

Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen  $Y^{(n)}$  und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind\*).

Von F. NEUMANN in Königsberg.

---

Mit grossem Erfolg hat man seit längerer Zeit sich der Reihen bedient, welche nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, um in den periodischen Phänomenen der Natur aus einer grossen Anzahl Beobachtungen Resultate zu ziehen. Die sichern Ergebnisse der Meteorologie beruhen fast ganz auf diesem Gebrauch. Ein vorzüglicher Vorthail, welchen die Anwendung dieser Reihen darbietet, ist der Umstand, dass der Werth der Coefficienten, welche man bestimmt hat, unabhängig von ihrer Anzahl ist. In der Physik der Erde ist es ein wichtiger Gesichtspunkt für die Phänomene, diese als Functionen ihres Ortes an der Erdoberfläche zu betrachten, d. i. als Functionen der geographischen Länge und Breite. Es würde unzweckmässig sein, diese Functionen zweier Winkel darzustellen durch ähnliche Reihen, welche nämlich nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen zweier Winkel fortschreiten. Auch hat niemand bis jetzt z. B. die Vertheilung der Temperatur auf der Erdoberfläche, oder die Vertheilung der Intensität des Erdmagnetismus, seiner Richtung etc. auf diese Weise in eine Formel zu bringen versucht; und mit Recht, denn in diesen und andern Fällen haben die theoretischen Beschäftigungen mit diesen Phänomenen schon längst die wahre Form, in welcher sie dargestellt werden müssen, gefunden, nämlich durch Reihen, welche fortgehn nach den Functionen, welche Laplace in der Theorie der Attraction der Sphäroide mit  $Y^{(n)}$  bezeichnet hat.

Das Verfahren, eine Function, für welche man *alle* Werthe kennt, durch eine Reihe, welche nach den  $Y^{(n)}$  fortschreitet, darzustellen, ist bekannt. Die Absicht dieser Mittheilung ist, das Verfahren anzugeben, welches man zu befolgen hat, wenn nur *einzelne* Werthe der darzustellenden Function gegeben sind. Es ist ganz analog demjenigen, welches man bei den Reihen der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen

---

\*) Dieser im Jahre 1838 in Schumacher's Astronomischen Nachrichten (Bd. 15, Seite 313) publicirte Aufsatz wird mit Erlaubniss des Herrn Verfassers hier von Neuem abgedruckt.

eines Bogens anwendet, und bietet dieselben Vortheile, welche dort so geschätzt werden.

Bezeichnet man die geographische Länge mit  $\omega$ , und die Breite mit  $\varphi$  und setzt:  $\sin \varphi = \mu$ , bezeichnet man ferner das Glied in  $Y^{(n)}$ , welches unabhängig von  $\omega$  ist, mit  $X^{(n)}$ , so ist der allgemeine Ausdruck für  $Y^{(n)}$  folgender:

$$\left\{ \begin{aligned} Y^{(n)} = & B_0^{(n)} X^{(n)} + (A_1^{(n)} \sin \omega + B_1^{(n)} \cos \omega) \frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{n} \frac{dX^{(n)}}{d\mu} \\ & + (A_2^{(n)} \sin 2\omega + B_2^{(n)} \cos 2\omega) \frac{1-\mu^2}{n(n-1)} \frac{d^2 X^{(n)}}{d\mu^2} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + (A_i^{(n)} \sin i\omega + B_i^{(n)} \cos i\omega) \frac{(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n(n-1)(n-2)\dots(n-[i-1])} \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

und der Werth von  $X^{(n)}$  ist dieser:

$$(2) \quad X^{(n)} = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2(n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots$$

Die Grössen  $B_0^{(n)} B_1^{(n)} \dots A_1^{(n)} A_2^{(n)} \dots$  sind willkürliche, welche so bestimmt werden sollen, dass, wenn man durch  $V(\omega, \mu)$  den beobachteten Werth einer Function an dem durch  $\omega$  und  $\mu$  bezeichneten Ort darstellt, der Gleichung

$$(3) \quad V(\omega, \mu) = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots + Y^{(p)}$$

für alle Beobachtungen genügt wird.

Die bekannten Eigenschaften der Functionen  $Y^{(n)}$ , welche ihnen eine so ausgebreitete Anwendung verschafft haben, und auf welchen auch das Wesentliche der hier anzugebenden Methode beruht, sind diese:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y^{(n)} Y^{(n')} d\omega d\mu = 0$$

so lange  $n$  und  $n'$  verschieden sind. Setzt man in dies Doppelintegral die Werthe für die  $Y$ 's aus (1), und führt die Integration nach  $\omega$  aus, so ergibt sich sogleich

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu = 0$$

oder allgemein

$$(5) \quad \int (1-\mu^2)^i \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \frac{d^i X^{(n')}}{d\mu^i} d\mu = 0,$$

so lange  $n$  und  $n'$  verschieden sind. Wenn  $n = n'$ , so erhält man

$$(6) \quad \int_{-1}^{+1} (X^{(n)})^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2$$

und allgemein

$$(7) \quad \left( \frac{1}{n(n-1)(n-2) \cdots (n-[i-1])} \right)^2 \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^i \left( \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \right)^2 d\mu \\ = \frac{2}{2n+1} \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2 \left( \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+i)}{n(n-1)(n-2) \cdots (n-[i-1])} \right).$$

Die gegebenen Werthe  $V(\omega, \mu)$  mögen auf der Erdoberfläche vertheilt sein auf eine Anzahl gleich weit von einander abstehender Meridiane, und in jedem Meridian auf Breiten, für welche  $\mu$  die Werthe:  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \cdots$  hat. Um die Gleichung (3) bis  $Y^{(p)}$  inclusive darzustellen, müssen die Meridiane von einander um den Winkel  $\frac{1}{p}\pi = \alpha$  entfernt sein, und in Beziehung auf die Werthe von  $\mu$  will ich vorläufig annehmen, dass sie von  $\mu_1$  bis  $\mu_{2p+1}$  gehen, so dass ihre Anzahl ist:  $2p+1$  (ich werde später zeigen, dass bei einer schicklichen Wahl der  $\mu$  die viel geringere Anzahl:  $p+1$  schon hinreicht).

Das gegebene System der Beobachtungen sei also folgendes:

$$(8) \quad \begin{cases} V(0, \mu_1) & V(0, \mu_2) & V(0, \mu_3) & \cdots & V(0, \mu_{2p+1}) \\ V(\alpha, \mu_1) & V(\alpha, \mu_2) & V(\alpha, \mu_3) & \cdots & V(\alpha, \mu_{2p+1}) \\ V(2\alpha, \mu_1) & V(2\alpha, \mu_2) & V(2\alpha, \mu_3) & \cdots & V(2\alpha, \mu_{2p+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V((2p-1)\alpha, \mu_1) & V((2p-1)\alpha, \mu_2) & V((2p-1)\alpha, \mu_3) & \cdots & V((2p-1)\alpha, \mu_{2p+1}). \end{cases}$$

Die horizontalen Reihen enthalten die Beobachtungen in denselben Meridianen, die verticalen diejenigen in denselben Parallelkreisen. Bringt man (3) in die Form:

$$V(\omega, \mu) = C_0 + C_1 \cos \omega + S_1 \sin \omega + C_2 \cos 2\omega + S_2 \sin 2\omega + \cdots$$

so erhält man nach dem bekannten Verfahren aus jeder verticalen Reihe von (8) die numerischen Werthe von  $C_0, C_1 \cdots S_1, S_2 \cdots$  z. B. aus der ersten verticalen Reihe:

$$(9) \quad \begin{cases} C_0 = \frac{1}{2p} \sum_{m=0}^{m=2p-1} V(m\alpha, \mu_1), \\ C_1 = \frac{1}{p} \sum \cos m\alpha V(m\alpha, \mu_1), \quad S_1 = \frac{1}{p} \sum \sin m\alpha V(m\alpha, \mu_1), \\ \cdots \cdots \cdots \\ C_p = \frac{1}{p} \sum \cos pm\alpha V(m\alpha, \mu_1), \quad S_p = \frac{1}{p} \sum \sin pm\alpha V(m\alpha, \mu_1). \end{cases}$$

Man erhält, indem man für  $\mu_1$  nach und nach setzt  $\mu_2, \mu_3 \cdots$ , für jedes  $C$  und jedes  $S$  die Anzahl:  $2p+1$  Werthe, die ich in der



willkürlich gewählt, und die Bestimmung der  $a$ 's von ihnen abhängig gemacht werden. Ich werde hernach zeigen, welche Werthe der  $\mu$ 's die vortheilhaftesten sind.

In Bezug auf (11) gelten nun folgende Sätze:

$$(12) \quad \sum a X^{(n)} X^{(n')} = 0,$$

diese Summe genommen in Beziehung auf das ganze System der  $\mu$ 's und respectiven  $a$ 's, durch welches den Gleichungen (11) genügt ist, so lange  $n$  und  $n'$  verschieden sind und  $n + n'$  nicht grösser, als  $2p + 1$ . Wenn  $n = n'$ , so hat man für diese Summe

$$(13) \quad \sum a (X^{(n)})^2 = \frac{2}{2n+1} \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2.$$

Eben so hat man, die Summe in demselben Sinne genommen, allgemein:

$$(14) \quad \sum a (1 - \mu^2)^i \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \frac{d^i X^{(n')}}{d\mu^i} = 0,$$

so lange  $n$  und  $n'$  verschieden und ihre Summe kleiner als  $2p + 1$  ist. Wenn  $n = n'$ , so ist

$$(15) \quad \begin{cases} \left( \frac{1}{n(n-1) \cdots (n-[i-1])} \right)^2 \sum a (1 - \mu^2)^i \left( \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} \right)^2 \\ = \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2 \left( \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+i)}{n(n-1) \cdots (n-[i-1])} \right). \end{cases}$$

Den Beweis für diese Sätze (12), (13), (14), (15) zieht man unmittelbar aus denen in (4), (5), (6), (7). In der That substituiren wir in

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu$$

für  $X^{(n)}$  und  $X^{(n')}$  ihre Werthe aus (2), führen dann die Multiplication aus, so erhalten wir eine Reihe von der Form:

$$(16) \quad X^{(n)} X^{(n')} = \mu^{n+n'} - \alpha \mu^{n+n'-2} + \beta \mu^{n+n'-4} \dots$$

Integriren wir diese Gleichungen nach  $\mu$  zwischen  $-1$  und  $+1$ , so verschwindet das Integral von selbst, wenn  $n + n'$  eine ungerade Zahl ist; wenn dies aber eine grade Zahl ist, erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} X^{(n)} X^{(n')} d\mu = 2 \left( \frac{1}{n+n'+1} - \frac{\alpha}{n+n'-1} + \frac{\beta}{n+n'-3} - \dots \right).$$

Diese Grösse ist nach (4) = 0. Nehmen wir jetzt die Summe

$$\sum a X^{(n)} X^{(n')} = \sum a (\mu^{n+n'} - \alpha \mu^{n+n'-2} + \beta \mu^{n+n'-4} - \dots)$$

in Beziehung auf das ganze System der  $\mu$ 's und respectiven  $a$ 's, durch welches den Gleichungen (11) Genüge geschieht, unter der Voraussetzung, dass  $n + n' < 2p + 1$ . Substituirt man auf der rechten

Seite für  $\Sigma a \mu^{n+n'}$ ,  $\Sigma a \mu^{n+n'-2}$ , etc. ihre Werthe aus (11), so ergibt sich, dass diese Summe von selbst verschwindet, wenn  $n + n'$  ungrade ist, und wenn  $n + n'$  grade ist, wird sie

$$\sum a X^{(n)} X^{(n')} = \left( \frac{1}{n+n'+1} - \frac{\alpha}{n+n'-1} + \frac{\beta}{n+n'-3} + \dots \right).$$

Diese Grösse ist aber, wie wir eben gesehen haben  $= 0$ .

Ganz auf dieselbe Weise beweist sich (14) aus (5), und man übersieht sehr leicht, dass die Summen (13) und (15) die halben Werthe von den entsprechenden Integralen (6) und (7) haben.

Mittelst dieser Sätze (12), (13), (14), (15) bestimmt man die Coefficienten aus den Gleichungen (10) und denen ihnen zugehörigen ganz auf dieselbe Weise, wie bei den Sinus- und Cosinus-Reihen. Man findet

$$B_0^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right)^2 \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}} a C_0 X^{(n)}$$

oder wenn für  $C_0$  sein Werth aus (9) gesetzt wird:

$$(17a) B_0^{(n)} = \left( \frac{2n+1}{4p} \right) \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right)^2 \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}} \left( \sum_{m=0}^{m=2p-1} a V(m\alpha, \mu) X^{(n)} \right)$$

und allgemein

$$B_i^{(n)} = (2n+1) \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right)^2 \cdot \left( \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-[i-1])}{(n+1)(n+2) \dots (n+i)} \right) \\ \times \sum \frac{a C_i (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n(n-1) \dots (n-[i-1])} \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i}$$

oder, wenn für  $C_i$  sein Werth aus (9) gesetzt wird:

$$(17b) B_i^{(n)} = \frac{2n+1}{p} \left( \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \right)^2 \cdot \left( \frac{n(n-1) \dots (n-[i-1])}{(n+1)(n+2) \dots (n+i)} \right) \\ \times \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu=\mu_{2p+1}} \left( \sum_{m=0}^{m=2p-1} \frac{a \cos i m \alpha (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}}{n(n-1) \dots (n-[i-1])} \frac{d^i X^{(n)}}{d\mu^i} V(m\alpha, \mu) \right).$$

Die Werthe für  $A_i^{(n)}$  haben dieselbe Form als  $B_i^{(n)}$ , man hat nur statt  $C_i$  zu setzen:  $S_i$ , oder statt  $\cos i m \alpha$  zu setzen:  $\sin i m \alpha$ .

Ich habe bis jetzt angenommen, dass auf jedem Meridian  $2p+1$  willkürlich gelegene Beobachtungen gegeben sind, und dass diese Meridiane den Aequator in  $2p$  gleiche Theile theilen. Dadurch wurde zunächst der Zweck erreicht, dass alle Constanten der  $Y^{(n)}$  bis  $Y^{(p)}$  inclusive vollständig bestimmt wurden. Indess habe ich diese Annahme gemacht, mehr um die Vorstellung zu fixiren, als weil der Umstand, ob die  $Y^{(n)}$  alle vollständig, oder ob einige nur theilweise bestimmt werden, nicht unerheblich wäre. Bei der Anwendung wird sich häufig der Fall finden, wo es sogar zweckmässig ist, von den höhern  $Y^{(n)}$  nur









Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Coefficienten in (24) führt zu keinem andern Verfahren, und man ist also überhoben der so lästigen Auflösung der sonst durch diese Methode gegebenen Gleichungen. Wenn  $F(x)$  eine algebraische ganze Function von der Ordnung  $q - 1$  ist, so wird sie durch (24) vollständig bestimmt; wenn dies nicht der Fall ist, muss man sich  $F\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\mu\right)$  in eine Reihe nach den steigenden Potenzen von  $\mu$  entwickelt denken, die hinlänglich convergirt, um die  $q^{\text{te}}$  und die höhern Potenzen vernachlässigen zu können. Diese vernachlässigten Glieder üben einen Einfluss auf die Werthe, welche man für  $B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)} \dots$  erhält, aus, der aber um so geringer ist, je niedriger die Stellenzahl der  $B$  ist. So ist  $B^{(0)}$  genau bis auf diejenigen Glieder, deren Exponent in der Entwicklung von  $F\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\mu\right)$  gleich oder grösser als  $2q$  ist, und allgemein:  $B^{(m)}$  ist genau bis auf die Glieder, deren Exponent gleich oder grösser als  $2q - m$  ist. Grade aus diesem Umstande, dass die ersten Glieder mit viel grösserer Genauigkeit bestimmt werden, lässt sich oft nicht unerheblicher Nutzen ziehen. Wenn z. B. das Integral  $\int F(x) dx$  zwischen  $A$  und  $B$  aus den gegebenen  $q$  Beobachtungen gefunden werden soll, so ist dieses  $= (B-A)B^{(0)}$  und also genau bis auf die Glieder in der Entwicklung von  $F\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\mu\right)$  von der Ordnung  $2q$ , vorausgesetzt, dass die gegebenen Werthe von  $F(x)$  auf Abscissen fallen, deren zugehörige  $\mu$ 's die Wurzeln von  $X^{(q)} = 0$  sind. Es seien diese gegebenen Werthe  $M_1, M_2, \dots, M_q$ , so ist also

$$\int_A^B F(x) dx = (B-A) \{a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_q M_q\}$$

wo die  $a$ 's aus (18) bestimmt werden müssen. Diese Integrationsmethode, die sich hier gleichsam von selbst darbietet, ist genau dieselbe, welche Herr Hofrath Gauss in seiner Abhandlung: *Methodus nova integralium etc.* (Comm. Soc. Reg. Gött. recent. Vol. III) entwickelt hat, ausgehend grade von der Forderung, dies Integral bis auf Glieder von der Ordnung  $2q$  genau zu erhalten. In dieser Abhandlung findet man die Wurzeln der Gleichungen, von denen die  $\mu$ 's abhängen, bis  $X^{(q)} = 0$ , und zugleich die Werthe der entsprechenden  $a$ 's. Diese  $a$ 's sind in der erwähnten Abhandlung mit  $R, R' \dots$  bezeichnet, und unsere  $\mu', \mu'' \dots$  erhält man aus den dortigen  $a, a', a'' \dots$ , indem man diese  $a$ 's verdoppelt und von 1 abzieht.

Ueber vortheilhafte Anordnung der Rechnung bei Anwendung der entwickelten Methode, einige Hülfsstafeln u. dgl. werde ich mich in einer spätern Mittheilung, wo ich diese Methode auf die Darstellung der Vertheilung des Erdmagnetismus anwenden werde, auslassen.