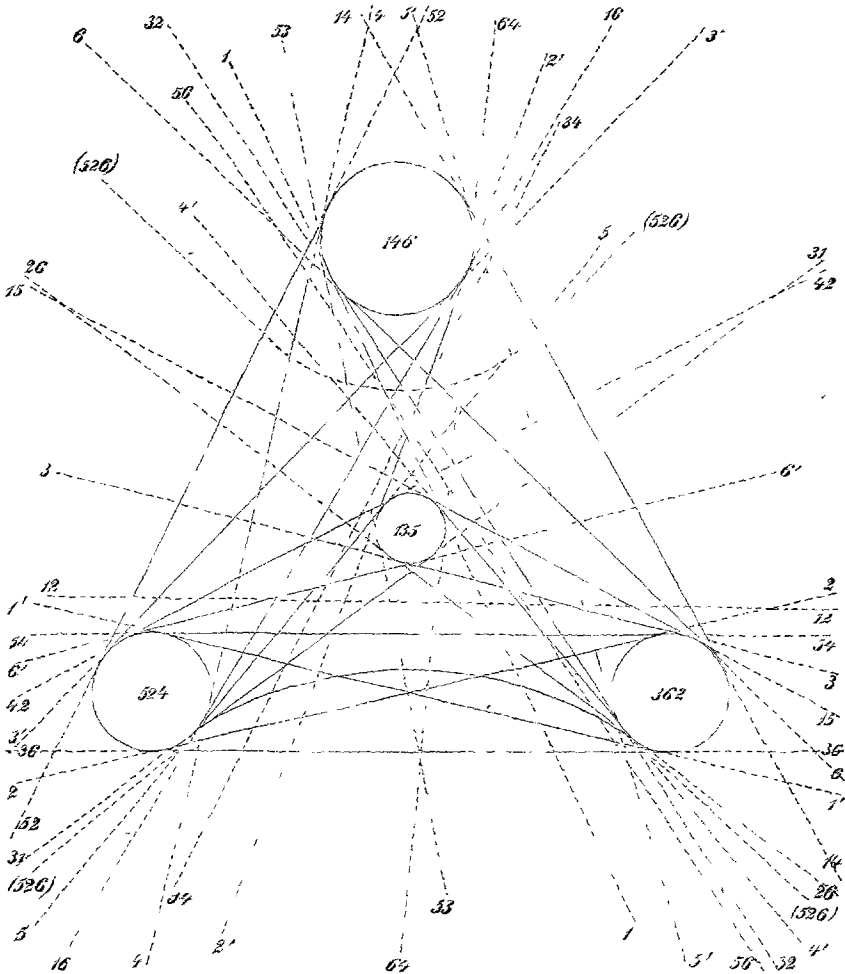
Le plan tangent appartient à une collection du premier groupe.

2°. Point d'un hexagone:

$$o_1 = 0, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 2, \quad i_2 = 1.$$

Le plan tangent appartient à une collection du second groupe.

*) Comparer aux nos 21 et 26. de mon mémoire sur les formes des quartiques planes.



Les propriétés des deux espèces de surfaces à 3 droites sont assez simples pour nous dispenser d'y insister ici. Nous nous bornerons à la remarque qu'un seul complexe suffit pour donner une connexion simple à la collection de droites rencontrant la surface de la quatrième espèce, ou la nappe d'ordre impair de la surface de la cinquième espèce, en un seul point. Si, pour la dernière surface, on enlève de la collection les droites qui en rencontrent la nappe d'ordre pair, on aura besoin de deux complexes.

Nous ferons encore remarquer que les projections stéréographiques sont aussi utiles pour l'étude de la connexion, soit des surfaces elles-mêmes, soit de l'espace où se trouve une de ces surfaces.

Copenhague, 12 avril 1874.