Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.

(Zweiter Aufsatz.)

Von Felix Klein in Erlangen.

Die nachstehenden Auseinandersetzungen schliessen sich an einen früheren Aufsatz über denselben Gegenstand (diese Annalen IV, 4) an und sind bestimmt, einige dort nur angedeutete Punkte weiter auszuführen. Es galt mir damals hauptsächlich, in möglichst anschaulicher Weise darzulegen, wie Cayley's projectivische Massbestimmung in Ebene und Raum ein äquivalentes Bild für die Lehren der Nicht-Euklidischen Geometrie ergiebt. Ich durfte hoffen, letztere dadurch einem allgemeinen Verständnisse zugänglicher gemacht, gleichzeitig aber auch Ausgangspunkte für weitere Untersuchungen gewonnen zu haben. In letzterem Betracht hatte ich nur angedeutet, wie die vorgetragenen geometrischen Ueberlegungen für Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen zu verwerthen seien. Ich hatte ferner die Ansicht entwickelt, dass man in ähnlicher Weise, wie v. Staudt, die projectivische Geometrie aufbauen könne, auch ohne über das Parallelenaxiom etwas festzusetzen. Es sind hauptsächlich diese beiden Punkte, welche im Folgenden im Sinne des damaligen Aufsatzes, aber in der fortentwickelten Form, die sie inzwischen bei mir gewonnen haben, dargelegt werden sollen. Wenn ich dabei oft weiter aushole und gelegentlich vielleicht etwas weitläufig wäre; so trieb mich dazu der Wunsch, möglichst verständlich zu schreiben und dadurch von vorneherein Zweifel an der Richtigkeit der Betrachtung zu beseitigen, welche sich bei so abstracten Gegenständen nur zu leicht aufdrängen. Zugleich mögen denn dadurch die Bedenken entfernt werden, welche mir von verschiedenen Seiten her hinsichtlich meiner früheren Arbeit geäussert worden sind.

Die nachstehenden Untersuchungen sind wie die damaligen rein mathematischen Inhaltes. Es bleiben ihnen also durchaus die Fragen fern, welche Vortheile aus den bezüglichen mathematischen Resultaten für die Raumanschauung oder überhaupt die Naturerkenntniss gewonnen werden können. Aber es ist vielleicht nicht überflüssig, nach dieser Seite hin den Gegenstand hier zu präcisiren, da nur zu vielfach diese mathematischen Betrachtungen mit eventuellen Anwendungen derselben untermischt und verwechselt werden.

Die Untersuchungen der Nicht-Euklidischen Geometrie haben durchaus nicht den Zweck, über die Gültigkeit des Parallelenaxioms zu entscheiden, sondern es handelt sich in denselben nur um die Frage: *ob das Parallelenaxiom eine mathematische Folge der übrigen bei Euklid aufgeführten Axiome ist;* eine Frage, die durch die fraglichen Untersuchungen definitiv mit *Nein* beantwortet wird. Denn sie haben ergeben, dass man ein in sich consequentes Lehrgebäude auf Grund allein der übrigen Axiome aufbauen kann, welches das Lehrgebäude der Euklidischen Geometrie nur als einen speciellen Fall umfasst.

Aehnliche Untersuchungen könnte man und sollte man mit Bezug auf alle anderen Voraussetzungen, die unseren geometrischen Vorstellungen zu Grunde liegen, anstellen. Es ist die Nicht-Euklidische Geometrie ein erster Schritt in einer Richtung, deren allgemeine Möglichkeit durch Riemann's Arbeit*) „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" vorgezeichnet ist. Ein ähnlicher Schritt ist es, wenn man das Axiom von der unendlichen Länge der Geraden fallen lässt, wie ich dies in meinem vorigen Aufsatze im Anschlusse an die Arbeiten von Riemann und Helmholtz gethan habe. Dann ist ausser der Nicht-Euklidischen Geometrie im Sinne von Lobatchefsky, Bolyai, oder, wie ich sie nenne, der hyperbolischen Geometrie, noch eine zweite Geometrie, die elliptische, möglich; zwischen beiden bildet die gewöhnliche, parabolische Geometrie den Uebergangsfall.

Allerdings sind wohl nicht immer und nicht alle Bearbeiter der Nicht-Euklidischen Geometrie oder verwandter Gegenstände der hier entwickelten Ansicht gewesen. Man möchte dieses wenigstens schliessen, wenn z. B. Bolyai die Abhandlung, in der er das Parallelenaxiom fallen lässt, „über die absolut wahre Raumlehre" betitelt. Auch in der neuesten Zeit scheint diese Auffassung noch nicht ganz verschwunden, so dass es wohl nicht überflüssig ist, hier ausdrücklich auf dieselbe als eine von der hier vorgetragenen abweichende aufmerksam zu machen.

Man kann fragen, ob solche Untersuchungen, wie sie durch die Nicht-Euklidische Geometrie als Beispiel vertreten sind, noch ausser-

*) Bei Riemann ist die rein mathematische Betrachtung nicht überall von den Betrachtungen mehr speculativen Charakters geschieden, die sich auf die Objectivität der Raumanschauung etc. beziehen. Auf diesen Umstand ist die vielfach über die bez. Dinge verbreitete Unklarheit wohl zum grossen Theile zurückzuführen.

halb des speciellen Zweckes, um dessen willen sie entwickelt werden, anderweitigen Nutzen besitzen und in welcher Richtung derselbe zu suchen ist. Mir scheint ein zweifacher Nutzen zu resultiren, ein rein mathematischer und ein, wenn die Ausdrucksweise gestattet ist, physikalischer. In erster Linie erweitern die Untersuchungen den Kreis unserer mathematischen Begriffe. So haben die Betrachtungen über Parallelentheorie, ganz allgemein zu reden, *einen* wesentlich neuen Begriff geliefert, den Begriff einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse. Dann aber — und das ist die physikalische Wichtigkeit solcher Forschungen — gewinnen wir durch dieselben Material, um die uns geläufigen geometrischen Vorstellungen nach ihrer Nothwendigkeit beurtheilen und eine Abänderung derselben, falls eine solche wünschenswerth scheinen sollte, zweckmässig treffen zu können. Ich kann in dieser Beziehung nur (in etwas freier Fassung) die Schlussworte der Riemann'schen Arbeit citiren:

„*Solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können dazu dienen, dass die Umarbeitung der überkommenen räumlich-mechanischen Vorstellungen nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.*"

Aber einseitig würde es sein, wollte man, wie dies gelegentlich von physikalischer oder philosophischer Seite geschieht, in einer solchen eventuellen Verwendung der betreffenden Untersuchungen den einzigen Nutzen derselben erblicken; und es ist jedenfalls nur vortheilhaft, wenn man die Fragen trennt, und zunächst die rein mathematischen Betrachtungen, welche die Grundlagen für die sich anschliessenden speculativen sind, durcharbeitet. —

Die folgenden Ausführungen zerfallen in zwei Abschnitte, die unter einander nur lose zusammenhängen und hier nur vereinigt sein mögen, weil sie sich beide an den früheren Aufsatz anlehnen.

Der erste Abschnitt ist durch den Umstand hervorgerufen, dass in meiner früheren Arbeit die Frage nach dem Begriffe einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse, und die Frage, wie unsere räumlichen Anschauungen zu modificiren wären, falls der Raum ein nicht verschwindendes Krümmungsmass besässe, nicht von einander getrennt behandelt sind. Es scheint dies bei dem Verständnisse der Arbeit eine Hauptschwierigkeit zu bilden, und deshalb sollen die dort mit Bezug auf die erste Frage gewonnenen Resultate hier ohne alle Verbindung mit der zweiten Frage noch einmal ausgesprochen und ihrem Sinne und ihrer Tragweite nach deutlich begrenzt werden. Ich stelle mich dabei auf den rein analytischen Standpunkt und handele sofort von Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen: wenn ich dabei gelegentlich von geometrischen Dingen rede, so geschieht es nur, um abstracte Begriffe an einem concreten Bilde zu erläutern. Es wird dabei die gewöhnliche geometrische Anschauung mit ihrem Parallelen-Axiome zu Grunde gelegt, was ja ein durchaus berechtigtes Hülfsmittel ist, auch wenn die objective Gültigkeit des Parallelenaxioms (oder der anderen Axiome) als nicht feststehend betrachtet wird, da diese uns geläufige Anschauung in sich nicht widersprechend ist, also wirkliche mathematische Beziehungen in Evidenz setzt. Der begriffliche Unterschied zwischen einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse und dem, was ich eine projectivische Mannigfaltigkeit nenne — oder, was das geometrische Analogon ist: der Unterschied zwischen metrischer und projectivischer Geometrie wird dabei in möglichst bestimmter Form hervorgehoben, da so erst die Resultate einen durchsichtigen Inhalt erhalten. Ich glaube nicht, dass die Art und Weise, wie ich diesen Unterschied einführe, wesentlich neu ist: vielmehr wird Jeder, der darüber nachgedacht hat, den Unterschied in ähnlicher Weise auffassen; es ist mir aber nicht bekannt, dass diese Auffassung irgendwo dargestellt wäre und ich möchte sie hier um so weniger unerörtert lassen, als sie nach meiner Meinung für mathematische Fragen überhaupt von fundamentaler Bedeutung ist. Dementsprechend haben diese Auseinandersetzungen eine Ausdehnung gewonnen, hinter welcher die Partieen, die sich insbesondere auf das constante Krümmungsmass beziehen, verhältnissmässig zurücktreten.

In dem zweiten Abschnitte begründe ich denn eingehender die bereits genannte Behauptung: dass man in ähnlicher Weise, wie v. Staudt, die projectivische Geometrie entwickeln kann, auch wenn man das Parallelenaxiom nicht zugiebt. Zu dem Zwecke zeige ich, dass nicht nur für die Ebenen und Geraden des Raumes, sondern überhaupt für jedes Flächen- und Curvensystem, das in einem endlichen Raumstücke ähnliche Lagenverhältnisse besitzt, wie man sie bei den Ebenen und Geraden voraussetzt, innerhalb des begrenzten Raumes die projectivische Geometrie gilt. Diese Untersuchung, die hier zum Beweise der genannten Behauptung geführt wird, scheint an und für sich von Interesse. Sie lehrt einmal ein merkwürdiges Theorem der Analysis situs kennen, insofern der oben angedeutete Satz*) nur von solchen räumlichen Dingen handelt, die bei einer stetigen Verzerrung des Raumes ungeändert bleiben, und kann also in diese noch wenig entwickelte geometrische Disciplin eingereiht werden; andererseits

*) Ich habe diesen Satz bereits in den Gött. Nachrichten 1872. Juni 5. mitgetheilt.

kann man sie als einen Schritt in der oben angedeuteten Untersuchungs-Richtung der Axiome der Geometrie betrachten, insofern sie von weniger Annahmen ausgeht, als man den Ebenen und Geraden des Raumes gewöhnlich beilegt, und doch das Vorhandensein einer Reihe denselben sonst zukommender Eigenschaften nachweist.

Erster Abschnitt.

Die Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse, die projectivische Mannigfaltigkeit und ihr gegenseitiges Verhältniss.

§ 1.

Begriff einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, wie er im Folgenden zu Grunde gelegt wird.

Wenn n Veränderliche

$$x_1, x_2, \ldots . x_n$$

gegeben sind, so constituiren die $n$fach unendlich vielen Werthsysteme, die man erhält, wenn man die x unabhängig von einander die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt, dasjenige, was hier, in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* genannt werden soll. Das einzelne Werthsystem

$$(x_1, x_2, \ldots . x_n)$$

werde als ein *Element* derselben bezeichnet.

Für $n = 3$ kann man — und das ist der ursprüngliche Grundgedanke der analytischen Geometrie — die Elemente der bez. Mannigfaltigkeit durch die Punkte des Raumes, die Mannigfaltigkeit selbst also durch den als Punkt-Aggregat gedachten Raum vorgestellt sein lassen. Wir werden hier und im Folgenden diese anschauliche und uns geläufige Interpretation eines einzelnen Falles benutzen, um uns an ihr jedesmal diejenigen Ideen zu bilden, welche auf den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff übertragen werden sollen. Den Punktraum denken wir uns dabei, wie bereits in der Einleitung gesagt, mit den Eigenschaften ausgerüstet, die wir ihm gewöhnlich, d. h. in der Euklidischen Geometrie beilegen.

Im Folgenden soll bei Betrachtung der Mannigfaltigkeiten gewöhnlich von algebraischen Gebilden und algebraischen Processen gehandelt werden. In solchen Fällen mögen wir, wie dies in der neueren

Geometrie geschieht, zu den bisherigen Elementen der Mannigfaltigkeit neue, *complexe* hinzufügen, indem wir den n Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

fortan gestatten, beliebige complexe Werthe anzunehmen. Dabei wird es, wieder wie in der Geometrie, dennoch gestattet sein, der Ausdrucksweise nach an einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit festzuhalten; der Vergleich mit der in der Geometrie üblichen Redeweise wird alle Schwierigkeiten in dieser Richtung fortheben.

§ 2.

Transformationen und Transformationsgruppen.

Als eine *Transformation* der Mannigfaltigkeit in sich selbst sei der Uebergang verstanden, welcher von jedem Elemente zu einem (oder einigen) zugeordneten führt. Man mag die Transformation durch n Gleichungen bestimmen, nach welchen das zugeordnete Element von dem jedesmaligen ursprünglichen abhängt. Die Art der Gleichungen und ihre gegenseitige Beziehung ist für den Begriff zunächst gleichgültig; im Folgenden werden wir aber immer voraussetzen, dass sie umkehrbar sind. Die umgekehrten Gleichungen repräsentiren, was die *umgekehrte Transformation* heissen soll. Bezeichnet man, wie im Folgenden geschehen soll, eine Transformation durch einen Buchstaben: A, B, ..., die Zusammensetzung zweier Transformationen A, B durch das Symbol (Produkt) AB, so wird die umgekehrte Transformation von A durch A^{-1} darzustellen sein.

Wir bemerken ferner, dass die Transformationen, die weiterhin vorkommen, wesentlich *algebraische* sind, und dass wir in solchen Fällen die Mannigfaltigkeit immer als eine complexe Mannigfaltigkeit und die Transformation als gleichzeitig für die complexen Elemente eintretend ansehen.

Sei nun eine Reihe von Transformationen A, B, C ... gegeben. *Wenn diese Reihe die Eigenschaft besitzt, dass je zwei ihrer Transformationen zusammengesetzt eine Transformation ergeben, die selbst wieder der Reihe angehört, so soll sie eine Transformationsgruppe*) heissen.*

---

*) Name wie Definition sind herübergenommen von der analogen Begriffsbildung der Substitutionstheorie, die sich nur dadurch von der hier vorgetragenen unterscheidet, dass die in ihr betrachteten Mannigfaltigkeiten aus einer endlichen Zahl discreter Elemente bestehen. In einem früheren Aufsatze (diese Annalen IV, 1) haben Lie und ich das, was hier Transformationsgruppe heisst, als ein „geschlossenes System von Transformationen" bezeichnet.

Beispiele für diesen Begriff mag man sich an der durch den Punktraum versinnlichten Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen bilden. Eine jede Bewegung, eine jede Collineation ist eine räumliche Transformation. Eine *Gruppe* bilden z. B. die Gesammtheit aller Bewegungen; denn zwei Bewegungen zusammengesetzt ergeben eine neue Bewegung. Eine *Gruppe* bilden ferner etwa die Gesammtheit aller Collineationen, insbesondere diejenigen Collineationen, die ein bestimmtes Gebilde, z. B. eine Fläche zweiten Grades, in sich überführen. Es ist übrigens zum Begriffe der Gruppe durchaus nicht wesentlich, dass die sie constituirenden Transformationen, wie in den genannten Beispielen, an Zahl unendlich sind und sich continuirlich an einander anschliessen, obwohl dies der Charakter derjenigen Gruppen sein wird, die im Folgenden gebraucht werden. Vielmehr bilden z. B. die unendlich vielen ruckweise auf einander folgenden Verschiebungen, welche eine Sinuslinie mit sich selbst zur Deckung bringen, eine Gruppe; ebenso die in endlicher Anzahl vorhandenen Bewegungen, welche einen Würfel mit sich selbst zur Deckung bringen*). Aehnliche Unterscheidungen finden bei den Transformationsgruppen in beliebigen Mannigfaltigkeiten ihre Stelle, doch mag die nähere Erörterung der sich anschliessenden Fragen als für das Folgende unnöthig hier unterbleiben.

Zwei Transformationsgruppen heissen *ähnlich***), wenn man die Transformationen der einen Gruppe so den Transformationen der anderen Gruppe zuordnen kann, dass die Zusammensetzung entsprechender Transformationen entsprechende Transformationen ergiebt. Eine Transformationsgruppe, welche mit einer gegebenen ähnlich ist, erhält man z. B., wenn man mit allen Transformationen A der gegebenen Gruppe eine Transformation C und deren umgekehrte C^{-1} in der Art verbindet, dass die Transformationen $C^{-1}AC$ entstehen. Man kann dies so aussprechen. Die Transformationen A führen die ursprünglichen Elemente der Mannigfaltigkeit bez. in neue über. Auf die ursprünglichen und die neuen wende man gleichzeitig die Transformation C an. So drücken die Transformationen $C^{-1}AC$ die Beziehung aus, welche zwischen den Elementen besteht, die durch C aus den früher zugeordneten hervorgehen.

Man kann unter gewissen Einschränkungen beweisen, dass je zwei ähnliche Gruppen in diesem Sinne aus einander durch Anwendung

---

*) In einem Aufsatze: Sur les groupes de mouvements (Annali di matematica. Ser 2. t. II) hat Camille Jordan alle Gruppen von Bewegungen aufgestellt.

**) Man vergl. immer die analoge Terminologie und Begriffsbildung der Substitutionstheorie.

einer Hülfstransformation C hervorgehen; für das Folgende haben wir die Begründung und die Begrenzung dieses Satzes nicht nöthig, *wir wollen vielmehr unter zwei ähnlichen Transformationsgruppen schlechthin solche zwei verstehen, die durch Anwendung einer Transformation C aus einander entstanden sind.* Dabei braucht C noch durchaus keine eindeutige Transformation zu sein; sie kann recht wohl vieldeutig, selbst unendlich vieldeutig sein*).

§ 3.

Die Hauptgruppe der räumlichen Transformationen.

Die Geometrie kann sich, unseren gewöhnlichen Vorstellungen nach**), überhaupt nur mit solchen Eigenschaften der räumlichen Gebilde befassen, welche unabhängig sind von der Stelle im Raume, die von den Gebilden eingenommen wird, sowie von der absoluten Grösse der Gebilde. Auch kann sie nicht (immer ohne Zuhülfenahme eines dritten Körpers) zwischen den Eigenschaften eines Körpers und denen seines Spiegelbildes unterscheiden. Durch diese Sätze ist eine Gruppe räumlicher Transformationen charakterisirt — sie mag die *Hauptgruppe* genannt werden —, deren Transformationen die Gesammtheit der geometrischen Eigenschaften eines Gebildes unberührt lassen. Es setzt sich diese Gruppe zusammen aus den sechsfach unendlich vielen Bewegungen, aus den einfach unendlich vielen Aehnlichkeitstransformationen und aus der Transformation durch Spiegelung an einer Ebene.

Hatten wir seither den Punktraum schlechthin als eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aufgefasst, so können wir jetzt eine nähere Bestimmung hinzufügen, welche durch das Vorhandensein der Hauptgruppe räumlicher Transformationen bedingt wird:

*Der Punktraum ist eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, bei deren Behandlung man nur auf solche Eigenschaften auftretender Gebilde zu achten hat, die durch die Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben****).

---

*) Z. B. sollen, für $n = 2$, noch als ähnlich bezeichnet sein die Gruppen:

$$x_1' = x_1 + a_1, \quad x_2' = x_2 + a_2$$

und

$$y_1' = b_1 y_1, \qquad y_2' = b_2 y_2,$$

weil sie durch die Substitution

$$x_i = \log y_i, \quad x_i' = \log y_i'$$

aus einander hervorgehen.

**) In der Nicht-Euklidischen Geometrie ist dies insofern anders, als die Verwandtschaft der Aehnlichkeit nicht existirt.

***) Dem Raume an und für sich kann man bekanntlich, nach der Plücker'schen Auffassung, beliebig viele Dimensionen zuertheilen, je nach dem Gebilde, Man übersieht bereits hier, wie von einer bestimmten Behandlung einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen erst dann die Rede sein kann, wenn eine Transformationsgruppe gegeben ist, welche die Eigenschaften, auf welche man achten will, charakterisirt als die durch die Transformationen der Gruppe unveränderlichen Relationen. Je umfangreicher die Gruppe ist, um so geringer wird die Zahl der bleibenden Eigenschaften und umgekehrt. Bestände die Gruppe aus der identischen Transformation, d. h. aus derjenigen, die jedes Element sich selbst zuordnet, so würde jedes Element der Mannigfaltigkeit bei deren Behandlung ein individuelles Interesse besitzen.

§ 4.

Die verschiedenen Methoden der Geometrie sind durch eine zugehörige Transformationsgruppe charakterisirt.

Wenn man von bloss formellen Unterschieden absieht — also etwa davon, ob die Art der Behandlungsweise in fortwährender Verbindung mit der räumlichen Anschauung oder unter Zuhülfenahme eines rechnenden Algorithmus geschieht — so wird man den Unterschied der in der Geometrie üblichen Methoden in der Art der bei der Behandlung adjungirten Transformationsgruppe erblicken müssen. Für alle geometrischen Betrachtungen ist, wie gesagt, von vornherein die Hauptgruppe der Transformationen gegeben. Wollte man nur einen Theil ihrer Transformationen in Betracht ziehen, so erhielte man solche geometrische Eigenschaften der räumlichen Gebilde, welche sich auf fest gedachte gegebene Elemente beziehen, die unter sich natürlich die eigentlichen, nicht von der Annahme fester Elemente abhängigen geometrischen Beziehungen begreifen. Aber es bleibt unbenommen, der allgemeinen geometrischen Betrachtung statt der Hauptgruppe eine weitere, die Hauptgruppe umfassende Gruppe von Transformationen zu Grunde zu legen. Und in der Einführung solcher allgemeinerer Gruppen an Stelle der Hauptgruppe besteht das Wesen der verschiedenen geometrischen Methoden, die sich in der Neuzeit entwickelt haben, insbesondere, worauf es uns hier ankommt, das Wesen *der projectivischen Geometrie.* Sie fasst an den räumlichen Dingen nur das auf, was durch collineare Umformungen nicht geändert wird, *sie adjungirt sich also in dem eben erörterten Sinne die Gruppe aller collinearen Umformungen.* Die Transformationen der

welches man als Raumelement zu Grunde legen will. Aber die Hauptgruppe der Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften ungeändert lässt, ist von der Wahl des Raumelementes unabhängig. Der Raum erscheint also als das Bild einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist, bei der jedesmal eine Transformationsgruppe von demselben Charakter adjungirt ist. Vgl. den folgenden Text.

Hauptgruppe sind dann*) dadurch definirt, dass sie diejenigen reellen Collineationen sind, welche ein individuelles Gebilde, den sogenannten unendlich fernen imaginären Kreis ungeändert lassen. Die nicht projectivischen Eigenschaften räumlicher Gebilde erscheinen als covariante Beziehungen der Gebilde zum imaginären Kreise. Ein anderes Beispiel, welches hier, um die Verschiedenartigkeit der möglichen Methoden hervorzuheben, erwähnt sein mag, giebt diejenige Behandlungsweise geometrischer Dinge, wie sie in der sog. *Analysis situs* gehandhabt wird. Hier besteht die Gruppe der adjungirten räumlichen Transformationen aus denjenigen Raumtransformationen, welche man Verzerrungen (Deformationen) des Raumes nennt und die dadurch definirt sind, dass sie sich aus unendlich kleinen reellen Raumtransformationen zusammensetzen lassen. Indem bei ihr der Begriff des Reellen wesentlich, der Begriff der Algebraischen zunächst überhaupt nicht vorhanden ist, so ist bei ihr das Punktgebiet des Raumes nicht durch complexe Punkte zu erweitern.

Eine nähere Durchführung des hier entwickelten Gesichtspunktes zur Classificirung der verschiedenen geometrischen Methoden scheint sehr interessant, es würde eine solche aber hier ausserhalb des eigentlichen Thema's liegen und es mag daher bei den genannten Beispielen, die zur Illustration der allgemeinen Betrachtungen des folgenden Paragraphen ausreichen, sein Bewenden haben**).

§ 5.

Behandlungsweise der Mannigfaltigkeiten aus n Dimensionen.

Aus den vorigen beiden Paragraphen ist ersichtlich, wie die Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen *durch die Transformationsgruppe charakterisirt wird, welche man adjungirt.* Alle diejenigen Behandlungsweisen stimmen dabei im Wesen überein und können durch passende Einführung neuer Variabeln auch in formelle Uebereinstimmung gebracht werden, welche *ähnliche* Transformationsgruppen benutzen. Es ist das bei der in § 3. entwickelten Definition von ähnlichen Gruppen selbstverständlich. Denn eine einmalige Transformation der Mannigfaltigkeit in sich selbst (die wir dort mit dem Buchstaben C bezeichnet hatten) kann auch als eine Einführung

*) Man muss bei der projectivischen Geometrie verschiedene Stadien der Entwickelung unterscheiden. Lange Zeit dachte man bei einer Collineation immer an eine reelle Collineation, und noch immer wohl ist die Anschauung, dass man in der projectivischen Geometrie alle vorkommenden Grössen als unbedingt complex veränderlich auffassen soll, nicht überall durchgedrungen.

**) Ich habe seitdem versucht, diese Verhältnisse in einem Programme: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen 1872, Bei A. Düchert) allgemein zu entwickeln (Dec. 72.).

neuer Variabeln zur Behandlung der Mannigfaltigkeit, als eine Coordinatentransformation, angesehen werden, wobei denn die Gruppe der Aenderungen, welche man als nicht in Betracht kommend ansieht, unberührt dieselbe bleibt.

Als einfachste Transformationsgruppe erscheint die Gruppe aller *linearen* Transformationen, hierunter diejenigen verstanden, welche statt der ursprünglichen Variabeln gebrochene lineare Functionen derselben mit gemeinsamem Nenner einführen. Die auf sie gegründete Behandlungsweise*) der Mannigfaltigkeit — ich will sie die *projectivische* nennen — ist es, deren sich die *neuere Algebra* bedient (wobei es nur als ein Mittel zur übersichtlicheren Darstellung, allerdings als ein sehr wesentliches und der Natur der Sache durchaus entsprechendes Mittel erscheint, wenn man statt der n Veränderlichen, durch die ursprünglich das Element der Mannigfaltigkeit bestimmt wurde, $(n+1)$ homogene einführt). Der Namen „*Invariantentheorie*", den man der neueren Algebra beilegt, bezeichnet recht gut das Wesen, welches nach der hier dargelegten Auffassung überhaupt jeder Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit zukommt; es handelt sich immer darum bei gegebenem Umfange der Aenderungen, die invarianten Beziehungen zu entdecken.

Zu einer anderen Behandlung der Mannigfaltigkeiten, die aber in der vorangeführten projectivischen Behandlung enthalten ist, insofern ihre Transformationsgruppe aus einem Theile der Gruppe aller linearen Transformationen besteht, wird man geführt, wenn man die Betrachtungen der gewöhnlichen metrischen Geometrie, bei denen die Hauptgruppe räumlicher Transformationen zu Grunde gelegt ist, auf beliebig viele Veränderliche verallgemeinert**). Die bezüglichen Transformationen erscheinen vom Standpunkte der projectivischen Betrachtung als diejenigen reellen linearen Transformationen, welche ein individuelles Gebilde, das durch eine lineare und eine quadratische Gleichung vorgestellt wird, ungeändert lassen. Es mag die hier anknüpfende Behandlungsweise der Mannigfaltigkeit als die *gewöhnliche metrische* bezeichnet sein.

Man könnte sich ferner eine Behandlungsweise denken, welche der *Analysis situs* entspräche etc. etc.

Besonders betont sei noch einmal, dass *ähnliche* Transformations-

---

*) Eine der frühesten Behandlungen des allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffs findet sich in Grassmann's linearer Ausdehnungslehre von 1844. Seine Methode ist wenigstens in vielfacher Hinsicht eben die hier gemeinte projectivische; was hier Element der Mannigaltigkeit heisst, heisst bei ihm extensive Grösse.

**) Hierher sind beispielsweise alle derartigen Betrachtungen zu rechnen, welche die gew. Krümmungstheorie auf n Dimensionen übertragen etc.

gruppen zu identischen Behandlungsweisen Anlass geben. Projectivisch mag deshalb geradezu jede Behandlungsweise heissen, welche eine Gruppe adjungirt, die durch passende Einführung neuer Veränderlichen auf die Gesammtheit der linearen Transformationen umgeformt werden kann etc.

Sodann sei noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht, der zwar nicht im Nächstfolgenden hervortritt, der aber für den zweiten Abschnitt dieses Aufsatzes von Bedeutung wird. Es ist, dass beliebige Transformationen einer Mannigfaltigkeit, sofern sie die implicite immer vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften haben, *für unendlich kleine Partieen der Mannigfaltigkeit durch lineare Transformationen ersetzt werden können.* Welcher Art also auch die Behandlungsweise ist, der man eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen unterwerfen mag, *für die* ($n - 1$) *fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche von den von einem Elemente aus möglichen Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Elementen gebildet wird, ist sie in der projectivischen Behandlungsweise enthalten.*

§ 6.

Die Mannigfaltigkeit von constantem nicht verschwindendem Krümmungsmasse.

Die vorhergehenden Paragraphen enthalten die nothwendigen Auseinandersetzungen, um nunmehr den Begriff einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse einführen und sein Verhältniss zu dem Begriffe der projectivischen Mannigfaltigkeit erörtern zu können.

Wenn man einer Mannigfaltigkeit ein bestimmtes constantes, nicht verschwindendes Krümmungsmass beilegt*), so hat man dem blossen Begriffe einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ganz so, wie in den im vorigen Paragraphen aufgeführten Beispielen, als nähere Bestimmung eine Transformationsgruppe zugefügt, die durch die Forderung freier Beweglichkeit starrer Körper in bekannter Weise construirt wird**). Der Werth des dann nothwendig constanten Krümmungsmasses kann noch durch bestimmte weitere Forderungen näher umgrenzt und endlich durch Einführung der Längeneinheit numerisch festgelegt werden (vgl. § 7.).

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob die so eingeführte Be-

---

*) Man vergl. hierzu ausser der Riemann'schen Schrift namentlich Beltrami's: Teoria generale degli spazii di curvatura costante. (Annali di Matematica. Serie 3, t. II.). Dieselbe ist von Hoüel übersetzt im Journal de l'Ecole Normale Supérieure t. IV.

**) Vergl. die Arbeiten von Riemann und Helmholtz, auf welche sich auch die im Texte gebrauchte geometrische Redeweise bezieht.

handlungsweise zu der projectivischen Behandlung der Mannigfaltigkeit in einer ähnlichen Beziehung steht, wie nach der bez. Bemerkung des vorigen Paragraphen die gewöhnliche metrische Methode; anders ausgedrückt; Die bei der gewöhnlichen metrischen Methode zu Grunde gelegte Gruppe war bei passender Coordinatenbestimmung in der Gruppe der linearen Transformationen, allgemein zu reden also in einer mit dieser Gruppe ähnlichen Gruppe enthalten: trifft das bei der nun vorliegenden Behandlungsweise auch zu?

Die so gestellte Frage findet ihre Beantwortung in den Arbeiten Beltrami's*). Derselbe zeigt nämlich: *dass man in einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse die Variabeln so wählen kann, dass die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt sind; dass ferner bei dieser Coordinatenbestimmung die Transformationen, welche die Massverhältnisse ungeändert lassen, durch lineare Gleichungen dargestellt werden.* Von dem hier vorliegenden Gesichtspunkte aus wird man das dahin aussprechen: *dass die Transformationsgruppe, welche bei einer Mannigfaltigkeit adjungirt wird, wenn man ihr constantes Krümmungsmass beilegt, bei passender Coordinatenbestimmung in der Gruppe der linearen Transformationen enthalten ist,* woraus man sofort schliessen wird: *dass die Behandlung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse in der projectivischen Behandlung enthalten ist.*

Ich habe in meiner früheren Arbeit namentlich noch gezeigt, dass die Massbestimmung, wie man sie unter Annahme eines constanten Krümmungsmasses erhält, mit der projectivischen zusammenfällt, welche man nach Cayley's Vorgange unter Zugrundelegung einer quadratischen Gleichung aufbauen kann, und dieses ist nach der analytischen Seite hin das wesentliche Resultat meiner Arbeit. Ich hatte damals dem Resultate unter blossem Hinweis auf die Theorie mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten die geometrische Einkleidung gegeben: dass die auf einen passenden Kegelschnitt, bez. eine passende Fläche zweiten Grades gegründete Cayley'sche Massbestimmung ein äquivalentes Bild für die Massbestimmung in Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung bez. von zwei und drei Dimensionen abgiebt. Und im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden wird man das Resultat so formuliren: *Die Gruppe von Transformationen, welche die Massbestimmung in einer Mannigfaltigkeit constanter Krümmung ungeändert lassen, besteht bei passender Coordinatenbestimmung aus der Gruppe derjenigen linearen Transformationen, welche eine quadratische Gleichung in sich überführen.*

*) Vgl. besonders wieder die Teoria generale etc.

Ich muss hier einen Unterschied erwähnen, der zwischen der von Beltrami eingeschlagenen Darstellungsweise und der meinigen Statt hat. Bei Beltrami wird immer nur von reellen Werthen der Veränderlichen gesprochen, wenigstens die complexe Variabilität der Argumente nicht principiell eingeführt. In meiner vorigen Arbeit dagegen fasse ich, wie auch hier, zunächst die Veränderlichen als complexe Veränderliche auf, und führe erst hinterher die Beschränkung auf das reelle Werthgebiet ein. Dadurch ist es möglich den Aussagen, wie die vorstehenden sind, eine vollkommen allgemeine Form zu geben; achtet man nur auf reelle Werthe der Variabeln, so treten eine Reihe Beschränkungen hinzu, über welche man meinen früheren Aufsatz und die §§ 8, 9 dieses Abschnittes vergleichen mag.

Sodann erscheint bei Beltrami die Mannigfaltigkeit constanter Krümmung als durch eine quadratische Gleichung aus einer gewöhnlich metrischen Mannigfaltigkeit von einer Dimension mehr ausgeschieden; während in meiner früheren Arbeit und auch hier von einer solchen umfassenderen Mannigfaltigkeit nicht die Rede ist. Hiermit hängt eine nachm einer Auffassung zu ändernde Behauptung bei Beltrami zusammen, auf die ich hier kurz eingehen will, um den Gegenstand wenigstens berührt zu haben, wenn er auch den Gang der allgemeinen Betrachtung unterbricht. Es heisst dort: in der Mannigfaltigkeit von constantem positiven Krümmungsmasse gelte nicht allgemein das Axiom von der Geraden, d. h. die Forderung, dass die geodätische Linie durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt sei. Beltrami's Ueberlegung ist dabei etwa folgende: Man betrachte eine Kugel als Bild einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von constantem positiven Krümmungsmasse; ihre grössten Kreise repräsentiren die geodätischen Linien. Ein grösster Kreis ist nun im Allgemeinen durch zwei seiner Punkte bestimmt, nicht aber, wenn diese Punkte einander diametral gegenüber stehen. Aehnlich wird es, so schliesst Beltrami, überhaupt bei Mannigfaltigkeiten auch von mehr Dimensionen sein, die positives Krümmungsmass besitzen. — Aber die Kugel ist nach den Auseinandersetzungen meines vorigen Aufsatzes (§ 10.) nicht das einfachste Bild für eine Mannigfaltigkeit von positivem constantem Krümmungsmasse, sondern dies wird durch die Strahlen eines Strahlenbündels vorgestellt, wobei die von den Strahlen gebildeten Ebenen die geodätischen Curven vertreten. Eine solche Ebene ist vollständig durch zwei der Strahlen bestimmt. Wenn es auf der Kugel nicht so ist, so liegt das daran, weil sie vermöge einer *zweideutigen* Verwandtschaft auf ihr centrales Strahlenbündel bezogen ist. Wollte man ein Strahlenbündel auf eine beliebig gelegene Fläche n^{ten} Grades in gleicher Weise beziehen, so dass als Abstand zweier Punkte der Fläche der Winkel erscheint, den ihre Verbindungsgeraden mit dem Centrum des Bündels einschliessen, so würden gelegentlich n Punkte nicht ausreichen, um eine geodätische Curve eindeutig zu bestimmen. Aber das würde in ganz ähnlicher Weise bei anderen Massbestimmungen, auch der Massbestimmung von constantem negativem Krümmungsmasse der Fall sein können und hängt mit dem positiven constanten Krümmungsmasse als solchem gar nicht zusammen*).

Endlich mag auch noch die folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden, die bestimmt ist, die Fruchtbarkeit der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten constanten Krümmungsmasses auch für andere Fragen, als diejenigen, welche man gewöhnlich mit ihr in Verbindung bringt, hervorzuheben, und die zugleich die Aussage, dass ähnliche Transformationsgruppen identische Behandlungsweisen nach sich ziehen, illustrirt. Jede Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit, welche die linearen Transformationen in Betracht zieht, die eine quadratische Gleichung ungeändert lassen, muss nach dieser Behauptung mit der Behandlung der Mannigfaltigkeit als einer solchen von constanter Krümmung übereinstimmen. Nun aber habe ich bei einer früheren Gelegenheit gezeigt (diese Annalen V, 2), dass die Theorie der binären Formen eine Transformationsgruppe benutzt, die mit der Gruppe der linearen Transformationen eines Kegelschnittes in sich selbst ähnlich ist, dass ein Gleiches ferner stattfindet mit den collinearen und dualistischen Umformungen des Raumes und den linearen Transformationen einer quadratischen Gleichung zwischen fünf (sechs homogenen) Variabeln in sich selbst. Man muss zu diesem Zwecke als Element der geraden Linie nur das Punktepaar, als Element des Raumes den linearen Linien-Complex betrachten. Wir werden dieses Resultat jetzt so aussprechen können: *Die Theorie der binären und quaternären Formen ist bez. identisch mit der Theorie einer Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses von zwei und von fünf Dimensionen.* Jede Eigenschaft binärer Formen also ist auch eine Eigenschaft der Nicht-Euklidischen Geometrie in der Ebene, und umgekehrt. Die hiermit angedeutete interessante Analogie weiter auszuführen, ist hier nicht der Ort. Aber es sei noch einmal betont, dass so schlechthin ausgesprochen, wie vorstehend geschehen, die Analogie nur gilt, sowie von dem Unterschiede von Reell und Imaginär abstrahirt wird; auch sind, was nicht ausdrücklich erwähnt wurde, die vorkommenden quadratischen Gleichungen als allgemeine ihrer Art d. h. als Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante vorausgesetzt.

---

*) Wenn es im Raume vom Krümmungsmasse Null keine geschlossene Fläche giebt von constantem positivem Krümmungsmasse, auf der sich die geodätischen Linien in weniger als zwei Punkten schneiden, so hat man darin vielmehr eine Eigenschaft der dem Raume beigelegten Massbestimmung zu erblicken.

§ 7.

Ableitung des Begriffs einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse aus demjenigen der projectivischen Mannigfaltigkeit.

Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen begründen nun die folgende Methode, um zu der Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung zu gelangen:

1) Man entwickele die projectivische Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, im Anschluss daran den Begriff algebraischer Gebilde und complexer Elemente.

2) Man gründe auf ein Gebilde, welches durch eine quadratische Gleichung (von nicht verschwindender Determinante) zwischen den projectivischen Coordinaten dargestellt wird, zunächst ohne auf den Unterschied von Reell und Imaginär zu achten, die Cayley'sche Massbestimmung.

3) Man beschränke sich auf die Betrachtung quadratischer Gleichungen mit reellen Coefficienten, und untersuche, welche besonderen Eigenschaften die auf eine solche Gleichung gegründete Massbestimmung für die reellen Elemente besitzt je nach der *Art* der gegebenen Gleichung. Unter der Eintheilung der quadratischen Gleichungen mit reellen Coefficienten in *Arten* ist dabei die Unterscheidung derselben nach ihrem Verhalten gegenüber reellen Umformungen in die Summe von Quadraten gemeint. Bei jeder solchen Umformung ist bekanntlich der Unterschied in der Zahl der resultirenden positiven und negativen Quadraten ein constanter, und hierauf gründet sich die fragliche Eintheilung.

Hat die zu Grunde gelegte und auf die Summe von Quadraten transformirte Gleichung lauter übereinstimmende Zeichen, so ergiebt die auf sie gegründete Cayley'sche Massbestimmung die Vorstellung der Mannigfaltigkeit von constanter *positiver* Krümmung. Die constante *negative* Krümmung resultirt, wenn nur ein Zeichen von den übrigen verschieden vorausgesetzt wird. Die auf quadratische Gleichungen der übrigen Arten gegründeten Massbestimmungen finden in der Theorie der Mannigfaltigkeiten von constanter Krümmung, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, keine Stelle. Denn bei der letzteren setzt man von vorneherein voraus, dass die Entfernung reeller consecutiver Elemente reell sei, man nimmt entsprechend das Bogenelement als eine *definite* quadratische Form der Coordinaten-Differentiale an, und diese Annahme passt nicht auf die noch übrigen Arten von quadratischen Gleichungen. Um diese Verhältnisse deutlich zu übersehen, denke man an die Cayley'sche Massbestimmung, die man im Raume auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann. Ist die Fläche eine imaginäre, so hat man die positive Krümmung, ist sie ein Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid, so herrscht im Innern die negative Krümmung. Ist aber die Fläche ein einschaliges Hyperboloid, so giebt es keine Partie des Raumes, von deren Punkten aus nicht reelle Kegel an die Fläche gingen; diese Kegel bezeichnen Fortschreitungsrichtungen von der Länge Null; das Bogenelement wird nicht mehr durch eine definite Form der Differentiale dargestellt (vergl. hierzu die §§ 11., 12., 16., 18. meines früheren Aufsatzes).

Auf diese Weise ist der Begriff einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse gewonnen. Man mag hinterher die Untersuchung durchführen, welche Verhältnisse in einer Mannigfaltigkeit durch die blosse Forderung der freien Beweglichkeit starrer Körper definirt werden. Es ist diese freie Beweglichkeit eine Eigenschaft der Cayley'schen Massbestimmung; die Untersuchung zeigt, dass ihre Annahme auch nothwendig zur Cayley'schen Massbestimmung hinführt*). Dabei erhält man zunächst *alle* Fälle der Cayley'schen Massbestimmung und die beiden, gewöhnlich allein betrachteten, erscheinen erst als die einzig möglichen, wenn man die Forderung hinzufügt, dass das Bogenelement durch eine definite Form der Differentiale dargestellt wird (oder eine äquivalente Forderung).

In den nun folgenden beiden Paragraphen mögen einige Bemerkungen ihre Stelle finden, welche mit dem Vorhergehenden wenig zusammenhängen, die aber einmal als eine Ergänzung meines vorigen Aufsatzes in einzelnen Punkten zu betrachten sind, andererseits auch bei dem zweiten hier folgenden Abschnitte vorausgesetzt werden müssen.

§ 8.

Ableitung der projectivischen Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung.

Der vorhin skizzirte Weg, vermöge dessen man von den projectivischen Vorstellungen zu der Vorstellung eines constanten Krümmungsmasses gelangt, zeichnet vor, wie das Umgekehrte zu leisten ist und es mag hier nur kurz die hauptsächliche dabei zu benutzende Formel hingestellt werden. Dabei sei es gestattet, den Ausdruck so zu wählen, dass er sich an das für zwei oder drei Dimensionen in meinem früheren Aufsatze in der Ebene und im Raume aufgestellte

*) Man kann diesen Beweis sehr einfach stellen, worauf ich gelegentlich zurückzukommen gedenke.

Bild anschliesst. Wir denken uns also in der Ebene oder im Raume Massverhältnisse gegeben, wie sie sich unter der Annahme constanter Krümmung gestalten; die gerade Linie sei als kürzeste Linie zwischen zwei Punkten definirt. Wie bestimmt man diejenigen Coordinaten, in welchen die Gerade durch lineare Gleichungen ausgedrückt wird? Aus der projectivischen Geometrie ist bekannt, dass die bez. Coordinaten die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse vorstellen und die Frage kommt also auf die folgende zurück: *Welche Function der gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten einer Geraden ist deren Doppelverhältniss?*

Seien vier Punkte einer Geraden: x, y, z, t gegeben. Auf der Geraden befinden sich gemäss der Cayley'schen Vorstellung zwei unendlich ferne Punkte o, o' und es ist die Entfernung etwa von x und y:

$$(x, y) = c \,.\, \log\,[x, y, o, o'],$$

wo c eine charakteristische Constante*) und $[x, y, o, o']$ das Doppelverhältniss von x, y zu o, o' bedeutet. Hieraus:

$$[x, y, o, o'] = e^{\frac{(xy)}{c}}$$

Nun ist aber:

$$[x, y, o, o'] = 1 - [x, o, y, o'];$$

ferner:

$$[x, y, z, t] = \frac{[x, o, z, o']\,[y, o, t, o']}{[x, o, t, o']\,[y, o, z, o']}.$$

Also:

$$[x, y, z, t] = \frac{\left(e^{\frac{(x,\,z)}{c}} - 1\right).\left(e^{\frac{(y,\,t)}{c}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{(x,\,t)}{c}} - 1\right).\left(e^{\frac{(y,\,z)}{c}} - 1\right)}.$$

und als diese Function der Entfernungen vier in gerader Linie befindlicher Punkte ist also das Doppelverhältniss zu definiren, — womit der Uebergang zur projectivischen Geometrie vermittelt ist**). Das

---

*) $-\frac{1}{4c^2}$ ist das Krümmungsmass.

**) Man kann, da für 4 in gerader Linie liegende Punkte offenbar

$$\frac{e^{\frac{(x,\,z)}{2c}} . e^{\frac{(y,\,t)}{2c}}}{e^{\frac{(x,\,t)}{2c}} . e^{\frac{(y,\,z)}{2c}}} = 1,$$

die Formel des Textes auch so schreiben:

$$[x, y, z, t] = \frac{\left(e^{\frac{(x,\,z)}{2c}} - e^{-\frac{(x,\,z)}{2c}}\right).\left(e^{\frac{(y,\,t)}{2c}} - e^{-\frac{(y,\,t)}{2c}}\right)}{\left(e^{\frac{(x,\,t)}{2c}} - e^{-\frac{(x,\,t)}{2c}}\right).\left(e^{\frac{(y,\,z)}{2c}} - e^{-\frac{(y,\,z)}{2c}}\right)}$$

heisst: hat man unter Voraussetzung constanten Krümmungsmasses irgend ein Formelsystem, welches gestattet, die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, nennt dann die aus den Entfernungen von vier Punkten einer kürzesten Linie nach der vorstehenden Formel gebildete Function ein Doppelverhältniss, führt endlich eine auf derartige Doppelverhältnisse gegründete Coordinatenbestimmung ein, so wird die Gleichung der kürzesten Linie linear, und die projectivische Behandlung kann beginnen.

§ 9.

Besondere Betrachtung der reellen Elemente. Einführung idealer Elemente.

Sei wieder in der Ebene, die uns die Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung überhaupt vertreten soll, eine auf einen Kegelschnitt gegründete projectivische Massbestimmung gegeben, so mögen wir zuerst eine metrische Coordinatenbestimmung treffen, etwa indem wir den Punkt durch seine Abstände von zwei festen Geraden definiren, sodann eine zweite, projectivische Coordinatenbestimmung, nach Anleitung des vorigen Paragraphen.

Ist das constante Krümmungsmass positiv, so werden den reellen Coordinatenwerthen der einen Art immer reelle Coordinatenwerthe der anderen entsprechen, und zwar in der Weise, dass zu jedem Paare metrischer Coordinaten ein Paar projectivischer zugehört, umgekehrt aber zu jedem Paare projectivischer unendlich viele Paare metrischer, da der Abstand zweier Punkte eine reelle Periode hat, die man beliebig oft zufügen kann (vergl. § 11. des früheren Aufsatzes).

Ist dagegen das Krümmungsmass negativ, so entsprechen reellen metrischen Coordinaten immer auch reelle projectivische, nicht aber umgekehrt. Die Punkte nämlich, welche ausserhalb des dann reellen Fundamental-Kegelschnittes liegen, bilden mit den Punkten innerhalb reelle Doppelverhältnisse, haben aber von ihnen imaginäre Abstände.

Unter rein analytischem Gesichtspunkte hat dieser Umstand durchaus nichts Merkwürdiges; aber man kann die Frage etwas anders stellen und dann verlangt sie eine besondere Erledigung, die denn hier gegeben werden soll, weil sie im folgenden Abschnitte benutzt wird.

---

und setzt man nun, wie bei der gewöhnlichen Winkelbestimmung (vergl. meinen früheren Aufsatz), $c = \frac{2}{\sqrt{-1}}$, so kommt die bekannte Formel:

$$[x, y, z, t] = \frac{\sin(x, z) \cdot \sin(y, t)}{\sin(x, t) \cdot \sin(y, z)}.$$

Gesetzt, man befände sich auf der Ebene von constanter, negativer Krümmung und man könne sich auf derselben frei bewegen; wie wird man geometrisch die Punkte, welche reelle Doppelverhältnisse aber imaginäre Abstände besitzen, definiren können? Oder in etwas anderer Form: Giebt es geometrische Eigenschaften des durch Bewegung zugänglichen Gebietes der Ebene, die man in übersichtlicher Weise ausdrückt, wenn man solche *ideale* Punkte — deren Zulässigkeit aus ihrer analytischen Definition erhellt — adjungirt?

Erinnern wir zum Zwecke der Beantwortung an die Art und Weise, wie in der gewöhnlichen (parabolischen) Geometrie die uneigentlichen Elemente, d. h. die unendlich fernen und die complexen Elemente definirt werden. Der unendlich ferne Punkt ist nur der Repräsentant des durch ihn gehenden Parallelstrahlenbüschels: weil dieser Büschel alle wesentlichen projectivischen Eigenschaften besitzt, die einem Büschel von Geraden zukommen, welche durch einen wirklichen Punkt gehen, ist die Ausdrucksweise: „ein unendlich ferner Punkt" gestattet und brauchbar. Ganz ähnlich ist es mit den Ausdrucksweisen: unendlich ferne Gerade, complexer Punkt, complexe Gerade etc., wie ja hier wohl nicht weiter erörtert zu werden braucht.

Durch einen Process derselben Art kann man nun die in Rede stehenden idealen Punkte, ideale Gerade etc. einführen. Durch den idealen Punkt geht ein Büschel wirklicher Geraden hindurch, allerdings kein geschlossenes, sondern ein begrenztes. Aber diesem Büschel kommen alle projectivischen Eigenschaften zu, welche einem begrenzten Theile eines wirklichen Büschels eigenthümlich sind. Wenn man z. B. ein Vierseit construirt, von welchem vier Ecken auf zwei festen Geraden des Büschels liegen, während sich die fünfte Ecke über eine dritte Gerade des Büschels bewegt, so findet mit der sechsten Ecke (falls diese überhaupt existirt, d. h. nicht schon in das ideale Gebiet fällt) dasselbe mit Bezug auf eine vierte Gerade des Büschels statt etc. Hier anknüpfend kann man rein geometrisch ideale Gerade, ideale Curven etc. definiren, wobei nur Uebung dazu gehört, um sich gerade so sicher in diesen idealen Gebilden wie in den gleichbenannten wirklichen Gebilden zurecht zu finden.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Möglichkeit, auch ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms nach dem Vorgange v. Staudt's die projectivische Geometrie aufzubauen.

§ 1.

Formulirung des Problems.

Der Aufbau der projectivischen Geometrie geschieht bei Staudt*), wie bekannt, durch blosses Betrachten des Ineinanderliegens von Ebenen, Geraden und Punkten. Es werden die verschiedenen Grundgebilde, mit denen die projectivische Geometrie operirt: die gerade Punktreihe, das Ebenenbüschel etc. aufgestellt; dieselben erscheinen vermöge ihres Ineinanderliegens auf einander bezogen, und die Beziehung ist der Art, dass man ohne Weiteres zu dem Begriffe der harmonischen Theilung, weiterhin des Doppelverhältnisses gelangt, womit alle Grundlagen zur Behandlung, namentlich auch zur analytischen**) Behandlung der projectivischen Geometrie gegeben sind. Bei all diesen Entwickelungen wird von Maassbestimmung nicht geredet, aber allerdings wird das Parallelenaxiom vorausgesetzt, weil sonst z. B. zwischen einer geraden Punktreihe und einem Ebenenbüschel kein vollständiges Entsprechen stattzufinden brauchte, sondern das Ebenenbüschel eine ganze Reihe von Ebenen enthalten könnte, welche der Punktreihe gar nicht begegnen.

---

*) Die Geometrie der Lage. 1847. Man vergl. auch Reye's Geometrie der Lage, in welcher die Staudt'schen Betrachtungen in übersichtlicher Form reproducirt sind.

**) Von analytischer Seite hat man die Staudt'schen Untersuchungen nur zu wenig berücksichtigt, wozu die vielfach verbreitete Auffassung beigetragen haben mag, als sei die synthetische Form, nicht die projectivische Auffassungsweise das Wesentliche an der Staudt'schen Geometrie. —

Die Betrachtungen von Staudt's haben eine Lücke, welche nur durch ein bez. Axiom zu überbrücken scheint, wie dies im Texte noch weiter auseinander gesetzt werden soll. Dieselbe Lücke findet sich bei der Ausdehnung der Staudt'schen Methode, wie sie hier beabsichtigt wird, an der entsprechenden Stelle wieder; sie betreffen aber nicht die Ausdehnung, sondern das zu Grunde liegende Original. Geht man, wie im Texte zum Schlusse geschehen soll, von der rein räumlichen Auffassung ab und sucht den analytischen Inhalt der Staudt'schen Betrachtungen, so verschwinden die Schwierigkeiten, und man kann dieselben hierdurch in der Forderung zusammenfassen: *dass man den Punktraum unter dem Bilde einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit soll auffassen können,* eine Voraussetzung, die allen unseren räumlichen Speculationen auch sonst zu Grunde liegt.

Nun hat sich aber ergeben, worüber man den voraufgehenden Abschnitt dieser Arbeit vergleichen mag, dass die projectivische Geometrie auch gilt, wenn man das Parallelenaxiom nicht zugiebt, wenn man vielmehr den Raum als eine Punkt-Mannigfaltigkeit von constantem nicht verschwindendem Krümmungsmasse betrachtet. Nimmt man das Krümmungsmass positiv — die Annahme der elliptischen Geometrie — so gilt die projectivische Geometrie unbeschränkt, während in der gewöhnlichen parabolischen Geometrie, die eine verschwindende Krümmung voraussetzt, zur vollen Geltung der projectivischen Beziehung die Adjunction uneigentlicher Elemente, der unendlich fernen, nothwendig wird. Ist das Krümmungsmass negativ, so müssen ausser den unendlich fernen Elementen noch weitere „ideale" Elemente adjungirt werden, die aber, nach dem letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes dieser Arbeit, eine vollkommen bestimmte rein geometrische Bedeutung haben, so gut wie die unendlich fernen Elemente der parabolischen Geometrie.

Ist in dem durch diese Bemerkungen beschränkten Sinne die projectivische Geometrie unabhängig von dem Parallelenaxiome giltig, so muss es möglich sein, dieselbe ohne vorherige Entscheidung über dieses Axiom aufzubauen; und wenn bei v. Staudt das Axiom mit in die Prämissen aufgenommen wird, so kann dasselbe nur eine beiläufige, keine wesentliche Rolle spielen. Immerhin wäre es möglich, dass der durch Staudt eingeschlagene Gang das Axiom wesentlich benutzte, aber es müsste sich dann der Gang so abändern lassen, dass das nicht mehr geschieht. Im Nachfolgenden soll nun gezeigt werden, dass man bei Nichtannahme des Parallelenaxioms den von Staudt eingehaltenen Gang *nicht* wesentlich zu modificiren braucht, eine Behauptung, die durch die vorhergehenden Auseinandersetzungen so wahrscheinlich gemacht wird, dass ich eine ausgeführte Begründung derselben für kaum nöthig erachten würde, hätten sich nicht gerade dieser Behauptung gegenüber, die ich in meinem früheren Aufsatze aussprach (§ 17.), von verschiedenen Seiten her Zweifel geltend gemacht.

Ein Aufbau der projectivischen Geometrie vor Entscheidung über das Parallelenaxiom ist aber desshalb für die theoretische Speculation von Werth, weil man dann beim Raume in ähnlicher Weise die Massbestimmung einführen könnte, wie dies in § 7. des vorhergehenden Abschnittes für Zahlenmannigfaltigkeiten geschah: man würde den Raum zunächst als eine projectivische Mannigfaltigkeit, sodann erst als eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung bezeichnen, und endlich durch Einführung des Parallelenaxioms den Werth des Krümmungsmasses auf Null festsetzen. Man vergleiche hierzu den letzten Paragraphen (§ 18.) meines früheren Aufsatzes, wo ich diese Art, die

Axiome der Geometrie einzuführen, etwas näher auseinandersetze; eine ausführlichere Darlegung werde ich vielleicht bei einer anderen Gelegenheit geben können. Ich will übrigens, ausdrücklich bemerken, um Missverständnissen vorzubeugen, dass dieser theoretisch mögliche Weg nach meiner Meinung durchaus nicht theoretisch nothwendig ist, dass er unter vielen möglichen Wegen eben nur einen constituirt.

Um mich zu überzeugen, dass Staudt's Betrachtungen das Parallelenaxiom nicht wesentlich benutzen, wie ich vermuthete, und zugleich, um allen Beschränkungen, die aus der Nicht-Annahme des Parallelenaxioms hervorgehen können (wie z. B. in der hyperbolischen Geometrie), aus dem Wege zu gehen, stellte ich mir die Frage, ob man nicht Alles, was Staudt braucht, leisten kann, wenn man sich bei den erforderlichen Constructionen das Gesetz auferlegt, nicht aus einem *gegebenen begrenzten* Raume hinauszutreten. Man denke sich also innerhalb eines begrenzten Raumes die Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer gegenseitigen Lagenbeziehung gegeben. Ob ausserhalb des gegebenen Raumstückes diese Gebilde überhaupt noch vorhanden sind, bleibe dahin gestellt; um so mehr, welche Beziehungen sie eventuell zu einander haben. Wird es dann noch möglich sein, im Anschlusse an von Staudt's Betrachtungsweisen innerhalb dieses Raumes die Geltung der projectivischen Beziehungen zu erschliessen?

In dieser Form, die ich bereits in § 17. meiner vorigen Arbeit bezeichnete, soll im Folgenden die Frage über die Unabhängigkeit der projectivischen Betrachtung von der Parallelentheorie untersucht werden.

§ 2.

Erweiterung des Problems. Aufstellung eines allgemeinen der Analysis situs angehörigen Satzes.

Das im vorigen Paragraphen aufgestellte Problem mag vorerst noch verallgemeinert werden. Der Ausgangspunkt der Staudt'schen Betrachtung ist die Voraussetzung der Ebenen und Geraden, aber von deren Eigenschaften kommen, sofern man von dem hinzutretenden Parallelenaxiome absieht, wesentlich nur in Betracht, dass durch drei beliebig angenommene Punkte eine und nur eine Ebene geht, und dass durch zwei Punkte ein Ebenenbüschel geht, dessen Ebenen alle dieselbe Durchschnittsgerade besitzen. Ist dem so, so wird man, die Richtigkeit der im vorigen Paragraphen vorgetragenen Behauptung zugegeben, die Staudt'schen Ueberlegungen auf jedes System von Flächen und Curven übertragen können, welches, schlechthin ausgesprochen, dieselben Lagenbeziehungen in einem gegebenen begrenzten Raume besitzt; mit anderen Worten, man wird den folgenden Satz aufstellen können:

„In einem begrenzten Raume sei eine unendliche Zahl überall stetig gekrümmter, nur durch die Begränzung des Raumes geendigter Flächen gegeben, welche die folgende Gruppirung besitzen:

1) Durch drei beliebig angenommene Punkte des gegebenen Raumes geht eine und nur eine Fläche des Systems hindurch.

2) Die Durchschnittscurve, welche zwei Flächen des Systems gemein haben können, gehört allen Flächen an, die zwei Punkte der Curve enthalten.“

„*Für ein solches System von Flächen und Curven gilt die projectivische Geometrie in demselben Sinne wie gemäss den gewöhnlichen Vorstellungen für das System der Ebenen und Geraden in einem beliebig begrenzten Raume.* Anders ausgesprochen: *Man wird den Punkten des gegebenen Raumes in der Art Zahlen zuordnen* (*Coordinaten ertheilen*) *können, dass die Flächen des Systems durch lineare Gleichungen dargestellt werden.*“

Die hiermit formulirte Behauptung muss, falls sie richtig ist, vor allen Definitionen von Ebene, Gerade u. s. w. bewiesen werden können, denn sie benutzt nur die Begriffe der stetig gekrümmten Fläche, der continuirlich verlaufenden Curve, die den Begriffen von Ebene und Gerade vorausgehen. Bei dem Beweise, wie er in den nächsten Paragraphen vorgetragen werden soll, sind dann auch die Ebenen und Geraden des Raumes nicht vorausgesetzt.

Dass es überhaupt Flächensysteme der hier gemeinten Art giebt, zeigt das Beispiel der Ebenen der gewöhnlichen Geometrie. Unbegrenzt viele solcher Flächensysteme erzeugt man, indem man sich die Ebenen in einem beliebig begrenzten Raume construirt denkt, und dann das Raumstück einer durch stetige Processe herbeiführbaren Deformation unterwirft. Und die vorgetragene Behauptung kann geradezu dahin ausgesprochen werden: dass jedes den Vorraussetzungen des Satzes entsprechende Flächensystem aus dem Systeme der Ebenen in dieser Weise erzeugt werden kann.

Was diesen Satz sehr merkwürdig macht, ist, dass ein analoger Satz, den man für die Ebene formuliren möchte, nicht existirt. Ist nämlich in einem begrenzten Theile der Ebene ein Curvensystem von der Eigenschaft gegeben, dass durch je zwei Punkte eine und nur eine Curve hindurchgeht, so bedarf es noch weiterer Bedingungen, ehe die Curven durch lineare Gleichungen zwischen Punkt-Coordinaten dargestellt werden können. Diesen negativen Satz mag man aus einem Theoreme von *Beltrami* ableiten. Ein Curvensystem der gemeinten Art erhält man nämlich z. B., wenn man auf einer begrenzten einfach zusammenhängenden Fläche die geodätischen Curven zieht und dann die Fläche auf einen Theil der Ebene beliebig ausbreitet. Aber

Beltrami zeigt*), dass nur den Flächen von constantem Krümmungsmasse die Eigenschaft zukommt, sich so auf die Ebene übertragen zu lassen, dass sich alle geodätischen Curven mit geraden Linien decken. Man darf es daher auch nicht, wie seither wohl geschehen, als einen *Kunstgriff* von Staudt's auffassen, wenn er behufs Begründung der projectivischen Geometrie auch der Ebene die stereometrischen Verhältnisse in Betracht zog; es entspricht sein Ausgangspunkt durchaus dem Wesen der Sache: es gilt für die geraden Linien der Ebene, falls man im Anschluss an Staudt die Betrachtung der Massverhältnisse ausschliesst, nur desshalb die projectivische Geometrie, weil Ebene und Gerade als Glieder eines räumlichen Systems aufgefasst werden können.

Ich werde nun den aufgestellten Satz unter engstem Anschlusse an die Staudt'schen Betrachtungen rein geometrisch erweisen, wobei, wie bereits angedeutet, an einer Stelle (§ 5) eine Schwierigkeit auftritt, die sich auch bei Staudt findet und die nur durch ein Axiom zu beseitigen scheint: durch das Axiom, *dass man einen Punkt, der durch einen convergenten unendlichen Process erzeugt werden soll, als wirklich existirend annehmen darf.* Sodann gebe ich in den letzten Paragraphen einen analytischen Beweis des in Rede stehenden Satzes, der diese Lücke nicht mehr hat, insofern bei ihm der Raum als von vornherein unter dem Bilde einer Zahlenmannigfaltigkeit gegeben erscheint. Dieser analytische Beweis deckt zugleich den Grund auf, wesshalb der Satz für den Raum, das Gebilde von drei Dimensionen, gilt, nicht aber mehr für die Ebene, das Gebilde von zwei Dimensionen.

Der Einfachheit wegen denke ich im Folgenden den Raum, in welchem die Flächen gegeben sind, sowie die Flächen selbst als einfach zusammenhängend; die Fälle, in denen ein mehrfacher Zusammenhang stattfindet, können auf diese Annahme zurückgeführt werden, indem man aus dem gegebenen Raume zunächst ein einfach zusammenhängendes Stück ausschneidet, innerhalb dessen die gegebenen Flächen einfach zusammenhängend sind.

§ 3.

Die Grundgebilde. Beziehung derselben aufeinander.

Das vorhin eingeführte Flächensystem heisse das System der Flächen F. Die Durchschnittscurve zweier F, falls eine solche existirt, heisse K.

Aus den Punkten des gegebenen Raumes, den Curven K und den Flächen F setzen sich eine Reihe von Grundgebilden zusammen. Grund-

---

*) In den Annali di Matematica. Serie 1. t. VII. p. 185.

gebilde erster Stufe giebt es drei: die Curve K, als Ort für Punkte aufgefasst; das Büschel der Curven K, welche innerhalb einer F durch einen Punkt gehen; das Büschel der F, welche eine K enthalten. Man hat ferner vier Grundgebilde zweiter Stufe: die F, aufgefasst als Punktgebilde oder als Aggregat von Curven K, und die Gesammtheit der F, wie die Gesammtheit der K, die durch einen Punkt gehen: Alles, wie in der gewöhnlichen projectivischen Geometrie.

Aber ein Unterschied tritt hinzu wegen der Begrenztheit des gegebenen Raumes. Unter den Grundgebilden finden sich *begrenzte und unbegrenzte*. Begrenzt ist z. B. die Reihe der auf einer K befindlichen Punkte, unbegrenzt das Büschel von F, die durch eine K hindurchgehen.

Zwei Grundgebilde heissen aufeinander *bezogen*, wenn das eine ein Schnitt des anderen ist, oder wenn beide auf ein anderes als Schnitte bezogen sind. Es heisst z. B. das Bündel der durch einen Punkt gehenden K auf eine F als Punktgebilde bezogen, wenn man jedem Punkte der F diejenige K zuordnet, welche durch ihn hindurchgeht etc. Diese Beziehung ist ausserdem, was man *unvollständig* nennen mag, insofern allerdings zu jedem Punkte der F eine K des Bündels gehört, nicht aber umgekehrt. Unmittelbar vollständig aufeinander bezogen sind nur das Büschel der durch eine K gehenden F und das Büschel der durch einen Punkt gehenden K, die in einer durch den Punkt hindurchgehenden F verlaufen.

§ 4.

Definition harmonischer Elemente.

Zu drei Elementen A, B, C eines unbegrenzten Grundgebildes erster Stufe kann man vermöge einer Construction, die der in der gewöhnlichen projectivischen Geometrie angewandten Vierseits-Construction analog ist, ein bestimmtes viertes Element D construiren, welches das *vierte harmonische* zu A, B, C genannt werden soll.

Um sich hiervon zu überzeugen, wollen wir den folgenden beschränkteren Satz für die Punktreihe K beweisen, deren Anschauung uns geläufiger ist als die Anschauung der unbegrenzten Grundgebilde erster Stufe:

Sind A, B, C Punkte einer K, *welche in der alphabetischen Reihenfolge einander auf der K folgen*, so führt die Vierseitsconstruction zu einem bestimmten vierten Elemente D, welches zu A, B, C harmonisch heisst. Die Reihenfolge von A, B, C muss hier desswegen besonders festgesetzt werden, weil sonst der gesuchte Punkt D gelegentlich über die Begrenzung des gegebenen Raumes hinausfallen, d. h. gar nicht vorhanden sein könnte. Zum Zwecke des für unbegrenzte Grundgebilde aufgestellten Satzes genügt es aber auch, den nun vorliegenden Satz mit seiner Beschränkung zu beweisen; denn man überzeugt sich leicht: Wenn A, B, C drei Elemente eines F-Büschels sind, so kann man eine K immer so legen, dass die Schnittpunkte mit A, B, C beliebige Reihenfolge haben. Wenn drei Elemente A, B, C eines K-Büschels gegeben, so würde man dasselbe zunächst auf ein F-Büschel beziehen und dann dieses durch eine K in gehöriger Weise schneiden.

Den nun mit Bezug auf die Punktreihe K aufgestellten Satz beweist man genau im Anschlusse an das gewöhnliche Verfahren der geometrischen Lage. Es darf an dasselbe hier kurz erinnert werden:

Sind A, B, C Punkte einer Geraden, so lege man durch A eine neue Gerade. Durch zwei Punkte β, γ derselben und B und C lege man die beiden Geradenpaare βB, γC und βC, γB, welche bezüglich die beiden Schnittpunkte α und δ besitzen. Dann schneidet die Verbindungsgerade $\alpha\delta$ die ursprünglich gegebene Gerade in einem *festen* Punkte D, dem sogenannten vierten harmonischen Punkte zu A, B, C.

Der Beweis, dass der Punkt D von den bei der Construction willkürlichen Elementen unabhängig ist, ist folgender. Construirt man aus A, B, C in einer anderen durch die gegebene Gerade hindurchgelegten Ebene ein neues Viereck α', β', γ', δ', so werden die Verbindungsgeraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ sich in einem Punkte treffen; die beiden Vierecke müssen desshalb Schnitte des nämlichen Vierkants sein; es muss daher auch der Punkt D in beiden übereinstimmen. Wäre das zweite Viereck in derselben durch die gegebene Gerade hindurchgelegten Ebene construirt, wie das erste, so übertrage man es durch Projection auf eine zweite durch die gegebene Gerade gehende Ebene*) und man hat den vorigen Fall.

Genau dieselben Betrachtungen können nun angestellt werden, wenn statt des Systems der Geraden und Ebenen das System der K und F gegeben ist. Die Annahme über die Reihenfolge von A, B, C sichert die Möglichkeit, trotz der Begrenzung unseres Raumes, die nöthige Construction ausführen zu können. Hat man dann zwei Vierecke α, β, γ, δ und α', β', γ', δ' in verschiedenen durch K hindurchgehenden F, so ziehe man die K $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$. Dann folgt ohne Weiteres: Schneiden sich zwei dieser K in einem Punkte, so gehen auch die anderen durch denselben. Aber der Schnittpunkt kann gelegentlich über den gegebenen begrenzten Raum hinausfallen, d. h.

---

*) Statt dessen wird gelegentlich gesagt: so drehe man das Viereck sammt seiner Ebene um die gegebene Gerade in eine neue Lage; aber diese Operation würde man bei dem Systeme der K und F nicht wiederholen können, da zunächst noch nicht bekannt ist (was allerdings später erschlossen wird. § 7.), dass dieses System Transformationen in sich selbst zulässt.

gar nicht vorhanden sein. In dem Falle wird man eins der beiden Vierecke durch Projection auf eine neue durch K gehende F übertragen, und mit diesem Verfahren so lange fortfahren, bis die Verbindungs-Curven K der Ecken des ursprünglichen und des neu construirten Vierecks sich treffen. Es ist das ein Process, der immer zu leisten ist, wie man sich sofort überzeugt, so wie man zwei Vierecke in den bewussten Lagenverhältnissen gezeichnet denkt. Eine ausgeführte Discussion würde nur mit dem Begriffe des Grösser oder Kleiner, nicht aber mit einem Masse eines solchen Unterschiedes zu thun haben. Von zwei Strecken AB, AC einer K heisst AB kleiner als AC, sofern man, um von A nach C zu gelangen, B überschreiten muss.

Man beweist ferner, dass vier harmonischen Elementen eines Grundgebildes bei einer vollständigen Beziehung wieder vier harmonische Elemente entsprechen. Bei einer unvollständigen Beziehung ist das Entsprechende wahr, sofern den vier Elementen des einen Gebildes wirklich vier Elemente des anderen zugeordnet sind.

§ 5.

Projectivische Beziehungen.

Zwei Grundgebilde heissen aufeinander *projectivisch bezogen*, wenn je vier harmonischen Elementen des einen, sofern überhaupt vier entsprechende Elemente im anderen Gebilde vorhanden sind, vier harmonische Elemente des letzteren entsprechen.

Aus dieser Definition schliesst man nun nach Staudt, dass das projectivische Entsprechen zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe durch drei einander entsprechende Elemente A, B, C und A', B', C' festgelegt ist*). Da dieser Schluss, wie bereits angedeutet wurde, in seinem Beweise eine Lücke hat, die nur durch ein Axiom zu überbrücken scheint, so möge es gestattet sein, hier etwas ausführlicher bei demselben zu verweilen. Die bez. Auseinandersetzungen und Forderungen gelten gleichmässig für das System der Ebenen und Geraden, wie für das System der F und K.

Staudt's Schlussweise ist etwa die folgende. Entsprechen einander A, B, C und A', B', C' so auch D und D' die bez. vierten harmonischen Punkte zu A, B, C und A', B', C'; ferner E und E', die vierten harmonischen Punkte zu irgend drei der vier Punkte A, B, C, D bez. A', B', C', D', etc. etc. Die Art der Zuordnung ist hiernach durch die Zuordnung der drei Elemente A, B, C und A', B', C' vollständig gegeben, so wie man zeigen kann, dass man zu jedem

*) Geometrie der Lage. p. 50. Vergl. p. 44 des Reye'schen Buches.

Punkte einer Geraden hingelangen kann, indem man zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen aufsucht, zu irgend drei der so bestimmten vier Punkte wieder den vierten harmonischen u. s. w. Es kann diese Behauptung nur den Sinn haben, dass man jedem Punkte der Geraden durch die wiederholte Construction des vierten harmonischen Punktes beliebig nahe kommen kann, d. h. dass man immer einen entsprechenden Punkt finden kann, der zwischen dem zu bestimmenden Punkte und einem beliebig von ihm verschieden angenommenen inne liegt. Staudt beweist dies, indem er die Absurdität der Annahme zeigt, ein gewisser Punkt sei der letzte, über den die Construction nicht mehr hinausführe. Aber die Annahme, dass es einen letzten durch die Construction erreichbaren Punkt gebe, ist noch willkürlich. Es wäre denkbar, dass der fortgesetzte Process der Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes über eine bestimmte Grenze nicht hinausführte, ohne doch eine letzte Lage für den Punkt zu erreichen. Ueber diese Möglichkeit hilft, soviel ich sehe, nur das Axiom hinweg, *dass es gestattet sein soll, den Grenzpunkt, auch wenn er in dieser Weise durch einen unendlichen Process definirt ist, als fertig vorhanden aufzufassen.* Bei dieser Annahme tritt der Staudt'sche Beweis wieder in Kraft und zeigt die Unmöglichkeit der Existenz von Grenzpunkten.

Dieselben Erwägungen, die hier für die Gerade vorgetragen worden sind, übertragen sich auf die Grundgebilde erster Dimension aus dem Systeme der K und F, wobei man zunächst auf die unbegrenzten Grundgebilde achten wird. Auch bei ihnen wird man ein dem vorhergehenden analoges Axiom hinzuzufügen haben, *was dann als eine Forderung aufgefasst werden kann, der das System der K und F genügen soll.* Diese Forderung ist mit den dem Systeme sonst auferlegten verträglich — das zeigt das Beispiel der gewöhnlichen Geraden und Ebenen —, ob sie aus den früheren zum Theile folgt, bleibe dahin gestellt. Die Definition der projectivischen Beziehung, die so für unbegrenzte Grundgebilde erster Stufe aufgestellt ist, überträgt sich ohne Weiteres auf begrenzte, indem man begrenzte Gebilde projectivisch sein lässt, wenn sie Schnitte projectivischer unbegrenzter Gebilde sind.

§ 6.

Die Geometrie im Grundgebilde zweiter Stufe und im Raume.

Die aufgestellten Principien genügen, um für die unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe, d. h. für das Bündel der durch einen Punkt gehenden K und das Bündel der durch einen Punkt gehenden F die projectivische Geometrie aufzubauen. Man vergleiche hierzu nur etwa die Partieen des Reye'schen Buches (p. 45 ff.), in denen für die als unbegrenztes Grundgebilde gedachte Ebene das Entsprechende durchgeführt wird. Es ist dies wohl der einzige Gedanke, der bei den hier vorgetragenen Dingen nicht ohne Weiteres gegeben war, nämlich der Gedanke, darauf zu achten, dass, auch wenn der Punktraum, der gegeben ist, begrenzt ist, darum doch noch unbegrenzte Grundgebilde erster und zweiter Stufe vorhanden sind, und dass man für *sie* die Betrachtungen durchführen kann, die man sonst in Bezug auf die unbegrenzt angenommene Ebene anstellt.

Namentlich wird man für die unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe nun auch das Gesetz der *Dualität* entwickeln können, welches jetzt dahin auszusprechen ist, dass man in allen Sätzen, die sich auf K und F beziehen, welche durch einen Punkt gehen, statt K und F auch F und K setzen kann.

Durch Uebertragung vom unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe, dem Punkte (als Bündel von K und F gedacht), gewinnt man die Geometrie auf dem begrenzten Grundgebilde zweiter Stufe der (als Punktaggregat oder als Ort für Curven K gedachten) F. Aber die projectivischen Beziehungen und die dualistischen gelten auf der F nur dann uneingeschränkt, wenn man der F *ideale* Punkte und Curven K adjungirt, entsprechend denjenigen Curven K und Flächen F des angenommenen Bündels, von dem aus man die projectivisch dualistischen Beziehungen auf die F überträgt, welche die F nicht treffen. Es ist ersichtlich, wie diese idealen Elemente der F, die ihrem Wesen nach durchaus mit den idealen Elementen übereinstimmen, von denen im letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes die Rede war, unabhängig sind von dem Bündel, von dem man gerade ausging. Der Grund liegt darin, dass nach Voraussetzung die F von allen anderen F in denselben K, d. h. von jedem Bündel von F in demselben Curvensystem K geschnitten wird. Der ideale Punkt der gegebenen F z. B. ist zunächst definirt durch eine irgend einem Bündel angehörige Curve K, welche die F nicht trifft. Aber durch die K geht ein Büschel von F und ein begrenzter Theil des Büschels begegnet der gegebenen F. Auf der letzteren erhalten wir also eine Schaar von Curven K, welche dieselben Eigenschaften haben, besonders hinsichtlich der Construction des vierten harmonischen Elementes, wie ein begrenzter Theil eines durch einen Punkt gehenden Büschels von Curven K. Legt man jetzt durch irgend einen Punkt und diese Curven K die bezüglichen F, so werden diese sich nach einer K schneiden. Der ideale Punkt, den das erst angenommene Bündel lieferte, stimmt also mit dem idealen Punkte, den ein beliebiges anderes Bündel ergiebt, überein.

Es ist hiernach auch ersichtlich, wie der ideale Punkt der gegebenen F, der hierdurch definirt ist, nicht bloss als dieser F angehörig, sondern als *idealer Raumpunkt* gedacht werden muss. Damit ist dann alles Material gegeben, um die projectivische Geometrie auch des Raumes zu entwickeln, und es ist der Beweis des oben aufgestellten Hauptsatzes:

dass für das bez. Flächen- und Curvensystem die projectivische Geometrie gilt

geleistet.

§ 7.

Einführung der Doppelverhältnisse und homogenen Coordinaten.

In diesem Paragraphen mag noch kurz angegeben werden, wie man an den bisher auseinandergesetzten synthetischen Aufbau der projectivischen Geometrie die analytische Behandlung derselben zu knüpfen hat. Es enthält dieser Paragraph also nichts mehr, was sich specifisch auf das System der K und F bezieht; und er soll hier nur seine Stelle finden, weil die betreffenden Ueberlegungen, die man wesentlich alle den Staudt'schen *Beiträgen zur Geometrie der Lage* entnehmen kann, nur zu wenig bekannt zu sein scheinen.

Die Definition der Projectivität zweier Grundgebilde erster Stufe ergiebt, dass zwischen je vier Elementen eines solchen Gebildes eine constante Beziehung obwaltet. Drei Elemente sind noch von einander unabhängig; die Beziehung zwischen vier Elementen kann man daher unter dem Bilde einer reellen *Zahl* auffassen*). Man bezeichne drei Elemente A, B, C als Grundelemente des Gebildes, auf die übrigen Elemente D des unbegrenzt gedachten Gebildes vertheile man nach einem willkürlichen Gesetze die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist jeder Combination $ABCD$ eine Zahl zugeordnet, welche sie charakterisirt; man hat einen Massstab, um die Beziehung $ABCD$ zu messen. Hat man bei *einem* Grundgebilde erster Stufe diese Bestimmung getroffen, so überträgt sie sich durch Projection auf alle anderen.

Man wird darnach streben, diese willkürliche Scala durch eine gesetzmässig erzeugte zu ersetzen, und dies hat Staudt in den Paragraphen 19, 20 seiner Beiträge zur Geometrie der Lage geleistet. Er ordnet dort den Beziehungen $ABCD$, oder, wie er sagt, den *Würfen* $ABCD$ dieselben Zahlen zu, welche man ihnen in der auf metrischen Definitionen fussenden gewöhnlichen Behandlungsweise beilegt, wo sie als *Doppelverhältnisse* aufgefasst werden**). Es genügt zu diesem Zwecke, die Würfe $ABCA$, $ABCB$, $ABCC$ bez. durch 0, 1, ∞ zu bezeichnen und dann eine Operation anzugeben, vermöge deren man

*) Hier kehrt unter einer etwas anderen Form das Axiom des § 5. wieder.

**) Dasselbe kann man durch die von Möbius in seinem barycentrischem Calcul vorgetragene Theorie der geometrischen Netze erreichen.

zwei Würfe $ABCD$ und $ABCD'$ addirt. Dabei wird der harmonische Wurf gleich -1, und es finden Relationen statt, wie

$$(ABCD) \, . \, (ADCB) = 1 \quad \text{etc.}$$

Von den Doppelverhältnissen steige man zu den homogenen Coordinaten auf, die nichts sind als die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse. Es handelt sich dann besonders darum, einzusehen, dass durch eine lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten in der Ebene eine Gerade, im Raume eine Ebene dargestellt wird. Diese Aufgabe hat Fiedler neuerdings in sehr einfacher und übersichtlicher Weise erledigt, indem er von vornherein neben den homogenen Punktcoordinaten auch die homogenen Liniencoordinaten, bez. Ebenencoordinaten einführte*). Die lineo-lineare Gleichung zwischen den Coordinaten vereinigt gelegener Punkte und Geraden (Ebenen) ist nur der Ausdruck für gewisse Beziehungen, die zwischen den in der Figur (die durch Hinzufügen eines Coordinaten-Dreiecks bez. -Tetraeders entsteht) auftretenden Doppelverhältnissen stattfinden**).

Die hiermit angedeuteten Ueberlegungen kann man alle, statt für das System der Geraden und Ebenen, für das System der K und F entwickeln, da für das letztere ebenso die projectivische Geometrie gilt. Und damit ist also die zweite Form erwiesen, welche wir in § 2 unserem Satze ertheilt hatten, die wir hier noch einmal wiederholen:

Man kann den Punkten des ursprünglich gegebenen begrenzten Raumes in der Weise Zahlen zuordnen, dass die Flächen F (die Curven K) durch lineare Gleichungen dargestellt werden.

Als Folgerungen, die sich von selbst aufdrängen, seien erwähnt, dass man nun in Bezug auf die Flächen F von algebraischen Gebilden, von imaginären Elementen, von collinearen und dualistischen Transformationen reden kann.

§ 8.

Analytischer Beweis des Hauptsatzes.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, wie sich der in § 2. aufgestellte Hauptsatz viel einfacher und ohne Zuhülfenahme besonderer Axiome beweisen lässt, wenn man die Voraussetzung macht, dass es gestattet sei, *den Punktraum unter dem Bilde einer dreifach ausge-*

---

*) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XV, 2. (1871). — Die darstellende Geometrie. Leipzig. 1871. — Bei Fiedler sind die Würfe als Doppelverhältnisse definirt; es ist das aber für seine weiteren Auseinandersetzungen ohne principielle Bedeutung, da er nur solche Relationen zwischen Würfen benutzt, welche man, nach der im Texte gemachten Andeutung, auch bei Staudt begründet findet.

**) Vergl. hierzu auch Hamilton's Elements of Quaternions. p. 24—32.

dehnten Zahlen-Mannigfaltigkeit aufzufassen. Ein an diese Voraussetzung anknüpfender Beweis enthält die Erweiterung unseres Satzes auf Zahlen-Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen in sich; zugleich lässt er übersehen, warum für zwei Dimensionen, wie in § 2. hervorgehoben wurde, ein entsprechender Satz noch nicht gilt.

Den Vortheil, den man durch die Annahme, man könne den Punktraum als eine Zahlen-Mannigfaltigkeit auffassen, in den Beweis des Satzes einführt, ist der, dass man nun über den Begriff des Unendlich-Kleinen verfügt. Für die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus gilt bei beliebiger Coordinatenbestimmung die projectivische Geometrie in demselben Sinne, wie für die Geraden eines Strahlenbündels. Hat man aber ein System von Flächen F und Curven K, wie es in dem Satze des § 2. vorausgesetzt wird, so bezeichnet jede der von einem Punkte aus möglichen Fortschreitungsrichtungen eine der durch den Punkt hindurchgehenden K. *Für das Bündel der durch einen Punkt gehenden K, und, vermöge dualistischer Uebertragung, das Bündel der durch einen Punkt gehenden F gilt also ohne Weiteres die projectivische Geometrie.* Wir haben also von vornherein den Standpunkt gewonnen, der sich bei der rein geometrischen Untersuchung erst in § 6. ergab, noch mehr: es ist auch von vornherein wenigstens für das Bündel von K und F die projectivische Coordinatenbestimmung gegeben, die bei rein geometrischer Betrachtung erst durch besondere Operationen in § 7. entworfen werden musste.

Von der Geometrie im Bündel von F oder K steigt man ähnlich wie in § 6. geschildert wurde, zur Geometrie auf den F und zur Geometrie im Raume auf. Durch eine beliebige F, — sie heisse F' — werden je zwei Bündel von F aufeinander projectivisch bezogen. Denn die Bündel schneiden die F' laut Voraussetzung in dem nämlichen Curvensysteme K. Dabei überträgt sich von dem einen Bündel so gut wie vom anderen auf die F' die Vierseits-Construction; die beiden Bündel, und also überhaupt alle vorhandenen Bündel sind hiernach durch die F' aufeinander projectivisch bezogen w. z. b. Da aber projectivische Beziehung innerhalb eines Bündels bei Anwendung der projectivischen Coordinaten durch lineare Gleichungen bezeichnet wird, so ist ersichtlich, dass man die F' durch lineare Gleichungen zwischen den für zwei Bündel geltenden projectivischen Coordinaten darstellen kann etc. etc.

Betrachtungen derselben Art kann man für Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen anstellen; ist aber die Zahl der Dimensionen auf 2 gesunken, so haben die Betrachtungen nicht mehr denselben Erfolg. Es sei eine Fläche und auf einem Theile derselben ein Curvensystem K gegeben, von der Eigenschaft, dass durch je zwei Punkte des Flächentheils eine und nur eine K geht. Die Fläche, oder vielmehr ihre Punkte sollen unter dem Bilde einer zweifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit gefasst werden können. Dann gilt für die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus die projectivische Geometrie, d. h. vier Fortschreitungsrichtungen haben ein bestimmtes Doppelverhältniss, welches bei keiner stetigen Verzerrung der Fläche geändert wird. Es überträgt sich diese Beziehung auf das durch den Punkt gehende Büschel von Curven K. Man schneide dasselbe durch eine ihm nicht angehörige Curve K' und ziehe nach den Schnittpunkten die einem zweiten Büschel angehörigen K. Jetzt sind die beiden Büschel durch die K' auch eindeutig aufeinander bezogen, aber es ist gar kein Grund vorhanden, warum diese Beziehung eine projectivische sein soll, warum z. B. vier harmonischen Curven des einen Büschels vier harmonische des andern entsprechen sollen. Denn ein Analogon zu der Vierseitsconstruction, die sich im Raume übertrug, existirt nicht mehr, weil eine Dimension zu wenig vorhanden ist.

Göttingen, 8. Juni 1872.

Verbesserung.

Auf p. 112, Zeile 12 v. u. lese man „werde" statt „wäre".