

## Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen.

Von

GEORG FABER in München.

Während einerseits eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, aber mit im übrigen willkürlichen Koeffizienten ihren Konvergenzkreis im allgemeinen zur natürlichen Grenze hat\*), weisen andererseits Potenzreihen, deren Koeffizienten  $a_\nu$  in bestimmter noch sehr allgemeiner Weise von dem Index  $\nu$  abhängen, nur ganz bestimmte vereinzelte Singularitäten auf, und es ist z. B. die Mächtigkeit der nicht fortsetzbaren Reihen keine größere als diejenige der Taylorschen Reihen, welche den Einheitskreis als Konvergenzgrenze und auf demselben nur die eine singuläre Stelle  $x = 1$  besitzen; denn die Mächtigkeit dieser Reihen ist schon die gleiche wie die aller analytischen Funktionen überhaupt. Es folgt dies ohne weiteres aus schon bekannten Untersuchungen, wie auch aus den im folgenden mitzuteilenden (cf. Theorem I, p. 371).

Es soll hier nämlich die Fortsetzbarkeit spezieller Taylorscher Reihen untersucht werden, nämlich solcher, wo der Koeffizient  $a_\nu$  das eine Mal eine Potenzreihe von  $\frac{1}{\nu}$  ist, das andre Mal, wo  $a_\nu$  eine ganze Funktion  $G(\nu)$  von  $\nu$  ist, die schwächer unendlich wird als  $e^{\varepsilon \nu}$  (d. h.

$$\lim_{r=\infty} |G(re^{i\varphi})| e^{-\varepsilon r} = 0 \text{ für jedes positive } \varepsilon).$$

Über die zuerst erwähnte Klasse von Reihen hat schon Herr Leau\*\*) auf kompliziertere Weise einen Satz bewiesen, der mit dem unten stehenden Theorem I übereinstimmt; auch bezüglich der oben genannten Reihen  $\sum G(\nu)x^\nu$  gelangt Herr Leau zu einem ähnlich lautenden Satze; dagegen glaube ich, daß die viel präzisere Aussage, eine solche Reihe habe nur die eine wesentliche singuläre Stelle  $x = 1$ , sowie die Umkehrung dieses Satzes neu sind.

\*) Pringsheim, Math. Ann. 44 (1894); Borel, acta math. 21 (1897); Fabry, acta math. 22 (1899).

\*\*) Journ. de Math. 5 (1899).

Im dritten Paragraphen gebe ich dann einen elementaren Beweis eines zuerst von Herrn Hadamard auf Grundlage des Cauchyschen Funktionsbegriffs bewiesenen Satzes über die Abhängigkeit der Singularitäten der Funktion  $\sum a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu dt \cdot x^\nu$  von denjenigen der Funktion  $\sum a_\nu x^\nu$ .

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, daß sich alle diese Beweise — und noch andere ähnliche mehr — aus einer einzigen Quelle ableiten lassen, als welche sich der Weierstraßsche Doppelreihensatz erweist. Ich stelle denselben daher hier an die Spitze, indem ich ihn zugleich in verallgemeinerter Form ausspreche:

Gegeben sei eine unendliche Folge von analytischen Funktionen:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots,$$

die sämtlich regulär sind in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete  $S$ , das vermöge der Funktion  $x' = \psi(x)$  auf das Innere eines mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt der  $x'$ -Ebene beschriebenen Kreises abgebildet wird. In  $S$  gelten daher nach bekannten Sätzen\*) Entwicklungen der Form:

$$f_\mu(x) = \sum_0^\infty a_\nu^{(\mu)} (\psi(x))^\nu.$$

Ferner werde vorausgesetzt, daß  $\sum_0^\infty f_\mu(x)$  konvergiert im Gebiete  $|\psi(x)| < R$  und gleichmäßig auf der Kurve  $|\psi(x)| = r (< R)$ .

Dann ist im Gebiete  $|\psi(x)| < r$

$$F(x) = \sum_0^\infty f_\mu(x)$$

eine analytische Funktion von  $x$ :

$$F(x) = \sum_0^\infty A_\nu (\psi(x))^\nu,$$

wobei

$$A_\nu = \sum_0^\infty a_\nu^{(\mu)} (**).$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweise ich nun das

\*) S. Königsberger, Vorl. über d. Theor. d. ellipt. Funct. Th. I (1874), p. 93 ff.

\*\*) Bei Weierstraß (Werke II, p. 205) ist  $\psi(x) = x - x_1$ ; in allen folgenden Anwendungen steht von vornherein die gleichmäßige Konvergenz der Reihe  $\sum f_\mu(x)$  im ganzen zweifach ausgedehnten Gebiete fest; in diesem Falle genügt auch der Weierstraßsche Satz in seiner speziellen Fassung zum Nachweis, daß  $\sum f_\mu(x)$  eine in  $S$  reguläre analytische Funktion darstellt.

Theorem I: Wenn

$$(1) \quad a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad (\nu \geq n)$$

ist, wo

$$(2) \quad \mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

eine für  $|x| \leq \frac{1}{n}$  konvergente Potenzreihe bedeutet, so hat die Funktion

$$(3) \quad F(x) = \sum a_\nu x^\nu$$

in der längs der reellen Achse  $1 \dots \infty$  aufgeschnittenen Ebene keine singuläre Stelle.

Ferner werde ich zeigen: der Einschnitt  $1 \dots \infty$  ist ein „künstlicher“, d. h. auf demselben sind nur 1 und  $\infty$  singuläre Punkte. Dies wird sich aus dem Umstande ergeben, daß man statt des geradlinigen Einschnitts einen andern wählen darf, der von einer beliebigen logarithmischen Spirale mit dem Nullpunkte als Pol gebildet wird. Es steht zu vermuten, daß die im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion  $F(x)$  auch in ihren anderen Zweigen keine weiteren singulären Punkte hat als die Punkte 1,  $\infty$  und den Nullpunkt; doch folgt dies aus unserer Analyse nicht, da man stets nur den Einheitskreis des obersten Blattes behält, wenn man den Schnitt längs einer der obigen logarithmischen Spiralen führt, man also über das, was innerhalb des Einheitskreises der übrigen Blätter geschieht, keine Aussage machen kann.

Statt für

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

genügt es offenbar den Beweis zu führen für

$$a_m + a_{m+1}x + a_{m+2}x^2 + \dots = \frac{F(x) - \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu x^\nu}{x^m},$$

welche Funktion wieder  $F(x)$  heißen möge.

Ich betrachte folgende Reihe von Funktionen:

$$(4) \quad \begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, \\ f_1(x) &= \frac{\int_0^x f_0(x) x^{m-1} dx}{x^m} = \frac{1}{m} + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{m+2} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ f_k(x) &= \frac{\int_0^x f_{k-1}(x) x^{m-1} dx}{x^m} = \frac{1}{m^k} + \frac{x}{(m+1)^k} + \frac{x^2}{(m+2)^k} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die erste dieser Funktionen hat die eine singuläre Stelle  $x = 1$ ; bei der zweiten sind infolge der Integration der Punkt  $x = \infty$  und infolge der Division mit  $x^m$  der Punkt  $x = 0$  in den übrigen Zweigen der Funktion als singuläre hinzugetreten. Weitere Singularitäten können auch bei den übrigen Funktionen  $f_k(x)$  nicht auftreten; wäre nämlich  $\alpha$  ein von  $0, 1, \infty$  verschiedener singulärer Punkt, der zum ersten Male bei  $f_k(x)$  aufträte, so würde man schließen, daß  $\alpha$  auch ein singulärer Punkt von  $x^m f_k(x)$  und von  $\frac{1}{x^{m-1}} \frac{dx^m \cdot f_k(x)}{dx} = f_{k-1}(x)$  wäre gegen die Voraussetzung.

Ich mache nun zunächst den Einschnitt auf der reellen Achse vom Punkte 1 bis  $\infty$  und erweitere diesen Einschnitt, indem ich vom Nullpunkte aus zwei Gerade ziehe, die mit der positiven reellen Achse die Winkel  $\pm \varepsilon$  bilden, ferner einen Kreisbogen mit dem Radius  $1 - \varepsilon$ , und eliminiere das unendliche Stück der Ebene, das von den zwei Geraden und dem Kreisstückchen begrenzt ist, und den Punkt 1 enthält. Außerdem schließe ich die Umgebung des Punktes  $\infty$  durch einen beliebig großen Kreis mit dem Radius  $R$  aus.

Da in dem übrig bleibenden Stücke  $S$  der Ebene alle vorkommenden Funktionen regulär und eindeutig sind, sind die Integrationen unabhängig vom Wege; dieselben werden im folgenden längs der Geraden  $0 - x$  ausgeführt gedacht.

Sei  $G$  das Maximum von  $\left| \frac{1}{1-x} \right|$  in  $S$ ; ich behaupte das Maximum von  $|f_k(x)|$  ist kleiner als  $\frac{G}{n^k}$ .

Es ist nämlich, wenn  $x = re^{i\varphi}$  gesetzt wird:

$$|f_1(x)| < G \cdot \frac{\int_0^{|x|} |x^{m-1}| |dx|}{|x^m|} = G \frac{\int_0^r r^{m-1} dr}{r^m},$$

$$< \frac{G}{m}$$

und allgemein, wenn

$$|f_{k-1}(x)| < \frac{G}{m^{k-1}}$$

ist (für alle  $x$  in  $S$ ), so folgt

$$(5) \quad |f_k(x)| < \frac{G}{m^{k-1}} \cdot \frac{\int_0^r r^{m-1} dr}{r^m} = \frac{G}{m^k},$$

und für  $m > n$ :

$$< \frac{G}{n^k}$$

für jedes,  $x$  in  $S$ , q. e. d.

Daher ist

$$(6) \quad \Phi(x) = \sum_0^{\infty} c_v f_v(x) = \sum_0^l c_v f_v(x) + R_l(x)$$

(die  $c$  sind die Koeffizienten der Potenzreihe (2)) für alle Punkte  $x$  von  $S$  gleichmäßig konvergent; denn

$$(7) \quad |R_l(x)| < G \sum_l^{\infty} \frac{|c_v|}{m^v} < \varepsilon,$$

wenn  $l$  genügend groß gewählt ist.  $\Phi(x)$  stellt demnach in  $S$  eine reguläre analytische Funktion  $F(x)$  dar; die Entwicklung derselben um den Nullpunkt lautet:

$$(8) \quad \begin{aligned} F(x) &= \sum_0^{\infty} \frac{c_v}{m^v} + x \sum_0^{\infty} \frac{c_v}{(m+1)^v} + x^2 \sum_0^{\infty} \frac{c_v}{(m+2)^v} + \dots \\ &= \mathfrak{P}\left(\frac{1}{m}\right) + x \mathfrak{P}\left(\frac{1}{m+1}\right) + x^2 \mathfrak{P}\left(\frac{1}{m+2}\right) + \dots \end{aligned}$$

und diese Potenzreihe läßt sich nach dem eben bewiesenen analytisch fortsetzen über das ganze Gebiet  $S$ .

Wir haben nun den gleichen Satz zu beweisen unter der Voraussetzung, daß der Einschnitt nicht von einer Geraden, sondern von einer logarithmischen Spirale gebildet wird. Es soll also jetzt statt des Gebietes, das von den Geraden  $y = \pm \operatorname{tg} \varepsilon \cdot x$  und von Bögen der Kreise mit den Radien  $R$  und  $1 - \varepsilon$  begrenzt wurde, das folgendermaßen definierte endliche Gebiet  $S$  betrachtet werden: wenn die logarithmische Spirale mit der Gleichung  $r = \gamma e^{\beta \varphi}$  durch den Punkt 1 geht, so sei  $S$  begrenzt von zwei logarithmischen Spiralen mit den Gleichungen:  $r = (\gamma \pm \varepsilon) e^{\beta \varphi}$ , ferner von einem Stückchen der zu diesen senkrechten logarithmischen Spirale, die durch den Punkt  $1 - \varepsilon$  geht, und endlich von einem Bogenstück des Kreises mit dem Radius  $R$ . Die Integrationskurven seien jetzt unter einander ähnliche logarithmische Spiralen mit den Gleichungen  $r = \alpha e^{\beta \varphi}$  ( $\alpha$  Parameter,  $\beta$  fest).

Da wir oben bei geradlinigem Schnitt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes einzig aus der Ungleichung (5) erschlossen haben, so ist nur noch das Fortbestehen dieser Ungleichung unter den geänderten Verhältnissen zu beweisen. Dies geschieht wieder durch den Schluß von  $n$  auf  $n + 1$ . Sei also wieder  $G$  das Maximum von  $|f_0(x)|$  in dem jetzigen Bereiche  $S$  und sei schon bewiesen, daß

$$|f_{k-1}(x)| < \frac{G}{n^{k-1}},$$

so bleibt zu zeigen, daß

$$|f_k(x)| < \frac{G}{n^k}$$

für jedes  $x$  in  $S$ . Es ist aber

$$|f_k(x)| < \frac{\int_0^x |f_{k-1}(x)| |x^{m-1}| |dx|}{|x^m|} < \frac{G}{n^{k-1}} \cdot \frac{\int_0^x r^{m-1} |dx|}{r^m};$$

$|dx|$  ist hier nicht mehr  $= dr$ , sondern  $= \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ ,  $d\varphi$  ist  $= \frac{dr}{r \cdot \beta}$ , also

$$|dx| = dr \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}} = dr \cdot c,$$

wo  $c$  für alle Spiralen die gleiche Konstante ist. Es folgt

$$|f_k(x)| < \frac{G}{n^{k-1}} \cdot \frac{c}{m} < \frac{G}{n^k},$$

wenn nur  $m > cn$  gewählt ist. Das Fortbestehen dieser Umkehrung war aber das einzige, was noch zu beweisen war zur vollständigen Erledigung des obigen Satzes über die singulären Stellen von

$$F(x) = \sum \mathfrak{P}\left(\frac{1}{v}\right) x^v.$$

## § 2.

Während wir soeben  $a_v$  in der Form  $a_v = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{v}\right)$  voraussetzten, nehmen wir jetzt an, daß  $a_v$  gleich einer ganzen Funktion von  $v$  ist:

$$(1) \quad a_v = G(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \dots \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Da man leicht ganze Funktionen konstruieren kann, die an den Stellen  $1, 2, \dots$  willkürlich vorgegebene Werte  $a_1, a_2, \dots$  annehmen, so müssen wir  $G(x)$  noch einer Einschränkung unterwerfen\*):

Wir setzen voraus, daß wenn  $\varepsilon (> 0)$  beliebig klein vorgegeben ist, eine Zahl  $r'$  existiert, sodaß für  $r > r'$  die Ungleichung gilt:

$$(2) \quad |G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}.$$

Dies vorausgesetzt, beweise ich das

**Theorem II:** Die Potenzreihe  $\sum_1^\infty G(v) x^v$  ist das Element einer eindeutigen Funktion, die sich in der ganzen Ebene regulär verhält außer im Punkte  $x = 1$ , der ein wesentlich singulärer für die Funktion ist.

Zuvörderst erwähne ich folgenden von Herrn Poincaré\*\*) herrührenden Hilfssatz, der das Abnehmen der Koeffizienten  $c_v$  von  $G(x)$  beleuchtet:

\*) cf. Hadamard, La série de Taylor, p. 29.

\*\*) Bull. soc. math. F. T. 11, 1883 p. 138; s. a. Borel, Leçons sur les Fonct. entières, Paris 1900, p. 54.

Die Funktion  $\sum_0^{\infty} c_\nu \nu! x^\nu$  ist eine ganze Funktion von  $x$ . Zum Beweise, den ich nur andeute, betrachte man das Integral

$$(3) \quad J(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} G(tx) dt.$$

Vermöge der Ungleichung (2) hat dieses Integral für jeden endlichen Wert von  $x$  einen Sinn und stellt eine ganze Funktion dar\*), die Entwicklung derselben nach steigenden Potenzen von  $x$  lautet:

$$(4) \quad J(x) = \sum_0^{\infty} c_\nu \nu! x^\nu,$$

und daher

$$(5) \quad \lim \sqrt[\nu]{|c_\nu| \nu!} = 0.$$

Nach dieser Vorbemerkung betrachte ich folgende Reihe von Funktionen:

$$(6) \quad \begin{aligned} f_0(x) &= \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \dots, \\ f_1(x) &= x \cdot f_0'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ f_\kappa(x) &= x f_{\kappa-1}'(x) = x + 2^\kappa x^2 + 3^\kappa x^3 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und behaupte  $f_\kappa(x)$  läßt sich in der Form darstellen:

$$(7) \quad f_\kappa(x) = \sum_1^{\kappa} b_\nu^{(\kappa)} x^\nu \frac{d^\nu f_0(x)}{dx^\nu}.$$

Da die Behauptung für  $\kappa = 1$  zutrifft, genügt der Schluß von  $\kappa - 1$  auf  $\kappa$ , es sei also

$$f_{\kappa-1}(x) = \sum_1^{\kappa-1} b_\nu^{(\kappa-1)} x^\nu \frac{d^\nu f_0(x)}{dx^\nu};$$

dann ist

$$f_\kappa(x) = x f_{\kappa-1}'(x) = \sum_1^{\kappa} (\nu b_\nu^{(\kappa-1)} + b_{\nu-1}^{(\kappa-1)}) x^\nu \frac{d^\nu f_0(x)}{dx^\nu};$$

man findet also

$$(8) \quad b_\nu^{(\kappa)} = \nu b_\nu^{(\kappa-1)} + b_{\nu-1}^{(\kappa-1)};$$

also speziell, da nach (7)  $b_\kappa^{(\kappa-1)} = 0$  ist:

$$(8b) \quad b_\kappa^{(\kappa)} = b_{\kappa-1}^{(\kappa-1)} = \dots = b_1^{(1)} = 1.$$

\*) Vgl. auch die im § 3 auseinandergesetzte Beweismethode.

Ferner behaupte ich

$$(9) \quad b_v^{(\kappa)} < \frac{2^\kappa (\kappa-1)!}{v!}$$

und beweise diese Ungleichung wieder durch den offenbar zulässigen Schluß von  $\kappa-1$  auf  $\kappa$ :

$$b_v^{(\kappa)} < v \frac{2^{\kappa-1} (\kappa-2)!}{v!} + \frac{2^{\kappa-1} (\kappa-2)!}{(v-1)!} = \frac{2^\kappa (\kappa-2)!}{(v-1)!} \leq \frac{2^\kappa (\kappa-1)!}{v!}$$

zunächst für  $v \leq \kappa-1$ , aber nach (8b) auch für  $v = \kappa$ , sodaß Ungleichung (9) allgemein gilt; daraus folgt nun

$$(10) \quad \begin{aligned} |f_\kappa(x)| &< 2^\kappa (\kappa-1)! \sum_1^\kappa \frac{1}{v!} \left| \frac{x^v d^v f_0(x)}{dx^v} \right| \\ &< 2^\kappa (\kappa-1)! \sum_1^\kappa \frac{|x^v|}{|1-x|^{v+1}}. \end{aligned}$$

Um den Punkt  $x=1$  schlage ich einen beliebig kleinen Kreis mit dem Radius  $\rho$ ; in dem ganzen unendlichen Gebiete außerhalb dieses Kreises bleibt der Ausdruck  $\frac{|x|}{|1-x|}$  unter einer endlichen Grenze  $G(>1)$ ; daher

$$(11) \quad \sum_1^\kappa \frac{|x|^v}{|1-x|^{v+1}} < \frac{\kappa G^\kappa}{|1-x|};$$

setzt man noch  $\frac{2^\kappa G^\kappa}{|1-x|} = H^\kappa$ , so bleibt  $H'$  für alle  $x$  in  $S$  und für alle Exponenten unter einer endlichen Grenze  $H$  und man hat nach (10) und (11):

$$(12) \quad |f_\kappa(x)| < H^\kappa \kappa!.$$

Bildet man mit den Koeffizienten  $c_v$  der ganzen Funktion  $G(x)$  (1) die Reihe:

$$(13) \quad \sum_0^\infty c_v f_v(x),$$

so konvergiert dieselbe zufolge der Ungleichungen (5) und (12) im ganzen Gebiete  $S$  gleichmäßig, stellt also daselbst eine analytische Funktion  $F(x)$  dar; die Entwicklung von  $F(x)$  in eine Potenzreihe um den Nullpunkt lautet:

$$\begin{aligned} F(x) &= x \sum_0^\infty c_v + x^2 \sum_0^\infty c_v 2^v + x^3 \sum_0^\infty c_v 3^v + \dots \\ &= \sum_1^\infty G(v) x^v. \end{aligned}$$



Diese Taylorsche Reihe ist also das Element einer in der ganzen Ebene eindeutigen und mit Ausnahme des Punktes  $x = 1$  regulären Funktion; das ist aber gerade, was unser Theorem behauptet.

Dasselbe läßt sich unmittelbar zu folgender Fassung verallgemeinern:

Sind  $G_1, G_2, \dots, G_l$   $l$  ganze Funktionen, die sämtlich der Bedingung (2) genügen:

$$|G(re^{i\varphi})| < e^{er} \quad (r > r'),$$

so stellt die Reihe  $\sum_1^\infty a_\nu x^\nu$ , wo

$$(15) \quad a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \dots + \frac{1}{x_l^\nu} G_l(\nu)$$

ist, eine Funktion dar, die in der ganzen Ebene eindeutig ist und die  $l$  wesentlich singuläre Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , sonst aber keine Singularitäten besitzt.

Hat man es mit unendlich vielen singulären Stellen

$$x_1, x_2, \dots, |x_1| \leq |x_2| \leq \dots, \lim x_\nu = \infty$$

und entsprechenden ganzen Funktionen  $G_1, G_2, \dots$ , die alle der Bedingung (2) genügen, zu tun und verlangt man eine Taylorsche Reihe, deren analytische Fortsetzung sich an der Stelle  $x_i$  verhält wie die analytische

Fortsetzung der Reihe  $\sum_1^\infty \frac{1}{x_i^\nu} G_i(\nu) x^\nu$ , so wird nur in den allerseltensten

Fällen der Ansatz

$$a_\nu = \sum_1^\infty \frac{1}{x_\mu^\nu} G_\mu(x)$$

zum Ziele führen. (Hinreichende Bedingungen, damit dieser Fall eintrete, sind leicht anzugeben.) Doch kann man sich stets folgendermaßen helfen: man setze

$$(16) \quad a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \dots + \frac{1}{x_{l_\nu}^\nu} G_{l_\nu}(x),$$

wobei außer (2) folgende stets mögliche Bedingungen erfüllt seien:

$$(17) \quad \begin{aligned} & \text{a) } \lim l_\nu = \infty, \\ & \text{b) } \lim \sqrt[l_\nu]{l_\nu} = 1, \\ & \text{c) } \sqrt[l_\nu]{|G_{l_\nu}(\nu)|} < (1 + \varepsilon_\nu) \quad \text{für } x \leq l_\nu \quad \text{mit } \lim \varepsilon_\nu = 0. \end{aligned}$$

Unter diesen Bedingungen ist nämlich  $\lim \sqrt[l_\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{|x_1|}$ , und wenn unter  $a_\nu^{(x)}$  das verstanden wird, was aus  $a_\nu$  entsteht, wenn

$$G_1 = G_2 = \dots = G_{x-1} = 0$$

gesetzt wird, so ist

$$\lim_{\nu} \sqrt[\nu]{|a_{\nu}^{(x)}|} = \frac{1}{|x_{\infty}|}; \quad \text{d. h.} \quad F_x(x) = \sum_1^{\infty} a_{\nu}^{(x)} x^{\nu}$$

ist regulär in einem Kreise mit dem Radius  $|x_{\infty}|$ ;  $F(x)$  hat also in diesem Kreise keine anderen Singularitäten wie  $F(x) - F_x(x)$ ; das letztere ist aber nach dem vorigen Satze eine eindeutige Funktion mit den wesentlich singulären Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_{\infty-1}$  und zwar verhält sich  $F(x) - F_x(x)$  an der Stelle  $x_i$  ( $i \leq \infty - 1$ ) wie die analytische Fortsetzung der Reihe

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\nu} G_i(\nu) x^{\nu}.$$

Die im Vorhergehenden mitgeteilten Sätze stehen im engsten Zusammenhange mit der Frage nach den singulären Stellen einer vorgegebenen Taylorschen Reihe. Man kann bei der Untersuchung dieser Frage nach Herrn Hadamard\*) zwei völlig verschiedene Gruppen von Methoden unterscheiden:

„Die einen beschränken in keiner Weise die Allgemeinheit der Reihe  $\sum a_{\nu} x^{\nu}$ . Gerade dieser Umstand verleiht den so erhaltenen Resultaten eine große Bedeutung; doch ist zu fürchten, daß diese Resultate stets zu gering an Zahl bleiben.

Andere Methoden dagegen beziehen sich ausschließlich auf verhältnismäßig einfache Singularitäten und ermangeln daher der Allgemeinheit.“

Herr Hadamard hat sich im zweiten Teile seiner Thèse\*\*) auf den letzteren Standpunkt gestellt und den Fall vollständig erledigt, wo alle auftretenden Singularitäten Pole sind.

Auch wir sind durch die vorausgehenden Sätze zu einer ähnlichen einschränkenden Voraussetzung geführt, nämlich nur wesentlich singuläre Stellen zuzulassen, und haben sehr allgemeine Ausdrücke konstruiert, die an vorgegebenen Stellen wesentlich singuläre Punkte besitzen. Die wichtige Frage, die sich nun erhebt ist die folgende:

Sind durch unsere Ausdrücke sämtliche Funktionen der bezeichneten Art erschöpft? oder m. a. W.: Lassen sich die obigen Sätze umkehren?

Ich werde durch den Beweis des folgenden Satzes zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist.

**Theorem III:** *Hat man eine eindeutige Funktion  $F(x)$  mit der einen wesentlich singulären Stelle  $x = 1$ , und lautet die Entwicklung von  $F(x)$  nach steigenden Potenzen von  $x$ :*

\*) La série de Taylor, p. 13.

\*\*) Journ. de Math. 8 (1892).

$$(1) \quad F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

so läßt sich  $a_\nu$  immer in der Form darstellen:

$$(2) \quad a_\nu = G(\nu),$$

wo  $G(x)$  eine ganze Funktion mit folgender Eigenschaft bedeutet:

Wenn  $\varepsilon (> 0)$  beliebig klein vorgegeben ist, so läßt sich stets ein  $r'$  so bestimmen, daß für  $r > r'$

$$(3) \quad |G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$$

ist\*).

$F(x)$  kann man sich als eine beständig konvergente Potenzreihe von  $\frac{1}{1-x}$  gegeben denken; etwas bequemer für das folgende ist es  $F(x)$  als ganze Funktion von  $\frac{x}{1-x} \left( = \frac{1}{1-x} - 1 \right)$  vorauszusetzen:

$$(4) \quad F(x) = e_1 \frac{x}{1-x} + e_2 \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 + \dots \quad (\lim \sqrt[\nu]{|e_\nu|} = 0).$$

Die Koeffizienten  $a_\nu$  der Entwicklung (1) um den Nullpunkt berechnen sich folgendermaßen aus den  $e_i$ :

$$(5) \quad a_\nu = e_1 + \binom{\nu-1}{1} e_2 + \binom{\nu-1}{2} e_3 + \dots + \binom{\nu-1}{\nu-1} e_\nu^{**}.$$

Ich betrachte nun folgenden Ausdruck:

$$(6) \quad \Phi(x) = e_1 + \frac{x-1}{1} e_2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} e_3 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e_4 + \dots$$

und behaupte  $\Phi(x)$  ist die durch unser Theorem verlangte ganze Funktion; dazu sind folgende drei Punkte zu beweisen:

1)  $\Phi(x)$  ist eine ganze Funktion:  $\Phi(x) = G(x)$ ;

2)  $G(\nu) = a_\nu$ ;

3)  $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$  (für beliebiges  $\varepsilon$  und  $r > r'$ ).

Bezüglich des ersten Punktes beweise ich, das  $\Phi(x)$  für  $|x| < R$  ( $R$  beliebig groß) gleichmäßig konvergiert. Zu dem Zwecke schreibe ich

$$\Phi(x) = e_1 + \frac{x-1}{1} e_2 + \dots + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{(n-1)!} e_n + \Phi_n(x)$$

\*) Falls  $x=1$  eine außerwesentlich singuläre Stelle  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ist, reduziert sich  $G(\nu)$  bekanntlich auf ein Polynom  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades, und umgekehrt.

\*\*\*) Umgekehrt ist  $e_{i+1} = \Delta^i a_1 = a_{i+1} - \binom{i}{1} a_{i-1} + \dots + (-1)^i a_1$ . Daraus und aus dem Theorem I folgt ganz beiläufig, daß  $\lim \sqrt[\nu]{|\Delta^\nu a_1|} = 0$  ist, falls  $a_\nu = G(\nu)$  und  $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$  ist. Mit dem Beweise des reziproken Satzes sind wir oben gerade beschäftigt.

und zeige, daß  $|\Phi_n(x)|$  für  $|x| < R$  beliebig klein wird, wenn nur  $n$  groß genug gewählt ist. Zunächst bestimme ich eine Zahl  $m'$  so, daß für  $m > m'$ , wenn  $\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ < 1 \end{pmatrix}$  gegeben ist,

$$|e_m| < \varepsilon^m$$

wird. Dann ist, falls  $n > m'$ ,

$$|\Phi_n(x)| < \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+n)}{n!} \varepsilon^n + \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+n+1)}{(n+1)!} \varepsilon^{n+1} + \dots$$

Was hier auf der rechten Seite steht, ist der Rest vom  $n^{\text{ten}}$  Gliede ab der konvergenten Entwicklung von  $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{R+1}$  nach Potenzen von  $\varepsilon$ , kann also durch Wahl von  $n$  beliebig klein gemacht werden, womit der erste Punkt erledigt ist.

Der zweite ist evident, wie ein Blick auf die unter einander stehenden Formeln (5) und (6) lehrt.

Der dritte Punkt ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} |\Phi(re^{i\varphi})| &< |e_1| + \frac{r+1}{1} |e_2| + \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2} |e_3| + \dots \\ &< |e_1| + \frac{r+1}{1} |e_2| + \dots + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m-1)}{(m-1)!} |e_m| + \\ &+ \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m)}{m!} \varepsilon^m + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m+1)}{(m-1)!} \varepsilon^{m+1} + \dots \\ &\quad (\text{wenn wieder } |e_m| < \varepsilon^m \text{ für } m > m') \\ &< \frac{1}{(1-\varepsilon)^{r+1}} + P(r), \text{ wo } P(r) \text{ ein Polynom } (m-1)^{\text{ten}} \text{ Grades in} \\ &\quad r \text{ bedeutet,} \\ &= e^{-(r+1)\lg(1-\varepsilon)} + P(r), \\ &< e^{(r+1)\varepsilon'} + P(r), \text{ wo } \varepsilon', \text{ wie auch nachher } \varepsilon'' \text{ mit } \varepsilon \text{ beliebig klein} \\ &\quad \text{wird, diese Ungleichung gilt noch für jedes } r; \\ &< e^{\varepsilon''r}, \text{ wenn } r \text{ genügend groß gewählt ist.} \end{aligned}$$

Hiermit ist aber der in Rede stehende Satz völlig bewiesen.

Auf die anderen obigen Sätze, bei denen es sich um Funktionen mit mehreren oder unendlich vielen singulären Stellen handelte, angewandt, besagt das letzte Theorem, daß die dort in den Koeffizienten  $a_v$  auftretenden ganzen Funktionen  $G_1, G_2, \dots$  die allgemeinsten sind, welche zu wesentlich singulären Stellen Veranlassung geben. Man hat also beispielsweise den Satz:

Sind unendlich viele ganz beliebige ganze Funktionen  $g_1, g_2, \dots$  gegeben und unendlich viele Stellen  $x_1, x_2, \dots$  ( $\lim x_v = \infty$ ), so existiert stets eine eindeutige mit Ausnahme der Punkte  $x_i$  und des Punktes  $\infty$

reguläre analytische Funktionen  $F(x)$  von der Eigenschaft, daß die Differenz

$$F(x) - g_i \left( \frac{1}{x - x_i} \right)$$

sich auch an der Stelle  $x_i$  regulär verhält. Lautet die Entwicklung dieser Funktion um den Nullpunkt  $F(x) = \sum a_\nu x^\nu$ , so kann man setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_{i_\nu}^\nu} G_{i_\nu}(\nu) + a'_\nu.$$

Es bestehen dabei die Bedingungen (17) p. 377 und (2) p. 374, und es ist  $\lim \sqrt[\nu]{|a'_\nu|} = 0$ . (Eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte  $x_i$  gültige Darstellung von  $F(x)$  gestattet bekanntlich das Mittag-Lefflersche Theorem.)

Beispiele: Die ganzen Funktionen von  $x$

$$\frac{\sin \pi \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}} \quad \text{und} \quad (\sin \pi \sqrt{x})^2$$

erfüllen die Bedingung (2) p. 374; daher stellen die Reihen

$$\sum_0^\infty \frac{\sin \pi \sqrt{\nu}}{\pi \sqrt{\nu}} x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty (\sin \pi \sqrt{\nu})^2 x^\nu$$

Funktionen dar, die auf dem Konvergenzkreise und überhaupt nur die eine singuläre Stelle  $x = 1$  besitzen. Dieselben sind wegen ihrer Einfachheit besonders geeignet zur Illustrierung der zuerst von Herrn Hadamard\*) gegenüber gegenteiligen Vermutungen durch Konstruktion eines komplizierteren Beispiels gezeigten Tatsache, daß ein  $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$  nicht zu existieren braucht, selbst wenn die Reihe  $\sum a_\nu x^\nu$  nur eine einzige singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreise hat. Da in den obigen Beispielen unendlich viele der  $a_\nu$  gleich Null sind, existiert nicht einmal ein  $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ .

### § 3.

Ich wende mich nunmehr zu dem oben angekündigten elementaren Beweise des Hadamardschen Satzes über die *Abhängigkeit der Singularitäten der Funktion*

$$(1) \quad F_1(x) = \sum a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu dt x^\nu$$

\*) Journ. de Math. (4) 8 (1892) p. 163, la série de Taylor p. 65.

von denjenigen der Funktion

$$(2) \quad F(x) = \sum a_\nu x^\nu *).$$

Von jedem singulären Punkte  $\alpha_i$  dieser letzteren Funktion denke ich mir eine Gerade ins Unendliche gezogen, deren Verlängerung durch den Nullpunkt gehen würde. Die sämtlichen Punkte dieser Strahlen werden aus dem Bereiche der Variablen  $x$  ausgeschieden. In dem übrig bleibenden „Sterne“ (nach der Bezeichnungsweise des Herrn Mittag-Leffler) ist  $F(x)$  regulär und eindeutig. Es ist zu beweisen, daß das gleiche auch von  $F_1(x)$  gilt.

Genauer gesagt, führe ich den Beweis nicht für den Stern, sondern was auf dasselbe hinausläuft für ein folgendermaßen definiertes Gebiet  $S$ :

Von dem Sterne werde zuerst das unendliche Gebiet außerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises mit dem beliebig großen Radius  $R$  ausgeschlossen; ferner möge jeder der von den singulären Punkten  $\alpha_i$  ausgehenden Strahlen um die Strecke  $\varepsilon$  über  $\alpha_i$  hinaus gegen den Nullpunkt verlängert und dann vom Nullpunkt als Scheitel aus um den Winkel  $\varepsilon$  nach beiden Seiten gedreht werden. Das so von den Halbstrahlen überstrichene Gebiet werde ebenfalls eliminiert; was danach vom Sterne noch übrig bleibt, möge unser Gebiet  $S$  sein.

Es soll gezeigt werden, daß in diesem Gebiete die Taylorsche Reihe

$$(1) \quad F_1(x) = \sum a'_\nu x^\nu, \quad \text{wo} \quad a'_\nu = a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu dt$$

ist, sich eindeutig fortsetzen läßt.

Vorausgesetzt wird nur, daß  $\int_0^1 V(t) dt$  absolut konvergiert (falls  $a_0 = a_1 = \dots = a_{z-1} = 0$  ist, genügt die absolute Konvergenz von  $\int_0^1 V(t) t^z dt$ ); auch wird der Einfachheit halber zunächst angenommen, daß  $V(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) unter einer endlichen Grenze  $G$  bleibt.

Ich definiere nun folgende Reihe von Funktionen:

$$(3) \quad \begin{aligned} h_0 &= V(0) F(0), \\ h_1(x) &= \frac{1}{2} \left( V(0) F(0) + V\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{x}{2}\right) \right), \text{ allgemein} \\ h_i(x) &= \frac{1}{2^i} \sum_{\nu=0}^{2^i-1} V\left(\frac{\nu}{2^i}\right) F\left(\frac{\nu x}{2^i}\right) \end{aligned}$$

\*) Hadamard, Journ. de Math. (8) 1892, p. 163.

und sodann:

$$(4) \quad \begin{aligned} f_0 &= h_0, \\ f_i(x) &= h_i(x) - h_{i-1}(x) \quad (i > 0). \end{aligned}$$

Jedes einzelne  $f$  ist ersichtlich eine in  $S$  reguläre analytische Funktion, ich behaupte, daß das gleiche von

$$(5) \quad \sum_0^{\infty} f_v(x)$$

gilt und beweise zu dem Zwecke, daß diese Reihe (5) für alle in  $S$  gelegenen  $x$  gleichmäßig konvergiert. Es ist

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum_{n+1}^{n+r} f_v(x) &= h_{n+r}(x) - h_n(x) \\ &= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^{n+r}-1} V\left(\frac{v}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{vx}{2^{n+r}}\right) - \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} V\left(\frac{\mu}{2^n}\right) F\left(\frac{\mu x}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \mu \left\{ \sum_0^{2^r-1} \left( V\left(\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}} x\right) - V\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x\right) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \mu \sum_0^{2^r-1} V\left(\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}}\right) \left[ F\left(\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}} x\right) - F\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \mu \sum_0^{2^r-1} F\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x\right) \left[ V\left(\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}}\right) - V\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}}\right) \right] \end{aligned}$$

$\sum_{n+1}^{n+r} f_v(x)$  ist somit in zwei Doppelsummen zerlegt, von denen jede einzeln, wie gezeigt werden soll, durch Wahl von  $n$  beliebig klein gemacht werden kann, und zwar gleichmäßig für alle  $x$  von  $S$  und für  $r = 1, 2, \dots$  in inf.

Die erste Doppelsumme ist ihrem absoluten Betrage nach kleiner als

$$(7) \quad \frac{G}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1} \mu \sum_0^{2^r-1} \left( F\left(\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}} x\right) - F\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x\right) \right).$$

Setzt man

$$\frac{\mu 2^r + v}{2^{n+r}} x = y_{\mu v} \quad \text{und} \quad \frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x = y_{\mu},$$

so liegen sämtliche Punkte  $y_{\mu v}$  und  $y_{\mu}$  in  $S$  und es ist für alle in Betracht kommenden Werte von  $\mu$  und  $v$

$$(8) \quad |y_{\mu v} - y_{\mu}| < \frac{|x|}{2^n} < \frac{R}{2^n} < \delta$$

d. h. beliebig klein bei passender Wahl von  $n$ ; dann kann aber auch wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $F$  in  $S$

$$(9) \quad |F(y_{\mu\nu}) - F(y_\mu)| = 0 \leq \mu < 2^n; 0 \leq \nu < 2^r - ,$$

also auch

$$(10) \quad G|F(y_{\mu\nu}) - F(y_\mu)|,$$

mithin der Ausdruck (7) durch Wahl von  $n$  unter jede Grenze herabgedrückt werden.

Somit ist die Behauptung, was die erste Doppelsumme betrifft, erwiesen.

Was die zweite betrifft, so bedeute  $D(t_1, t_2)$  die Schwankung von  $V(t)$  im Intervalle  $(t_1, t_2)$  und  $G_1$  das Maximum von  $|F(x)|$  in  $S$ , dann wird die zweite Summe kleiner als

$$(11) \quad \frac{G_1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} D\left(\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right).$$

Dieser Ausdruck kann aber wegen der vorausgesetzten Existenz von  $\int_0^1 V(t) dt$  durch Wahl von  $n$  beliebig klein gemacht werden.

Somit ist bewiesen, daß  $\sum_0^\infty f_\nu(x)$  in  $S$  gleichmäßig konvergiert, also daselbst eine reguläre analytische Funktion darstellt, und daß jeder Koeffizient der Entwicklung dieser Funktion um den Nullpunkt gleich der Summe der entsprechenden Koeffizienten der Funktionen  $f_\nu(x)$  ist.

Der Koeffizient  $a'_m$  von  $x^m$  wird z. B.:

$$(12) \quad a'_m = \lim_{n=\infty} \frac{a_m}{2^n} \sum_0^{2^n-1} V\left(\frac{\nu}{2^n}\right) \left(\frac{\nu}{2^n}\right)^m;$$

dies ist der Definition nach  $a_m \int_0^1 V(t) t^m dt$ , falls dieses Integral existiert;

dies tritt aber immer ein, wenn, wie vorausgesetzt,  $\int_0^1 V(t) dt$  existiert.

Wir haben somit gesehen:

Die in  $S$  reguläre analytische Funktion

$$\sum_0^\infty f_\nu(x)$$

hat um den Nullpunkt die Entwicklung:

$$\sum_0^\infty a'_\nu x^\nu = a'_\nu = a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu dt - ,$$



und diese Taylorsche Reihe läßt sich also über das ganze Gebiet  $S$ , mithin über den ganzen Mittag-Lefflerschen Stern analytisch fortsetzen.

Statt die Teilstrecken  $\left(\frac{v}{2^n}, \frac{v+1}{2^n}\right) — \lim n = \infty —$  auf der Strecke  $(0, 1)$  auszuzeichnen, hätte man natürlich unendlich viele andre das gleiche leistende Teilungen vornehmen können. Man hätte dann entsprechend den Funktionen  $f_0, f_1, \dots$  andre Funktionen  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  einzuführen gehabt;  $\sum_0^\infty \varphi_v(x)$  wäre auch eine in  $S$  reguläre analytische Funktion gewesen, die mit  $\sum_0^\infty f_v(x)$  identisch gewesen wäre, da die beiderseitigen Entwicklungen um den Nullpunkt übereinstimmen. Daraus schließt man

$$\sum_0^\infty f_v(x) = \int_0^1 V(t) F(tx) dt$$

(unabhängig von der benutzten Einteilung).

Nachträglich lassen sich nun folgende zwei Erweiterungen an dem Satze anbringen:

1) unter geeigneten Voraussetzungen über den analytischen Charakter von  $V(t)$  können die geradlinigen Einschnitte durch andere ersetzt werden; man beweist dies, indem man die Integration von 0 bis 1 auf komplexem Wege ausführt; s. darüber Hadamard a. a. O.

2)  $V(t)$  braucht nicht unter einer endlichen Grenze zu bleiben.

Um den letzteren Punkt zu beweisen gehen wir wieder auf die Definition des bestimmten Integrals zurück und nehmen sogleich den allgemeinsten Fall an, daß die singulären Stellen von  $V(t)$ , d. h. diejenigen, über die direkt nicht integriert werden kann, eine abgeschlossene Menge bilden.

Man betrachtet dann Bereiche  $D_0, D_1, D_2, \dots$ , von denen jeder aus einer Summe von Teilstrecken der Strecke  $\overline{01}$  besteht und keiner einen singulären Punkt von  $V(t)$  enthält; dagegen soll  $D_v$  die sämtlichen Bereiche  $D_0, D_1, \dots, D_{v-1}$  umfassen, und irgend ein nicht singulärer Punkt  $t$  soll schließlich einem  $D_n$ , also auch  $D_{n+1}, D_{n+2}, \dots$  angehören.

Wenn  $n$  genügend groß gewählt ist, wird also der Inhalt der Menge  $\delta_{n,n+r}$  derjenigen Punkte, die zu  $D_{n+r}$ , nicht aber zu  $D_n$  gehören, so klein als man nur will, und die notwendige und hinreichende Bedingung

für die absolute Konvergenz von  $\int_0^1 V(t) dt$  ist, daß man zu jedem  $\varepsilon$  ein  $n$  bestimmen kann, daß

$$(13) \quad \int_{D_{n+r}} |V(t)| dt - \int_{D_n} |V(t)| dt < \varepsilon,$$

oder anders geschrieben

$$(14) \quad \int_{\delta_{n,n+r}} |V(t)| dt < \varepsilon$$

wird (für  $r = 1, 2, \dots$  und wie auch die den obigen Bedingungen genügenden Bereiche  $D$  im übrigen gewählt sein mögen).

Dies vorausgeschickt betrachten wir die Reihe von Ausdrücken:

$$(15) \quad F_i(x) = \int_{D_i} V(t) F(tx) dt \quad (i = 0, 1, \dots),$$

von denen jeder, wie vorhin (p. 381ff.) gezeigt wurde, eine in  $S$  reguläre analytische Funktion darstellt. Setzt man

$$(16) \quad \begin{aligned} \psi_0(x) &= F_0(x), \\ \psi_i(x) &= F_i(x) - F_{i-1}(x) \end{aligned} \quad (i > 0),$$

so ist, wenn wieder  $G_1$  das Maximum von  $|F(x)|$  in  $S$  bedeutet:

$$(17) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x) \right| &= |F_{n+r}(x) - F_n(x)| = \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t) F(tx) dt \right| \\ &< G_1 \int_{\delta_{n,n+r}} |V(t)| dt, \end{aligned}$$

also nach (14)

$$(18) \quad \left| \sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x) \right| < G_1 \varepsilon,$$

d. h. beliebig klein mit wachsendem  $n$  für alle  $x$  in  $S$ .

Aus der so bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von  $\sum_0^\infty \psi_\nu(x)$  schließt man genau wie oben, daß

$$\sum_0^\infty \psi_\nu(x) = \int_0^1 V(t) F(tx) dt$$

eine in  $S$  reguläre analytische Funktion ist, deren Potenzentwicklung um den Nullpunkt lautet:

$$\sum_0^\infty a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu dt x^\nu.$$

Man bemerke übrigens, daß erst bei diesem letzten Beweise für die gleichmäßige Konvergenz von  $\sum \psi_\nu(x)$  von der Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz von  $\int_0^1 V(t) dt$  Gebrauch gemacht wurde; in Wirklichkeit ist die Voraussetzung unnötig und es genügt die Existenz von  $\int_0^1 V(t) dt^*$ , was ich zum Schlusse in Kürze zeigen will, indem ich Ungleichung (18) unter dieser erweiterten Voraussetzung beweise.

Es sei unter Trennung des Reellen und Imaginären  $x = \xi + i\eta$  ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von  $S$  und

$$(19) \quad F(tx) = u(t\xi, t\eta) + iv(t\xi, t\eta);$$

wenn nun  $t$  zwischen 0 und 1 variiert, so läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Monotoniewechsel der Funktion  $u$  und der Funktion  $v$  unter einer endlichen Zahl  $N$  bleiben, die unabhängig von der besonderen Lage des Punktes  $\xi + i\eta$  ist; dann erhält man aber unter Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$(20) \quad \left| \sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x) \right| = \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t) u(t\xi, t\eta) dt + i \int_{\delta_{n,n+r}} V(t) v(t\xi, t\eta) dt \right| \\ < \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t) u(t\xi, t\eta) dt \right| + \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t) v(t\xi, t\eta) dt \right| \\ < 4NG_1 \left| \int_{\delta'_{n,n+r}} V(t) dt \right|^{**},$$

was wegen der vorausgesetzten Konvergenz von  $\int_0^1 V(t) dt$  mit unendlich werdendem  $n$  verschwindet, q. e. d.

Der vorstehende Beweis mag vielleicht durch die nötig werdenden Bezeichnungen etwas umständlich erscheinen; doch ist der demselben zu grunde liegende Gedanke — Zurückgehen auf die Definition des bestimmten Integrals und Anwendung des Doppelreihensatzes — ein äußerst einfacher

---

\*) Selbst diese ist nicht nötig, da die obigen Entwicklungen sämtlich gültig bleiben, wenn man statt des Integrals das obere oder das untere Integral einsetzt; auch genügt bei Unendlichkeitsstellen von  $V(t)$  die Konvergenz des Integrals bei bestimmter Art des Grenzübergangs, z. B. die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes; nur ist dann auch in den andern auftretenden Integralen der gleiche Grenzübergang auszuführen.

\*\*)  $\delta'_{n,n+r}$  bedeutet dabei einen innerhalb  $\delta_{n,n+r}$  gelegenen Bereich.

und läßt sich leicht auf andere Sätze übertragen, beispielsweise auf den folgenden des Herrn Hadamard\*):

Sind  $a(x) = \sum a_\nu x^\nu$  und  $b(x) = \sum b_\nu x^\nu$  Elemente zweier analytischer Funktionen mit den singulären Stellen  $\alpha$  resp.  $\beta$ , so hat die durch die Reihe  $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$  definierte analytische Funktion in der ganzen Ebene keine andern singulären Stellen als unter den Punkten  $\alpha \cdot \beta$

München, April 1902.

---

\*) acta math. 22 (1898).