

Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano.

(Memoria del prof. E. BERTINI, a Pisa.)

Le presenti ricerche sono indirizzate alla soluzione del seguente problema: Indicare tutte le possibili trasformazioni involutorie nel piano, che sono irriducibili, cioè non possono dedursi l'una dall'altra per una serie di trasformazioni quadratiche o, ciò che è lo stesso, per una trasformazione univoca. Noi ammettiamo che i punti fondamentali delle trasformazioni involutorie possano assumere posizioni speciali e anche divenire infinitamente vicini; ma i nostri ragionamenti non abbracciano quei casi ne' quali le curve fondamentali si spezzano (*). Escludendo questi casi, ecco il metodo e i risultati di queste ricerche. Nel § 1 si premette la riduzione di alcuni sistemi lineari ad altri di ordine inferiore per trasformazioni quadratiche. Generalizzando un procedimento noto (**) si arriva ad alcuni nuovi risultati. Nel § 2 si dimostra (nell'ipotesi suddetta) che ogni curva fondamentale L_i che passa α_{ii} volte pel punto fondamentale a cui corrisponde, dà origine ad un sistema $[L]$ di curve corrispondenti a sè stesse o fra loro, e che in ogni trasformazione involutoria esiste almeno uno di tali sistemi. Nei § 3, 4, 5 esaminiamo i casi $\alpha_{ii}=1$, $\alpha_{ii}=2$, $\alpha_{ii}=3$ e troviamo che per essi le trasformazioni involutorie sono sempre riducibili ai quattro casi seguenti (irriducibili fra loro):

a) Omologia armonica.

(*) È chiaro che ciò può soltanto accadere quando i punti fondamentali sieno infinitamente vicini (non reciprocamente).

(**) LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch*, t. 1, pag. 488.

b) Trasformazioni involutorie (di JONQUIÈRES) d'ordine $p+2$ con $2p+2$ punti semplici fondamentali distinti, aventi una curva punteggiata unita d'ordine $p+2$, di genere p (essendo p un numero qualunque >0), con un (solo) punto p^{plo} nel punto $(p+1)^{\text{uplo}}$ della trasformazione.

c) Trasformazione involutoria dell'8° ordine con 7 punti tripli, avente una curva punteggiata unita di 6° ordine, per la quale quei sette punti sono doppi.

d) Trasformazione involutoria del 17° ordine con 8 punti sestupli, avente una curva punteggiata unita di 9° ordine, per la quale quegli otto punti sono tripli.

Alle trasformazioni a), b), di cui la costruzione è semplicissima, si possono ridurre, come dimostrai in altro lavoro (*), tutte le trasformazioni involutorie di JONQUIÈRES. Il caso c) fu già considerato da GEISER (**), però da un punto di vista affatto diverso. Esso si ottiene con una rete di curve di 3° ordine passanti per i sette punti fondamentali, facendo corrispondere ad ogni punto del piano il nono punto comune alle curve del 3° ordine passanti per quel punto. Il caso d) è (a mio avviso) non ancora osservato. Esso nasce da una notevole proprietà (credo nuova) del sistema lineare triplamente infinito di curve di 6° ordine (di genere 2) che hanno otto punti doppi in comune. Le curve di questo sistema che passano per un punto (cioè appartengono ad una rete) passano necessariamente per un altro punto. I punti del piano sono così riferiti univocamente ed involutoriamente.

L'importanza delle trasformazioni a) b) c) d) è resa manifesta dal § 6 ove si considera il caso $\alpha_{ii} > 3$ nel supposto che le curve del sistema $[L]$ sieno unite (corrispondenti a sè stesse); giacchè si trova che, in questa ipotesi, le trasformazioni involutorie sono appunto riducibili ai suddetti casi a) b) c) d).

Considerazioni di altra specie m'indurrebbero a pensare che a questi casi possano ridursi tutte le possibili trasformazioni involutorie nel piano. Però una dimostrazione rigorosa di tale proprietà non mi è riuscita. Le difficoltà provengono soprattutto dalla considerazione di quei casi ne' quali le curve fondamentali si spezzano, e quindi cessano di essere vere parecchie proprietà che

(*) *Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie*. Annali di Matematica, serie II, t. 8, n. 4, 18.

(**) *Ueber zwei geometrische Probleme*. Giornale di CRELLE, t. 67, pag. 78. — Cfr. anche la *Bemerkung* di MILINOWSKI al precedente lavoro di GEISER (CRELLE, t. 77, pag. 263).

sussistono in generale; per es., le relazioni (13) (14) (15) del § 2. Tali casi non furono finora convenientemente esaminati, nemmeno per le trasformazioni univoche qualunque.

Nel desiderio che altri possa mettersi in queste ricerche aggiungo in fine un'Appendice, in cui accenno alle proprietà colle quali ho tentato l'esame del caso generale.

§ 1.

Riduzione di alcuni sistemi lineari ad altri di ordine inferiore per trasformazioni quadratiche.

1. Consideriamo un sistema (lineare) $[C]$ di curve aventi a comune punti multipli di ordine r_1, r_2, \dots, r_h rispettivamente in h punti (punti base) $1, 2, \dots, h$ e tale che una curva (generale) del sistema non sia sottoposta ad altre condizioni e non si decomponga in parti. Per essere il sistema lineare essa non possiede punti multipli esternamente ai punti base; poichè si ha la proprietà: Se una curva (generale) variabile in un sistema lineare qualsivoglia, non si compone di parti, non può avere punti multipli fuori dei punti fissi comuni alle curve del sistema. Infatti, essendo il sistema lineare, due curve di esso determinano un fascio di curve tutte appartenenti al sistema, ognuna delle quali per conseguenza sarebbe dotata di punti multipli esternamente ai punti base. Quindi il fascio dovrebbe spezzarsi in una parte fissa e in una variabile (*) e però, ecc.

Sia n l'ordine di una curva del sistema $[C]$, p il genere, β il numero delle relazioni sussistenti fra i punti base, cioè il numero delle condizioni date da questi punti che sono conseguenza delle rimanenti, ed α il numero delle condizioni che determinano una curva del sistema. È evidente che sussisteranno

(*) Non può accadere che ogni curva di un fascio sia dotata di punti multipli (esternamente ai punti base) se il fascio non si compone di una parte fissa e di una variabile. Per persuadersene basta osservare che due curve del fascio avvicinandosi indefinitamente, e un punto multiplo dell'una tendendo a coincidere con un punto multiplo dell'altra, al punto di coincidenza (esterno ai punti base) debbono approssimarsi delle intersezioni comuni alle due curve: il che non può avvenire se le curve sono interamente distinte. Se un fascio presenta infiniti punti doppi e non ha luogo il caso ora considerato, deve appartenere al fascio una curva contata più volte. I due casi possono anche aver luogo simultaneamente (per es., nel fascio di 3° ordine formato da una retta fissa e da un fascio di coniche bitangenti).

le due relazioni

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2) &= \sum_i r_i(r_i-1) + 2p \\ n(n+3) &= \sum_i r_i(r_i+1) - 2\beta + 2\alpha:\end{aligned}$$

da cui seguono queste altre

$$\sum_i^h r_i^2 = n^2 + 1 - p + \beta - \alpha \quad (1)$$

$$\sum_i^h r_i = 3n - 1 + p + \beta - \alpha. \quad (2)$$

Dalla prima delle quali si trae che due curve del sistema si tagliano in

$$s = p - \beta + \alpha - 1 \quad (3)$$

punti esternamente ai punti base. Si può osservare che $\alpha - 1$ punti arbitrari determinano un fascio di curve, e però deve essere $s \geq \alpha - 1$: onde si ha $p \geq \beta$.

Il sistema considerato è riducibile per trasformazioni quadratiche ad un altro di ordine inferiore se la somma dei tre punti base di ordine più elevato è $> n$. Supponiamo ordinati i punti base in guisa che si abbia

$$r_1 \geq r_2 \geq r_3 \cdots \geq r_n.$$

Trasportiamo nelle (1), (2) tutti i termini nel secondo membro: moltiplichiamo la (2) per r_3 e sottraggiamo la (1) dalla (2): otterremo

$$\sum_i^h (r_i - r_3)r_i - n^2 + 3nr_3 + (p-1)(1+r_3) + (\beta-\alpha)(r_3-1) = 0.$$

Se $r_1 + r_2 + r_3$ non è maggiore di n , cioè si abbia $r_1 + r_2 + r_3 + k = n$, (essendo k numero intero positivo anche nullo), osservando che

$$k^2 + 2k(r_1 + r_2 + r_3) - 3r_3k \geq 0,$$

dalla precedente si trae facilmente

$$\sum_i^h (r_i - r_3)r_i + 2r_3^2 - 2r_1r_2 + (p-1)(1+r_3) + (\beta-\alpha)(r_3-1) \geq 0.$$

Adunque se si abbia

$$\sum_i^h (r_i - r_3)r_i + 2r_3^2 - 2r_1r_2 + (p-1)(1+r_3) + (\beta-\alpha)(r_3-1) < 0, \quad (4)$$

od anche, per essere $2r_3^2 - 2r_1r_2 \leq 0$ ed $r_i^2 - r_3r_i \leq 0$ ($i=4, 5, \dots h$), se

$$(p-1)(r_3+1) + (\beta-\alpha)(r_3-1) < 0, \quad (5)$$

il sistema $[C]$ è trasformabile quadraticamente in un altro di ordine inferiore.

2. Se $p=0$, $\alpha=1$; cioè si considera un fascio di curve razionali, discende dalla (3) che deve essere $\beta=0$, cioè non possono esistere vincoli fra i punti base del sistema. Inoltre, la (5) essendo manifestamente soddisfatta, si ha la proprietà nota (*): Un fascio di curve razionali si può sempre ridurre per trasformazioni quadratiche ad un fascio di ordine inferiore; in particolare ad un fascio di rette.

3. Se $p=1$, $\alpha=1$; cioè si ha un fascio di curve di genere 1, dalla (3) segue $\beta=1$, cioè deve esistere un vincolo fra i punti base del sistema. Applicando la (4), si riconosce che il sistema è sempre riducibile, escluso il caso in cui sia

$$\begin{aligned} r_3^2 - r_1r_2 &= 0 \\ r_i - r_3 &= 0 \quad (i=4, \dots h) \end{aligned}$$

cioè si abbia

$$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_h;$$

nel qual caso le (1) (2) diventano

$$hr_1^2 = n^2, \quad hr_1 = 3n,$$

da cui

$$h=9 \quad n=3r_1.$$

Adunque: Un fascio di curve di genere 1 è deducibile per trasformazioni quadratiche da un fascio di curve d'ordine $3r$ con nove punti base multipli secondo lo stesso numero r . Questo secondo fascio è manifestamente non riducibile ad altri di ordine inferiore per trasformazioni univoche.

4. Se $p=0$, $\alpha=2$ si ha $\beta=0$, $s=1$ e dalla (5) si ottiene il teorema noto (**): Una rete di curve razionali, soggette alle sole condizioni di avere punti fissi comuni, è deducibile con trasformazioni quadratiche dalla rete delle rette di un piano.

(*) NOETHER, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*. Mathem. Annalen, t. 3, pag. 165.

(**) Veggasi, per es., LINDEMANN, l. c., pag. 489 e la nota bibliografica alla stessa pagina.

5. Se $p=1$, $\alpha=2$, ossia si considera una rete di curve di genere 1, deve essere $s=-\beta+2$. Ma due curve non possono segarsi in un solo punto variabile, giacchè per mezzo di un fascio di curve della rete si otterrebbero i punti di una curva della rete stessa uno ad uno, e però la curva sarebbe razionale. Adunque dovrà essere $s=2$, $\beta=0$.

La considerazione di queste reti e dei fasci di curve razionali (n.º 2) è racchiusa in quella dei sistemi lineari, pei quali, α essendo qualunque, sieno $p=\alpha-1$ e $\beta=0$; onde $s=2\alpha-2$. Per tali sistemi le (1) (2) diventano

$$\sum_1^h r_i^2 = n^2 - 2\alpha + 2, \quad \sum_1^h r_i = 3n - 2; \quad (6)$$

e la condizione (4) si cangia nella

$$\sum_4^h (r_i - r_3) r_i + 2r_3^2 - 2r_1 r_2 - 2r_3 + 2\alpha - 2 < 0;$$

la quale, ponendo

$$r_2 = r_1 - \delta, \quad r_3 = r_1 - \delta_1,$$

ove δ , δ_1 sono interi positivi, anche nulli, non maggiori di $r_1 - 1$ e tali che $\delta \leq \delta_1$, si trasforma nell'altra

$$\sum_4^h (r_i - r_3) r_i + 2(\alpha - r_1 - 1) + 2r_1(\delta - \delta_1) + 2\delta_1(\delta_1 - r_1 + 1) < 0. \quad (7)$$

Questa è manifestamente soddisfatta, per essere $\delta - \delta_1 \leq 0$ e $\delta_1 \leq r_1 - 1$, quando si abbia $\alpha - 1 < r_1$. Adunque:

Un sistema lineare, ∞^α , di curve di genere $\alpha - 1$, tale che due curve si seghino in $2\alpha - 2$ punti (variabili), è riducibile ad un altro di ordine inferiore (definito dalle stesse caratteristiche) se il genere $\alpha - 1$ è minore del numero che indica la molteplicità del punto base più elevato.

6. Se $\alpha=2$ il sistema è sempre riducibile quando sia $r_1 > 1$. Ma, se $r_1 = r_2 = \dots = 1$, le (6) danno $n=3$: quindi;

Una rete di curve di genere 1, due delle quali si segano in due punti variabili, è sempre deducibile con trasformazioni quadratiche dalla rete delle curve generali del 3º ordine passanti per 7 punti fissi.

7. Riprendendo la considerazione del sistema generale del n.° 5, se $\alpha-1=r_i$, la (7) mostra che il sistema è sempre riducibile se sia $r_i-r_3 < 0$ almeno per un valore di i . Quando sia $r_i-r_3=0$ ($i=4, 5, \dots, h$) l'applicazione della (7) lascia incertezza nei due casi seguenti:

$$1.^{\circ} \quad \delta=\delta_1=0: \quad \text{e però } r_1=r_2=\dots=r_h=\alpha-1$$

$$2.^{\circ} \quad \delta=\delta_1=r_1-1: \text{ e però } r_1=\alpha-1, \quad r_2=r_3=\dots=r_h=1.$$

Nel primo caso le (6) danno

$$\alpha-1=\frac{n}{3}, \quad h=9-\frac{6}{n}$$

cioè deve essere $n=6$, ovvero $n=3$. Nel secondo caso dalle (6) si ricava

$$\alpha^2-\alpha=n^2-3n+2$$

da cui si ottiene (trascurando un'altra soluzione priva di significato geometrico) $\alpha=n-1$ e per conseguenza $r_1=n-2$, $h=2n+1$. Possiamo quindi concludere che:

Un sistema lineare, ∞^α , di curve di genere $\alpha-1$, tale che due curve si seghino in $2\alpha-2$ punti (variabili), è riducibile ad un altro di ordine inferiore (definito dalle stesse caratteristiche) se il genere $\alpha-1$ è eguale al numero che indica la molteplicità del punto base più elevato, esclusi soltanto:

I sistemi lineari di curve d'ordine n (e di genere $n-2$) aventi a comune un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$ e $2n$ punti semplici;

Il sistema lineare triplamente infinito di curve di 6° ordine (e di 2° genere) aventi a comune otto punti doppi.

Questi sistemi sono manifestamente irriducibili per trasformazioni quadratiche.

8. Se $\alpha=3$, poichè dalle (6) segue che i punti base non possono essere tutti semplici, dovrà aversi $r_1 \geq 2$. Per conseguenza (n.° 5, 7):

Un sistema lineare, triplamente infinito, di curve di genere 2, tale che due curve si taglino in 4 punti variabili, è sempre deducibile per trasformazioni quadratiche dal sistema di curve di 6° ordine con 8 punti doppi comuni, ovvero dal sistema delle curve di 4° ordine con un punto doppio e 8 punti semplici comuni.

9. Le proprietà dei n.° 2, 3, 6, 8 (di cui dovremo fare applicazione) sussistono anche se i punti base divengono infinitamente vicini. Per dimostrarlo

valgono identicamente le considerazioni fatte da NÖTHER (*) nel caso del n.° 4; cioè si dimostra che, quando le molteplicità dei tre punti base più elevati danno una somma maggiore dell'ordine, se due di essi diventano infinitamente vicini al terzo in direzioni diverse (onde la trasformazione quadratica coi medesimi non è più possibile), esistono sempre due punti base che non sono infinitamente vicini al punto base più elevato in direzioni diverse e tali che la somma delle loro molteplicità e quella dell'ultimo punto supera l'ordine. Una sola eccezione s'incontra pel n.° 8, cioè se $\alpha=3$, nel sistema di curve di 5° ordine aventi a comune un punto triplo, un punto doppio e otto punti semplici, quando accada che il punto doppio sia infinitamente vicino al punto triplo in una direzione, gli otto punti semplici infinitamente vicini allo stesso punto triplo in

(*) *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* (Math. Ann., t. 5, pag. 634). Prendendo di qui le notazioni, invece della disuguaglianza ultima (a pag. 639) si trova, per un sistema definito dalle (1) (2), la seguente

$$0 \geq \frac{n-j}{2}(2j-n) + j(n-j-i_1) + (1-p)\left(\frac{n-j}{2}+1\right) + (\alpha-\beta)\left(\frac{n-j}{2}-1\right),$$

sussistendo le

$$j+i_1+i_2 > n, \quad i_1+i_2 \leq j,$$

onde

$$2j > n,$$

e

$$n \geq j+i_1, \quad n > j.$$

La suddetta proprietà risulta dimostrata se si prova assurda la disuguaglianza precedente. Ora nel caso del n.° 3, cioè se $p=\alpha=\beta=1$, è manifestamente non soddisfatta. Se $p=\alpha-1$ e $\beta=0$, diventa

$$0 \geq (n-j)(2j-n-1) + 2j(n-j-i_1) + 3(n-j) - 4\alpha + 4,$$

la quale evidentemente non sussiste nel caso del n.° 2 cioè se $\alpha=1$ e nel caso del n.° 4 cioè se $\alpha=2$ (notando, per quest'ultimo, che, non essendo le curve razionali, deve aversi $n \geq j+2$).

Nel caso del n.° 8, cioè se $\alpha=3$, la precedente relazione non è evidentemente soddisfatta se $n > j+2$. Se $n=j+2$ la medesima relazione diventa

$$3j - ji_1 - 4 \leq 0.$$

Ma, dall'essere $j+i_1 \leq n$, segue $i_1 \leq 2$ e dovrà prendersi $i_1=2$ per non ricadere nel sistema di curve di 4° ordine che già escludemmo (n.° 8). Sicchè quella relazione è assurda se $j > 4$. Ora, tenendo presente le (6), i casi $j=1, j=2$ sono da respingere e l'altro $j=4$ conduce ad un sistema di curve di 6° ordine con un punto quadruplo, due doppi e otto semplici comuni, il quale è sempre riducibile ad ordine inferiore. Il caso di $j=3$ dà un sistema di curve di 5° ordine con un punto triplo, un punto doppio e otto punti semplici comuni, il quale è pure riducibile ad ordine inferiore, tranne nel caso eccezionale summenzionato.

un'altra direzione e due in linea retta con esso (cioè le curve abbiano in quest'altra direzione un contatto dell'8° ordine e inoltre presentino inflessione). È facile persuadersi che un tal sistema è irriducibile per trasformazioni univoche. Esso è un esempio del fatto notevole che la riducibilità, per tali trasformazioni, di un sistema, può cessare per l'avvicinamento indefinito dei punti base.

§ 2.

Sistemi lineari corrispondenti a sè stessi nelle trasformazioni involutorie.

10. Prendiamo a considerare una trasformazione involutoria nella quale i punti fondamentali possano avere comunque posizioni speciali, ma escludiamo che sieno infinitamente vicini (*). Il sistema dei punti e delle curve fondamentali essendo il medesimo per le due figure, diciamo 1, 2, 3, ... h , i punti fondamentali; r_1, r_2, \dots, r_h i loro ordini di molteplicità; L_1, L_2, \dots, L_h le curve fondamentali (degli ordini r_1, r_2, \dots, r_h) corrispondenti ordinatamente a quei punti, e indichiamo con α_{ik} l'ordine di molteplicità del punto i per la curva L_k o, ciò che è lo stesso, l'ordine di molteplicità del punto k per la curva L_i : onde $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. Per le curve corrispondenti alle rette del piano sussistono le note relazioni

$$\sum_i r_i^2 = n^2 - 1 \quad (8)$$

$$\sum_i r_i = 3n - 3. \quad (9)$$

Inoltre, perchè una curva corrispondente ad una retta arbitraria non può tagliare una curva fondamentale fuori dei punti fondamentali, avremo le relazioni

$$nr_i = \sum_k \alpha_{ik} r_k \quad (i = 1, 2, \dots, h). \quad (10)$$

(*) La pubblicazione di questo lavoro essendo stata spezzata fra il fascicolo 3° e 4° del t. 8 di questi Annali, sono riuscito, nell'intervallo, ad avvicinarmi alla soluzione del problema propostomi assai più di quanto sta scritto nell'introduzione. Ho potuto, cioè, evitare le difficoltà provenienti dall'avvicinamento indefinito dei punti fondamentali e dallo spezzamento delle curve fondamentali, col variare la trattazione in alcuni punti e per il teorema del n.° 51: per il quale è sufficiente di considerare nei §§ 2, 3, 4, 5, 6 le trasformazioni involutorie date, come aventi i punti fondamentali a distanze finite. Vedasi nel n.° 52 che cosa resta ancora per risolvere interamente la questione.

Inoltre, essendo le curve fondamentali razionali, si ha

$$(r_i - 1)(r_i - 2) = \sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik} - 1), \quad (i = 1, 2, \dots, h). \quad (11)$$

Dico che si avrà ancora la relazione

$$r_i(r_i + 3) = \sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik} + 1) \quad (i = 1, 2, \dots, h). \quad (12)$$

Si osservi infatti che, dati i punti fondamentali, la jacobiana della rete di curve corrispondenti alle rette del piano è individuata; onde, per una curva fondamentale che è una parte di quella jacobiana, potrà accadere solamente che i passaggi per i punti fondamentali non rappresentino tutte condizioni indipendenti (*): cioè si abbia

$$r_i(r_i + 3) \leq \sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik} + 1) \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

ossia, per la (11)

$$3r_i - 1 \leq \sum_k \alpha_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Ma è facile vedere che deve aver luogo sempre il segno inferiore; perchè altrimenti, sommando le (10), per la precedente, le (8) e (9), si giungerebbe ad una relazione assurda. Adunque (**); una curva fondamentale è determinata da' suoi passaggi pei punti fondamentali, e questi rappresentano tutte condizioni indipendenti. Dalle (11) (12) seguono poi queste altre relazioni

$$r_i^2 + 1 = \sum_k \alpha_{ik}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (13)$$

$$3r_i - 1 = \sum_k \alpha_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, h). \quad (14)$$

Si noti infine che due curve fondamentali si segano soltanto in punti fondamentali; la quale proprietà è evidente essendo i punti fondamentali a distanze finite. Essa può anche essere dedotta dalle formule precedenti. Infatti se fosse

$$r_i r_k \geq \sum_s \alpha_{si} \alpha_{sk},$$

essendo l, k due (diversi) dei numeri $1, 2, \dots, h$; sommando le relazioni che nascono di qui col dare a k i valori $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, h$, insieme alla

(*) Altrimenti: Se una curva fondamentale non risultasse determinata da' suoi passaggi pei punti fondamentali, siccome l'essere la curva fondamentale dipende soltanto da questi passaggi, avremmo infinite curve fondamentali: il che è assurdo.

(**) Avvertiamo nuovamente che si considerano i punti fondamentali a distanze finite.

(13), si troverebbe

$$r_i \sum_k r_k \geq \sum_s \alpha_{si} (\alpha_{s1} + \alpha_{s2} + \dots + \alpha_{sh}) - 1$$

cioè, per le (14), (8),

$$r_i (3n - 3) \geq \sum_s \alpha_{si} (3r_s - 1) - 1$$

la quale, per le (10), (14), non può essere verificata se non ha luogo il segno inferiore. Dunque si ha

$$r_i r_k = \sum_s \alpha_{si} \alpha_{sk}. \quad (15)$$

11. Ciò premesso, consideriamo una curva qualunque fondamentale L , d'ordine r_1 . Per questa curva i passaggi per il punto 1 equivalgono ad $\frac{\alpha_{11}(\alpha_{11} + 1)}{2}$ condizioni lineari. Per una curva L che soddisfi a tutte le condizioni della L , tranne che nel punto 1 abbia un punto $(\alpha_{11} - 1)^{\text{uplo}}$, resteranno quindi

$$\frac{\alpha_{11}(\alpha_{11} + 1)}{2} - \frac{(\alpha_{11} - 1)\alpha_{11}}{2} = \alpha_{11}$$

condizioni libere; cioè la L apparterrà ad un sistema $\infty^{\alpha_{11}}$. Inoltre, poichè L è del genere zero, L sarà del genere

$$\frac{\alpha_{11}(\alpha_{11} - 1)}{2} - \frac{(\alpha_{11} - 1)(\alpha_{11} - 2)}{2} = \alpha_{11} - 1.$$

Alla curva L nella trasformazione involutoria corrisponde una curva d'ordine

$$nr_1 - (\alpha_{11} - 1)r_1 - \alpha_{12}r_2 - \alpha_{13}r_3 - \dots$$

cioè, per la prima delle (10), d'ordine r_1 : avente il punto 1 multiplo secondo

$$r_1^2 - \alpha_{11}(\alpha_{11} - 1) - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \dots$$

cioè, per la (13), secondo $\alpha_{11} - 1$, e il punto $i (= 2, 3, \dots 4)$ multiplo secondo

$$r_1 r_i - (\alpha_{11} - 1)\alpha_{1i} - \alpha_{21}\alpha_{2i} - \alpha_{31}\alpha_{3i} - \dots$$

cioè, per la (15), multiplo secondo α_{1i} . Adunque, la curva corrispondente a L ha lo stesso ordine e le stesse molteplicità di L , cioè il sistema formato dalle curve L , che indicheremo con $[L]$, è, nella trasformazione involutoria, corrispondente a sè stesso.

Due curve del sistema $[L]$ si segano, per la (13), in

$$r_1^2 - (\alpha_{11} - 1)^2 - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \dots = 2\alpha_{11} - 2$$

punti, il che segue anche dall'essere il sistema $\infty^{\alpha_{11}}$, le curve di genere $\alpha_{11} - 1$ e $\beta = 0$ (cfr. n.° 1).

Indicando con $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ i numeri $\alpha_{11} - 1, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1h}$, si hanno adunque, pel sistema $[L]$, le relazioni

$$\sum_i \rho_i^2 = r_1^2 - 2(\alpha_{11} - 1) \quad (16)$$

$$\sum_i \rho_i = 3r_1 - 2. \quad (17)$$

12. In una trasformazione involutoria si può sempre considerare almeno un sistema $[L]$ ottenuto nel modo detto. Ciò risulta dalla seguente proprietà:

In una trasformazione involutoria (d'ordine > 2) una almeno delle tre curve fondamentali d'ordine più elevato passa per il punto fondamentale a cui corrisponde.

Sieno infatti 1, 2, 3 i punti fondamentali d'ordine più alto; onde si avrà $r_1 + r_2 + r_3 > n$ (*) e però

$$r_1 + r_2 + r_3 = n + \delta, \quad (A)$$

δ indicando un numero (intero) positivo non nullo. Alla retta 12 corrisponde una curva d'ordine $n - r_1 - r_2$ la quale deve avere il punto 1 multiplo secondo $r_1 - \alpha_{11} - \alpha_{12}$ e il punto 2 multiplo secondo $r_2 - \alpha_{22} - \alpha_{21}$: sarà quindi

$$n - r_1 - r_2 \geq r_1 - \alpha_{11} - \alpha_{12} + r_2 - \alpha_{22} - \alpha_{12}$$

cioè:

$$2r_1 + 2r_2 \leq n + \alpha_{11} + \alpha_{22} + 2\alpha_{12}. \quad (B)$$

Questa relazione sussiste anche se la retta 12 è fondamentale [onde non può, per la (14), contenere altri punti fondamentali, oltre 1, 2] giacchè allora si avrebbe per le (10), (14), (15),

$$r_1 + r_2 = n, \quad \alpha_{11} + \alpha_{12} \geq r_1, \quad \alpha_{22} + \alpha_{12} \geq r_2$$

il segno $>$ riferendosi al caso in cui la retta 12 corrisponda al punto 1 (nel qual caso del resto si ha già un sistema $[L]$ nel fascio di rette di centro 2). La stessa relazione (B) è vera anche quando la 12, non essendo fondamentale, contenesse altri punti fondamentali oltre 1, 2. Perchè, ammettendo, per es., che sulla retta 12 giaccia il punto 4, il ragionamento fatto per stabilire la relazione (B) condurrebbe a quest'altra

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_4 \leq n + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{44} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{41}$$

(*) Cfr. n.° 4.

dalla quale si passa alla (B) osservando che manifestamente si ha

$$r_4 \geq \alpha_{44} + \alpha_{24} + \alpha_{14}$$

e per conseguenza

$$2r_4 \geq \alpha_{44} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{14}.$$

Scrivendo la (B) per le tre rette 12, 23, 31 e sommando, si trova

$$4(r_1 + r_2 + r_3) \leq 3n + 2\alpha_{11} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{33} + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{12}$$

Ma si ha:

$$r_1 \geq \alpha_{12} + \alpha_{13} - \varepsilon_1$$

$$r_2 \geq \alpha_{21} + \alpha_{23} - \varepsilon_2$$

$$r_3 \geq \alpha_{31} + \alpha_{32} - \varepsilon_3$$

dove ε_1 (e similmente $\varepsilon_2, \varepsilon_3$) è 0 od 1; acquistando questo ultimo valore (e allora dovendosi prendere il segno di eguaglianza) se accada che la retta 23 sia fondamentale e corrisponda al punto 1. Quindi la precedente relazione diventa, tenendo anche presente la (A),

$$3\delta - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \leq 2\alpha_{11} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{33}.$$

Adunque, eccettuato il caso in cui $\delta = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, che conduce ad una trasformazione involutoria di 2° ordine (*), una almeno delle $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ deve essere diversa da zero: come asserimmo.

§ 3.

Trasformazioni involutorie

per le quali una (almeno) delle $\alpha_{ii} (i=1, 2, \dots, h)$ è l'unità.

13. Supponiamo che esista una curva fondamentale, per es., la L_1 , la quale passi semplicemente pel punto fondamentale a cui corrisponde. Il sistema $[L]$ a cui essa dà origine (n.° 11) è un fascio di curve di genere zero corrispondenti a due a due, ovvero corrispondenti a sè stesse. Un tal fascio è deducibile con una serie di trasformazioni quadratiche da un fascio di rette (n.° 2). La trasformazione involutoria a cui si giunge dalla data per la detta

(*) Quella accennata nel n.° 15 della mia Nota citata: *Sopra una classe, ecc.*

serie di trasformazioni è necessariamente di JONQUIÈRES. Infatti una retta arbitraria che incontri una retta r del fascio in un punto A ha per corrispondente una curva che incontra la corrispondente di r (distinta o no da essa) in un punto (il corrispondente di A): onde il centro del fascio è $(n-1)^{\text{uplo}}$ per le curve della rete corrispondenti alle rette del piano, se la trasformazione è di ordine n . Adunque:

Una trasformazione involutoria nella quale si presenta una curva fondamentale passante semplicemente pel punto fondamentale a cui corrisponde è riducibile, per trasformazioni quadratiche, ai casi *a*), *b*).

14. La proprietà precedente, ovvero lo studio diretto del sistema $[L]$ conduce a determinare le proprietà di tali involuzioni; cioè il sistema $[L]$ sarà formato di curve unite, ovvero corrispondenti due a due. Nel 1.° caso sopra ogni curva esiste una involuzione di punti corrispondenti e però due punti uniti: e il luogo di tali punti uniti è una curva punteggiata unita. Nel 2.° caso si hanno due sole curve unite del fascio e sopra ciascuna due punti uniti, cioè la trasformazione ammette quattro punti uniti; ovvero può una di quelle curve essere punteggiata unita; ovvero possono esserle amendue (*); ecc.

15. Le cose dette nei numeri precedenti 13, 14 sono manifestamente applicabili a tutte le trasformazioni involutorie nelle quali si trovi un fascio di curve razionali, unite o corrispondenti due a due.

16. Aggiungeremo qui la dimostrazione di proprietà che ci torneranno utili in seguito.

Premettiamo la ricerca dell'ordine n' della nuova trasformazione involutoria che si ottiene in un piano Π , trasformando quadraticamente un piano P , nel quale è data una trasformazione involutoria di ordine n . Se 1, 2, 3 sono i vertici del triangolo fondamentale preso nel piano P , ad una retta di Π corrisponderà in P , per la trasformazione quadratica, una conica circoscritta al triangolo 123; a questa, per la trasformazione involutoria, una curva di ordine $2n - r_1 - r_2 - r_3$ avente in 1, 2, 3 punti multipli degli ordini $2r_1 - \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13}$, $2r_2 - \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{23}$, $2r_3 - \alpha_{31} - \alpha_{32} - \alpha_{33}$: e infine a questa curva, per la trasformazione quadratica, corrisponderà in Π una curva di ordine

$$4n - 2(r_1 + r_2 + r_3) - (2r_1 - \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13}) - (2r_2 - \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{23}) - (2r_3 - \alpha_{31} - \alpha_{32} - \alpha_{33}).$$

Adunque si ha

$$n' = 4n - 4(r_1 + r_2 + r_3) + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31}. \quad (18)$$

(*) Cfr. la *Correzione* alla mia Nota citata. Ann. di Mat., serie II, tom. 8.

Annali di Matematica, tomo VIII.

Se il punto 1, per es., non è fondamentale, nè unito, dovrà porsi $r_1 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$. Che se il punto 1 (non essendo fondamentale) è unito, si dovrà inoltre sottrarre l'unità, giacchè alla conica passante per 1 corrisponderà allora, per la trasformazione involutoria, una curva per lo stesso punto. Per una ragione analoga, se 1, 2 (non essendo fondamentali) sono corrispondenti, si dovrà porre $r_1 = r_2 = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ e sottrarre due (*).

17. Ciò posto, sia 4 un punto semplice fondamentale. Escludiamo che la retta fondamentale corrispondente passi per 4, giacchè si ottengono allora (n.º 13) i casi *a*), *b*). Quella retta fondamentale congiunga i punti 2, 3; onde abbiasi, per le (10) (15),

$$r_2 + r_3 = n, \quad \alpha_{22} + \alpha_{23} = r_2, \quad \alpha_{33} + \alpha_{32} = r_3.$$

Prendasi un altro punto fondamentale 1 e si operi una trasformazione quadratica col triangolo 123: per le precedenti relazioni si avrà dalla (18)

$$n' = 4n - 4(n + r_1) + n + \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13},$$

e poichè

$$r_1 > \alpha_{11}, \quad 2r_1 \geq 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13},$$

segue

$$n' < n - r_1;$$

cioè la trasformazione è riducibile ad ordine minore.

Consideriamo ancora un punto 6 fondamentale doppio per una trasformazione involutoria. La conica fondamentale corrispondente, non passando per 6 (n.º 13), contenga i punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5. Si ha per le (10) (15)

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 2n$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} = 2r_1$$

$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{25} = 2r_2$$

$$\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{35} = 2r_3$$

$$\alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{44} + \alpha_{45} = 2r_4$$

$$\alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{53} + \alpha_{54} + \alpha_{55} = 2r_5.$$

Ne segue

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{42} + 2\alpha_{43} + 2\alpha_{23} = 4n - (4r_4 - \alpha_{44} - 2\alpha_{45}) - (4r_5 - \alpha_{55}):$$

(*) Si noti che la formola (18) potrebbe subire modificazioni a cagione di punti fondamentali dell'involuzione successivi ad 1, 2, 3 (cfr. Nota al n.º 21).

e quindi, prendendo per triangolo fondamentale 123, dalla (18) si ottiene

$$n' = \alpha_{44} + \alpha_{55} + 2\alpha_{45}$$

cioè, per essere

$$\alpha_{44} + \alpha_{45} \leq r_4, \quad \alpha_{55} + \alpha_{54} \leq r_5,$$

si ottiene

$$n' \leq r_4 + r_5.$$

Se fosse $r_4 + r_5 = n$ la retta 45 sarebbe fondamentale, cioè esisterebbe un punto semplice fondamentale, il qual caso fu considerato precedentemente. In ogni altro, $r_4 + r_5 < n$.

Concludiamo che: Se una trasformazione involutoria possiede un punto semplice fondamentale, ovvero un punto doppio fondamentale, e non presenta i casi *a*), *b*), è riducibile, per una trasformazione quadratica, ad una trasformazione involutoria di ordine minore (*).

§ 4.

Trasformazioni involutorie per le quali una (almeno) delle α_{ii} ($i = 1, 2, \dots, h$) è 2.

18. Quando esista una curva fondamentale L_i che abbia nel punto 1, a cui corrisponde, un punto doppio, il sistema $[L]$ è una rete di curve di genere 1, per le quali sussistono le (cfr. n.° 11)

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i^2 &= r_1^2 - 2 \\ \sum_i \rho_i &= 3r_1 - 2. \end{aligned}$$

Una tal rete si può sempre dedurre con trasformazioni quadratiche da una rete di curve di 3° ordine con sette punti comuni (n.° 6, 9). Siamo quindi condotti a considerare le trasformazioni involutorie che rappresenteremo con I , le quali ammettono una rete R di curve (unite o corrispondenti due a due) di 3° ordine, con sette punti fissi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

(*) Per istabilire generalmente questo teorema dovrebbe discutersi ciò che accade se i punti fondamentali della trasformazione involutoria diventano infinitamente vicini. Però l'applicazione del teorema è fatta in seguito soltanto a trasformazioni involutorie aventi i punti fondamentali a distanze finite (n.° 23, 34).

19. Una trasformazione I non può avere altri punti fondamentali all'infuori dei punti 1, 2, ... 7. Infatti, rappresentando con r_1, r_2, \dots, r_7 le molteplicità di questi punti per la trasformazione I (le r potendo anche essere nulle), perchè ad una curva di R corrisponde un'altra curva (di R) dello stesso ordine deve essere

$$3n - (r_1 + r_2 + \dots + r_7) = 3 \quad (9')$$

che è appunto la (9).

20. Una trasformazione I è riducibile ai casi $a)$, $b)$, se nella rete R esiste un fascio di cubiche razionali, ovvero un fascio di cubiche che si spezzano.

Osserviamo anzitutto che un fascio di cubiche razionali appartenenti ad R sarà formato di cubiche aventi un punto doppio in uno dei punti 1, 2, ... 7. Un tal punto sarà quindi di contatto per le curve di R e però rappresenterà due infinitamente vicini dei punti 1, 2, ... 7. Inoltre è chiaro che, se un fascio di cubiche della rete R si spezza in una retta e in un fascio di coniche, la retta contiene tre dei sette punti nominati: se si spezza in una conica (anche formata di due rette) e in un fascio di rette, la conica ne contiene sei.

Dicasi F il fascio di cubiche, di coniche o di rette. Ad F corrisponderà per l'involuzione un fascio F' che potrà pure essere in ciascun caso un fascio di cubiche, di coniche o di rette. Per diminuire il numero dei casi da esaminare, potremo intendere fatte le trasformazioni quadratiche che riducono F (per es.) ad un fascio di rette (n.° 2); per le quali trasformazioni, adoperandosi i soli punti 1, 2, ... 7, è evidente che si giunge sempre ad una rete R e però ad una trasformazione I . Allora potrà accadere che:

1.° Il fascio F' sia un altro fascio di rette. Essendo 1 il centro di uno dei due fasci F, F' , dovrà adunque aversi

$$n - r_1 = 1,$$

e si ha per conseguenza una trasformazione di JONQUIÈRES. Anzi se i centri dei due fasci sono diversi è chiaro che deve essere $n = 2$.

2.° Il fascio F' sia un fascio di coniche. Se il centro del fascio F di rette è un punto base del fascio F' si faccia una trasformazione quadratica (*) ponendo il triangolo fondamentale con un vertice nel punto base comune e

(*) Si noti che i punti 1, 2, ... 7, esistendo sopra curve generali del 3° ordine, non possono divenire infinitamente vicini in direzioni diverse: e quindi tre qualunque possono essere sempre i punti fondamentali di una trasformazione quadratica.

gli altri due in due altri punti base di F' . Il caso che consideriamo è allora ridotto al 1°. Che se il centro di F' è un punto 1 e i punti basi di F' sono quattro altri punti 2, 3, 4, 5 si avrà

$$n - r_1 = 2$$

$$2n - r_2 - r_3 - r_4 - r_5 = 1$$

donde, per la (9)', $r_6 = r_7 = 0$. Ne risulta $n = 3$, ovvero $n = 2$ (*).

3.° Il fascio F' sia un fascio di cubiche. Fu già avvertito che nel punto doppio comune a queste cubiche cadono due dei punti 1, 2, ... 7, per es. 1, 2. Le cubiche di F' passano inoltre per 3, 4, 5, 6, 7. Il presente caso è ridotto al 2° trasformando con un triangolo, di cui un vertice sia nel punto doppio e gli altri due vertici sieno presi arbitrariamente fra i punti 3, 4, 5, 6, 7; avvertendo che, se il punto doppio non è il centro di F' , debba essere scelto questo per uno degli ultimi due vertici.

21. Il teorema dimostrato può anche enunciarsi così:

Una trasformazione I è riducibile ai casi *a*), *b*) se dei punti 1, 2, ... 7, due (almeno) sono infinitamente vicini (**); ovvero tre sopra una retta; ovvero sei sopra una conica.

22. Per esempio, consideriamo il caso particolare in cui le curve di R sieno unite (corrispondenti a sè stesse) e sei dei punti 1, 2, ... 7 esistano sopra una conica, ovvero tre sopra una retta.

Se i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 esistono sopra una conica, due curve di R si segano in due punti (variabili) corrispondenti che debbono essere in linea retta col punto 1, per una proprietà notissima delle curve di 3° ordine. Abbiamo adunque un fascio di rette unite di centro 1: e però una trasformazione di

(*) Cfr. CREMONA: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*. Mem. dell'Acad. di Bologna, Nota II, n.° 22. Segue di qui che, se una trasformazione involutoria contiene un punto $(n - 2)^{\text{uplo}}$, deve essere necessariamente $n \leq 5$; poichè si debbono trascurare le soluzioni non conjugate a sè stesse.

(**) È facile vedere direttamente come avvenga che il semplice avvicinamento indefinito dei punti fondamentali possa produrre la riducibilità della trasformazione involutoria. Quando i punti 1, 2, ... 7 sono dati arbitrariamente, vedremo (n.° 24) che si ha una involuzione dell'8° ordine con sette punti tripli, irriducibile. Se due punti 1, 2 diventano successivi, trasformando il piano dato P in un altro Π col prendere (per es.) il triangolo 134 si troverà (cfr. n.° 16) che ad una retta di Π corrisponde una conica circoscritta al triangolo 134 e a questa corrisponde in P una curva del 7° ordine avente 1, 3, 4 punti doppi e 2, 5, 6, 7 punti tripli. Ma, passando da P a Π , questa curva viene ad essere trasformata col triangolo 234 ed ha quindi per corrispondente una curva del 7° ordine, ecc.

JONQUIÈRES con una curva unita (dell'ordine stesso della trasformazione); la quale trasformazione può essere evidentemente soltanto una delle seguenti:

- I) $n=1, \quad r_1=r_2=r_3=\dots=r_6=r_7=0$
- II) $n=2, \quad r_1=r_2=r_3=1, \quad r_4=r_5=r_6=r_7=0$
- III) $n=3, \quad r_1=2, \quad r_2=r_3=r_4=r_5=1, \quad r_6=r_7=0$
- IV) $n=4, \quad r_1=3, \quad r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=r_7=1$

(i punti di molteplicità zero essendo uniti o corrispondenti a due a due).

Facciamo invece l'ipotesi che tre 5, 6, 7 dei sette punti considerati sieno sopra una retta. Allora due curve di R si segano sopra una conica passante per 1, 2, 3, 4 e quindi abbiamo un fascio di coniche unite con questi punti base. Trasformando quadraticamente, ponendo il triangolo fondamentale in tre punti base, si giunge ad una trasformazione con un fascio di rette unite, e però ad una delle quattro trasformazioni precedenti I), II), III), IV). Sicchè, retrocedendo, troviamo nell'ipotesi ora fatta, oltre a queste trasformazioni, le seguenti:

- V) $n=4, \quad r_1=r_2=r_3=2, \quad r_4=r_5=r_6=1, \quad r_7=0,$
- VI) $n=5, \quad r_1=3, \quad r_2=r_3=r_4=2, \quad r_5=r_6=r_7=1,$
- VII) $n=5, \quad r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=2, \quad r_7=0,$
- VIII) $n=6, \quad r_1=r_2=3, \quad r_3=r_4=r_5=r_6=2, \quad r_7=1,$
- IX) $n=7, \quad r_1=r_2=r_3=r_4=3, \quad r_5=r_6=r_7=2;$

le quali nascono in vario modo dalle I), II), III), IV) per trasformazioni quadratiche. Per es., le V), VI), VII), VIII) nascono tutte dalla II), che è l'inversione quadrica, con una sola trasformazione quadratica. Cioè, indicando con c uno qualsiasi dei punti di contatto delle tangenti condotte dal polo (dell'inversione quadrica) alla conica punteggiata unita, con u_1, u_2, u_3 punti arbitrari di questa conica, con v_1, v_2 punti arbitrari del piano, si ottiene la V) con un triangolo cu_1v_1 ; la VI) con un triangolo cv_1v_2 ; la VII) con un triangolo $u_1u_2u_3$; la VIII) con un triangolo $u_1u_2v_1$. La IX) proviene (per es.) dalla IV) prendendo tre punti semplici di questa trasformazione per vertici del triangolo fondamentale della trasformazione quadratica. In tal modo si trova che le jacobiane J (cioè il sistema delle curve fondamentali) e le curve punteggiate unite Γ sono, nei singoli casi, le seguenti:

per la V):

$$J \equiv (12346)_1^2 (12345)_2^2 (12356)_3^2 (12)_4^1 (23)_5^1 (31)_6^1$$

$$\Gamma \equiv (123)^2;$$

per la VI):

$$J \equiv (1^2 234567)_1^3 (12347)_2^2 (12346)_3^2 (12345)_4^2 (14)_5^1 (13)_6^1 (12)_7^1$$

$$\Gamma \equiv (1^2 234)^3;$$

per la VII):

$$J \equiv (23456)_1^2 (13456)_2^2 (12456)_3^2 (12356)_4^2 (12345)_5^2 (12346)_6^2$$

$$\Gamma \equiv (56)^1;$$

per la VIII):

$$J \equiv (1^2 234567)_1^3 (1^2 234567)_2^3 (12456)_3^2 (12346)_4^2 (12356)_5^2 (12345)_6^2 (12)_7^1$$

$$\Gamma \equiv (1245)^2;$$

per la IX):

$$J \equiv (1^2 234567)_1^3 (1^2 234567)_2^3 (123^2 4567)_3^3 (1234^2 567)_4^3 (12345)_5^2 (12346)_6^2 (12347)_7^2$$

$$\Gamma \equiv (1^2 2^2 3^2 4^2 567)^5;$$

ove, per es., $(12346)_1^2$ indica una curva fondamentale passante per i punti 1, 2, 3, 4, 6, d'ordine 2 e corrispondente al punto 1, e $(123)^2$ indica una curva di 2° ordine passante per 1, 2, 3 e tangente in questi punti alle curve $(12346)_1^2$, $(12345)_2^2$, $(12356)_3^2$ ordinatamente corrispondenti agli stessi punti. È evidente infatti che i rami di una curva punteggiata unita, uscenti da un punto fondamentale, debbono toccare ivi altrettanti rami della curva fondamentale corrispondenti a quel punto.

23. Per il teorema del n.° 21 ci restano a considerare trasformazioni I , nelle quali i sette punti 1, 2, ... 7 sono a distanza finita (e però le curve fondamentali non si spezzano) e inoltre di essi non sono situati tre sopra una retta, nè sei sopra una conica. Per tali trasformazioni possiamo indubbiamente scrivere queste relazioni

$$2r_1 + r_2 + \dots + r_7 \leq 3n$$

$$r_1 + 2r_2 + \dots + r_7 \leq 3n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_1 + r_2 + \dots + 2r_7 \leq 3n$$

considerando, nella rete R , le sette cubiche (che non si decompongono) aventi punti doppi in 1, 2, ... 7 ordinatamente e dovendosi prendere il segno di eguaglianza se quelle cubiche sono fondamentali. Da esse e dalle (9)' si trae facilmente

$$n \leq 8, \quad r_i \leq 3 \quad (i = 1, 2, \dots, 7).$$

Se $n = 8$ deve essere necessariamente $r_i = 3$ e reciprocamente. Anzi dalle (8) (9) segue immediatamente che se una trasformazione univoca ammette soltanto punti tripli è necessariamente dell'8° ordine con sette punti tripli.

Ora, se de' punti 1, 2, ... 7 esiste alcuno semplice o doppio, siccome per le trasformazioni I che ora consideriamo quei punti sono a distanze finite, potremo applicare il teorema del n.° 17 (*) e quindi, tenendo presente anche il teorema del n.° 21, concludere in generale:

Una trasformazione I che possiede punti fondamentali semplici o doppi, se non presenta i casi $a)$, $b)$, è riducibile ad una trasformazione I d'ordine minore;

la quale proprietà resta così stabilita anche se i punti 1, 2, ... 7 divengono successivi.

24. Adunque rimane infine da esaminare una trasformazione I per la quale si presentano soltanto punti tripli (n.° 23), cioè una trasformazione dell'ottavo ordine con sette punti tripli 1, 2, ... 7. Di questi punti possiamo ritenere che due qualunque non sieno infinitamente vicini, sei non esistano sopra una conica, nè tre sopra una retta (n.° 21). Le curve fondamentali (del 3° ordine) passeranno per tutti i punti fondamentali e avranno rispettivamente in ciascuno un punto doppio. Si escluda che il punto doppio di una curva fondamentale sia diverso dal punto a cui essa corrisponde, giacchè le trasformazioni per le quali ciò potesse accadere sono riducibili ai casi $a)$, $b)$ (§ 3). Quindi resteranno a considerare le sole trasformazioni I per le quali il sistema delle curve fondamentali è il seguente:

$$J \equiv (1^2 2 3 4 5 6 7)_1^3 (1 2^2 3 4 5 6 7)_2^3 \dots (1 2 3 4 5 6 7^2)_7^3.$$

Una tale trasformazione si ottiene manifestamente facendo corrispondere a ciascun punto M del piano il nuovo punto M' comune alle curve del 3° ordine passanti per 1, 2, ... 7 e per M . La jacobiana della rete di curve di 3° ordine aventi a comune i punti 1, 2, ... 7 è manifestamente la curva punteggiata unita, e però

$$\Gamma \equiv (1^2 2^2 3^2 \dots 7^2)^6.$$

(*) Cfr. Nota allo stesso n.° 17.

Dico ora che nessun'altra trasformazione involutoria è possibile col sistema superiormente scritto di punti e curve fondamentali. Questa proprietà è un corollario del seguente teorema generale.

25. Una trasformazione involutoria (d'ordine $n > 2$) è *individuata*, dato il sistema dei punti e delle curve fondamentali, se i punti fondamentali non sono infinitamente vicini (*).

Premettendo che dalle (1), (2) il valore di n è determinato, consideriamo una retta, non fondamentale, che congiunge due punti fondamentali 1, 2. A questa retta, per una trasformazione involutoria (d'ordine n), che abbia il dato sistema di punti e curve fondamentali, corrisponderà una curva K che incontrerà la curva L_1 corrispondente al punto 1 (e similmente la L_2) in un punto corrispondente alla direzione della 12 uscente da 1. Per ogni altra trasformazione involutoria (d'ordine n), che possa avere il medesimo sistema di punti e curve fondamentali, alla curva K corrisponderà la 12. Sicchè, prendendo tre rette 12, 13, 14 non fondamentali, alle tre direzioni di queste tre rette che partono da 1 debbono corrispondere (qualunque possa essere l'involuzione) tre punti determinati della L_1 . È adunque fissata la proiettività fra le direzioni partenti da 1 e i punti della L_1 . Segue immediatamente, se l'ordine r_1 di L_1 è > 1 , che ad una retta arbitraria corrisponde una determinata curva di ordine n . Se $r_1 = 1$, facendo lo stesso ragionamento per un altro punto 2, si giunge alla stessa conseguenza. Adunque non può esistere che una sola trasformazione involutoria. Per es., nel caso del n.º 24, alle tre coniche 23456, 23467, 23457 debbono corrispondere le rette 17, 15, 16: e però alle tre intersezioni (diverse dai punti fondamentali) di quelle tre coniche colla curva $(1^2 234567)_1^3$ debbono corrispondere le tre direzioni uscenti da 1 delle tre rette.

Il ragionamento fatto suppone che ci sieno punti fondamentali (uno o due)

(*) Tale condizione, la quale è verificata nelle applicazioni che noi facciamo del teorema (n.º 24 e 34), si può forse limitare a questo soltanto, che le curve fondamentali non si spezzino. Certamente, se le curve fondamentali si spezzano, le trasformazioni involutorie possono non essere determinate dal sistema dei punti e delle curve fondamentali. Per es., si costruisca, nel modo detto nel n.º 3 della mia Nota citata, l'involuzione del 3º ordine avente una cubica Γ punteggiata unita e si ponga il punto O in un flesso della medesima. Allora dei quattro punti semplici fondamentali della trasformazione uno è successivo ad O sulla tangente di flesso e gli altri tre giacciono sulla polare armonica del flesso. La conica fondamentale consta di quella tangente e di questa polare. Ora i punti e le curve fondamentali non variano, se Γ varia nel fascio formato da essa e dalla curva del 3º ordine composta della tangente di flesso e della polare armonica contata due volte, ecc.

tali che almeno tre delle rette che li congiungono ai rimanenti sieno non fondamentali. Ciò accade certamente se non esistono punti semplici fondamentali. Che se si abbia un punto 1 semplice fondamentale, e la retta 12, per es., sia fondamentale, dal punto 1 non potrà partirne alcun'altra (se $n > 2$), giacchè, per la (10), essendo $r_1 + r_2 = n$, dovrà essere 2 punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ e si avrà una trasformazione di JONQUIÈRES. In questo caso, dal punto 1 partiranno almeno tre rette, non fondamentali, giacchè sopra due rette (non fondamentali) uscenti dal punto 1, possono giacere al più $2n-3$ punti semplici (compreso 1). Parimenti se dal punto fondamentale semplice 1 non parte alcuna retta fondamentale, è evidente, per la (9), che debbono partire almeno tre rette non fondamentali.

Se $n=2$, il teorema non è vero, come è facile riconoscere nei due casi possibili (*). Infatti nell'inversione quadrica per conica punteggiata unita può prendersi una qualunque in un fascio di coniche bitangenti (in due vertici del triangolo fondamentale dato), e nel caso dell'involuzione quadratica rispetto ad un fascio di coniche può scegliersi questo fascio in una rete (che ha per triangolo conjugato il dato triangolo fondamentale).

26. Concludiamo adunque (n.º 24) che: Una trasformazione involutoria che possiede una curva fondamentale, avente nel punto fondamentale a cui corrisponde un punto doppio, è riducibile per trasformazioni quadratiche ai casi *a*), *b*), *c*).

27. La conclusione precedente è evidentemente applicabile a tutte le trasformazioni involutorie per le quali si presenti una rete di curve unite o corrispondenti due a due, di genere 1 e due delle quali si taglino in due punti (variabili).

28. Aggiungerò qui la dimostrazione di un'altra proprietà che dovrà essere applicata in seguito.

Suppongasì che in una trasformazione involutoria qualsiasi esista una curva fondamentale di 3º ordine, per es. la curva L_8 corrispondente al punto 8. Se L_8 passa semplicemente o doppiamente pel punto 8, ricadiamo nei casi già esaminati. Se non contiene il punto 8, avrà, per es., in 1 il punto doppio e passerà semplicemente per 2, 3, 4, 5, 6, 7. Si ha dapprima, per le (10), (15)

$$2r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_7 = 3n$$

$$2\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{17} = 3r_1$$

$$2\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \dots + \alpha_{27} = 3r_2$$

$$2\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} + \dots + \alpha_{37} = 3r_3.$$

(*) Cfr. n.º 15 della mia Nota già citata.

Consideriamo la conica 14567, per es., che supporremo non fondamentale, altrimenti (n.° 17) la nostra trasformazione sarebbe riducibile ad ordine minore se non presentasse i casi *a*), *b*). Quella conica potrebbe contenere altri punti fondamentali, oltre i punti 1, 4, 5, 6, 7; per es. i punti 9, ... Quindi dicendo *i* l'ordine della sua curva corrispondente e i_1, i_2, i_3 le molteplicità di questa curva nei punti 1, 2, 3, si avrà

$$r_1 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_9 + \dots = 2n - i$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \dots = 2r_1 - i_1$$

$$\alpha_{21} + \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{26} + \alpha_{27} + \alpha_{29} + \dots = 2r_2 - i_2$$

$$\alpha_{31} + \alpha_{34} + \alpha_{35} + \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{39} + \dots = 2r_3 - i_3$$

che, aggiunte alle superiori, danno

$$r_1 + r_2 + r_3 = n + i + r_9 + \dots$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = r_1 + i_1 + \alpha_{19} + \dots$$

$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = r_2 + i_2 + \alpha_{29} + \dots$$

$$\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = r_3 + i_3 + \alpha_{39} + \dots$$

per le quali, trasformando quadraticamente col triangolo 123, l'ordine n' della nuova trasformazione involutoria è, per la (18),

$$n' = n - (3i - i_1 - i_2 - i_3) - (3r_9 - \alpha_{19} - \alpha_{29} - \alpha_{39}) - \dots:$$

e quindi, poichè manifestamente le quantità fra parentesi sono positive (non nulle),

$$n' < n.$$

Dunque: Una trasformazione involutoria, che possiede un punto fondamentale di 3° ordine, è sempre riducibile ad ordine inferiore, se non presenta i casi *a*), *b*), *c*) (*).

(*) Si ripeta qui l'osservazione della Nota al n.° 17 (cfr. n.° 34).

§ 5.

Trasformazioni involutorie
per le quali una (almeno) delle $\alpha_{ii}(i=1, 2, \dots, h)$ è 3.

29. Il sistema $[L]$ nascente da una curva L_1 avente in 1 un punto triplo e però soddisfacente alle (n.° 11)

$$\begin{aligned}\sum_i \rho_i^2 &= r_i^2 - 4 \\ \sum_i \rho_i &= 3r_i - 2,\end{aligned}$$

è deducibile, con trasformazioni quadratiche dall'uno o dall'altro dei due sistemi seguenti (n.° 8):

1.° Sistema di curve di 4° ordine con un punto doppio e otto punti semplici comuni.

2.° Sistema di curve di 6° ordine con otto punti doppi comuni.

Escludiamo subito le trasformazioni che ammettono il 1° sistema di curve (corrispondenti a sè stesse o a due a due), giacchè tali trasformazioni entrano nei casi *a*), *b*). Infatti, se diciamo r_1, r_2, \dots, r_9 le molteplicità del punto doppio e degli otto punti semplici per la trasformazione, perchè le curve di 4° ordine sono corrispondenti, dovrà essere

$$4n - (2r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_9) = 4.$$

Ma, per la (9), si ha

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_9 \leq 3n - 3$$

valendo il segno inferiore se non esistono punti fondamentali diversi dai punti 1, 2, ..., 9: quindi

$$r_1 \geq n - 1$$

e però, ecc.

30. Dovremo escludere ancora il caso eccezionale avvertito nel n.° 9. Infatti se si ha un sistema (corrispondente a sè stesso) di curve di 5° ordine con un punto triplo 1, uno doppio 2 e otto semplici 3, 4, ..., 10, multipli rispettivamente per l'involuzione secondo r_1, r_2, \dots, r_{10} , dovrà aversi

$$5n - 3r_1 - 2r_2 - r_3 - r_4 - \dots - r_{10} = 5 \quad (A)$$

donde, per essere $r_1 + r_2 \leq n$ e

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{10} \leq 3n - 3, \quad (B)$$

si ha

$$r_1 \geq n - 2.$$

Se $r_1 = n - 1$ si hanno trasformazioni di JONQUIÈRES. Se $r_1 = n - 2$, onde, per le (A), (B), risulta $r_2 \geq 2$ e però $r_2 = 2$, si hanno, oltre le precedenti, trasformazioni del 4° o 5° ordine (cfr. Nota al n.° 20). Cioè una trasformazione del 4° ordine con tre punti doppi e tre semplici, ovvero una del 5° con un punto triplo, tre punti doppi e tre semplici. In amendue i casi, fra i punti doppi trovasi il punto 2 e inoltre alcuno (uno o due) dei punti 3, 4, ... 10. Segue che il suddetto caso eccezionale non può incontrarsi, perchè al punto 1 (doppio se $n = 4$, triplo se $n = 5$) si sarebbero accostati in direzioni diverse due punti doppi, cioè il punto 2 e uno dei punti 3, 4, ... 10: il che è assurdo, osservando che questo fatto avrebbe dovuto far crescere la molteplicità di 1 per la trasformazione.

31. Rimangono quindi a studiare le sole trasformazioni involutorie, che diremo K , aventi un sistema S di sestiche (curve di 6° ordine) corrispondenti fra loro o a sè stesse, con otto punti doppi comuni 1, 2, ... 8. Se r_1, r_2, \dots, r_8 indicano le molteplicità di questi punti per l'involutione, dovrà aversi

$$6n - 2(r_1 + r_2 + \dots + r_8) = 6 \quad (9)''$$

che è appunto la (9). Quindi: Una trasformazione K non può avere altri punti fondamentali all'infuori dei punti 1, 2, ... 8.

32. Una trasformazione K è riducibile ai casi a), b), c), se nel sistema S esiste una rete di sestiche di genere 1, ovvero una rete di sestiche che si spezzano.

Premettiamo che le sestiche di una rete, di genere 1, appartenenti ad S avranno necessariamente in uno dei punti 1, 2, ... 8 un punto triplo. Anzi nel punto triplo dovranno cadere due (almeno) dei punti 1, 2, ... 8, perchè esiste una sola sestica avente in 1 un punto triplo e in 2, ... 8 punti doppi. I punti 1 2 essendo successivi, le sestiche della rete hanno in 1 un punto triplo, passano con un ramo per 2 ed hanno punti doppi in 3, ... 8: oppure, se anche 3 è successivo a 2, hanno in 1 un punto triplo, in 2 un punto doppio e passano semplicemente per 3, ecc. Viceversa, se due dei punti 1, 2, ... 8 sono infinitamente vicini, esiste nel sistema S una rete di sestiche di genere 1. Se le sestiche di una rete appartenente ad S si compongono di una retta e di una quintica, deve necessariamente la retta contenere tre dei punti 1, 2, ... 8 e la quintica passare per questi e avere cinque punti doppi nei rimanenti: se si compongono di una conica e di una quartica, deve la conica contenere

sei punti e la quartica passare pei medesimi e avere punti doppi nei due residui: e infine se si compongono di due cubiche, una deve passare per tutti i punti e avere in uno di essi un punto doppio e l'altra deve contenere i sette punti rimanenti. Che altre decomposizioni non sieno possibili, anche se i punti 1, 2, ... 8 divengano successivi, è facile riconoscere, tenendo presente che le sestiche considerate debbono formare una rete, che questa rete deve appartenere ad S e che una sestica generale di S non si spezza.

Ciò premesso, dicasi F la rete di sestiche o di quintiche o di quartiche o di cubiche predette. Alla rete F corrisponderà, per l'involuzione, una rete F' che, in ogni caso, potrà essere parimenti una rete di sestiche o di quintiche o di quartiche o di cubiche. Per semplicità possiamo ritenere effettuate quelle trasformazioni quadratiche (*) che riducono F ad una rete di cubiche (n.º 6): per le quali trasformazioni si arriva sempre manifestamente ad un sistema S e però ad una involuzione K . Sicchè potrà avvenire che:

1.º F' sia pure una rete di cubiche. Se i sette punti base di F e di F' sono i medesimi abbiamo una trasformazione I (n.º 18). Se no, sieno 1, 2, ... 6, 7 i punti base di F ; 1, 2, ... 6, 8 quelli di F' . Sarà

$$3n - r_1 - r_2 - \dots - r_6 - r_7 = 3$$

$$3n - r_1 - r_2 - \dots - r_6 - r_8 = 3$$

le quali aggiunte alla (9)* danno $r_7 = r_8 = 0$: cioè i punti 7, 8 sono semplicemente corrispondenti nella trasformazione. Quindi qualunque cubica che passa per 1, 2, ... 6 ha per corrispondente una cubica per gli stessi sei punti. Due qualunque di tali cubiche che si corrispondano hanno (oltre 1, 2, ... 6) tre punti comuni, dei quali due potranno essere uniti o corrispondenti, ma il terzo è necessariamente unito. Questo terzo punto e i punti 1, 2, ... 6 determinano una rete R di cubiche e però si ha nuovamente una trasformazione I (n.º 18).

2.º F' sia una rete di quartiche. Se i due punti base doppi per F' sono fra i punti base della rete F è manifesto che, con una trasformazione quadratica, questo caso è ridotto al 1º. Se invece i punti base di F sono (per es.) 1, 2, ... 7 e i punti doppi di F' sono 7, 8 si avrà

$$3n - r_1 - r_2 - \dots - r_6 - r_7 = 4$$

$$4n - r_1 - r_2 - \dots - r_6 - 2r_7 - 2r_8 = 3$$

(*) Dei punti 1, 2, ... 8 due (o più) non possono divenire infinitamente vicini ad un terzo in direzioni diverse, perchè, se ciò accadesse, la molteplicità del terzo punto pel sistema S dovrebbe superare due. Questa osservazione mostra che tre qualunque di quei punti si possono sempre prendere per punti fondamentali di una trasformazione quadratica.

donde, per la (9)", $r_8=1$, $r_7=n-1$ e si ha per conseguenza una trasformazione di JONQUIÈRES.

3.° F' sia una rete di quintiche. Si giunge al caso 2°, trasformando con un triangolo che abbia i vertici in tre punti doppi di F' che siano anche punti base di F .

4.° F' sia una rete di sestiche. Abbiamo già osservato che nel punto base triplo per F' debbono cadere due dei punti 1, 2, ... 8. Segue che fra i punti base di F uno è necessariamente lo stesso punto triplo. Allora trasformando con un triangolo che abbia un vertice nel punto triplo e gli altri due vertici in altri due punti basi comuni ad F F'' (e doppi per F') si riduce questo caso al 3°.

33. Il teorema dimostrato si può anche enunciare così:

Una trasformazione K è riducibile ai casi $a)$, $b)$, $c)$ se dei punti 1, 2, ... 8 due (almeno) sono infinitamente vicini; ovvero tre sopra una retta; ovvero sei sopra una conica; ovvero esistono tutti sopra una cubica che abbia in uno di essi un punto doppio.

34. Escludiamo adunque tutte le trasformazioni K per le quali i punti 1, 2, ... 8 hanno le posizioni speciali dette nell'ultimo teorema. Per le trasformazioni K rimanenti (per le quali adunque i punti fondamentali sono a distanze finite) esisteranno certamente le relazioni

$$3r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_8 \leq 6n$$

$$2r_1 + 3r_2 + \dots + 2r_8 \leq 6n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2r_1 + 2r_2 + \dots + 3r_8 \leq 6n$$

che si ottengono dalla considerazione delle sestiche del sistema S , che hanno rispettivamente in 1, 2, ... 8 punti tripli. Dalle medesime e dalla (9)" segue

$$n \leq 17, \quad r_i \leq 6 \quad (i=1, 2, \dots 8).$$

Se $n=17$ si ha $r_i=6$ e viceversa. Anzi se una trasformazione univoca ammette soltanto punti sestupli, segue subito, dalle (8), (9), che deve essere del 17° ordine con otto punti sestupli (*).

(*) Le (8) (9), se debbono essere $r_1=r_2=\dots=r_8$, danno le sole soluzioni:

$$\begin{array}{lll} n=3, & h=3, & r_i=1 \\ n=2, & h=3, & r_i=1 \\ n=8, & h=7, & r_i=3 \\ n=17, & h=8, & r_i=6. \end{array}$$

Essendo i punti 1, 2, ... 8 a distanze finite, se accada che alcuno di questi punti sia semplice, doppio o triplo, possiamo applicare i teoremi dei n.° 17, 28. Se alcuno dei suddetti punti è quadruplo per la trasformazione K , non può avere per corrispondente una curva (del 4.° ordine) con un punto triplo, altrimenti la trasformazione dovrebbe possedere nove punti fondamentali, affinché la curva del 4.° ordine potesse essere individuata (cfr. n.° 10). La curva nominata avrà adunque tre dei punti 1, 2, ... 8 doppi e i restanti semplici: ma allora si rientra nel caso $\alpha_{ii}=1$, ovvero $\alpha_{ii}=2$ (§ 3, 4). Lo stesso dicasi se esiste un punto quintuplo, giacchè la curva corrispondente dovrebbe essere dotata di cinque punti doppi. Quindi, anche pel n.° 33, si ha in generale la proprietà.

Una trasformazione K che possiede punti fondamentali d'ordine <6 , se non presenta i casi $a)$, $b)$, $c)$, è riducibile ad una trasformazione K d'ordine minore:

la quale è adunque vera anche se i punti 1, 2, ... 8 divengono successivi.

Rimangono quindi ad esaminare le sole trasformazioni K per le quali i punti 1, 2, ... 8 sono tutti sestupli. Escluderemo che questi punti abbiano le posizioni speciali dette nel n.° 33. Le curve fondamentali corrispondenti a quei punti non possono essere altro che curve di 6.° ordine con un punto triplo e sette punti doppi. Supporremo che il punto triplo di ciascuna curva fondamentale giaccia nel punto fondamentale a cui corrisponde: altrimenti ritroveremmo un caso già esaminato (§ 4). La trasformazione K che resta a considerare ha adunque un sistema determinato di punti e curve fondamentali ed è per conseguenza (n.° 25) individuata. Una costruzione che dà quel sistema di punti e curve fondamentali e quindi quella trasformazione K , si ottiene colla seguente proprietà.

35. Si chiami F il fascio di cubiche determinato dai punti 1, 2, ... 8 (e aventi un nono punto comune). Le curve del sistema S (formato dalle sestiche aventi punti doppi in 1, 2, ... 8), che passano per due punti arbitrari M_1, M_2 costituiscono un fascio φ di curve, aventi altri due punti comuni M'_1, M'_2 . Le due curve Δ_1, Δ_2 del fascio F determinate dai punti M_1, M_2 formano una curva del fascio φ e quindi passeranno per M'_1, M'_2 . Passi Δ_1 per M_1, M'_1 ; Δ_2 per M_2, M'_2 . Prendiamo un altro punto M_3 arbitrario e sia Λ la curva del fascio φ che passa per M_3 . Per i punti M_1, M_3 si hanno allora due curve del sistema S ; l'una Λ , l'altra formata di due curve del fascio F , cioè di Δ_1 e di una nuova curva Δ_3 di questo fascio determinata da M_3 . Quelle due curve di 6.° ordine si segano in M_1, M'_1, M_3 e in un nuovo punto M'_3 (quello

in cui Δ_3 sega Λ , oltre M_3). Segue che tutte le curve di 6° ordine del sistema S che passano per M_1, M_3 debbono passare per M'_1, M'_3 . Variando M_3 si hanno tutte le curve di S passanti per M_1 , le quali adunque passano anche per M'_1 . Si conclude che:

Le curve di 6° ordine aventi otto punti doppi comuni costituiscono un sistema lineare, triplamente infinito, tale che le curve che passano per un punto (cioè costituiscono una rete) passano necessariamente per un altro punto (*).

Così i punti del piano sono riferiti univocamente ed involutoriamente. La trasformazione involutoria che ne nasce ha manifestamente i punti 1, 2, ... 8 sestupli, a ciascuno corrispondendo la curva di S che ha ivi un punto triplo ed è perciò (n.° 34) del 17° ordine. Le curve del sistema S e del fascio F sono unite.

36. Inoltre la detta trasformazione ammette una curva punteggiata unita Γ del nono ordine e avente in 1, 2, ... 8 punti tripli. Infatti la costruzione precedente conduce a quest'altra. Prendasi un punto arbitrario A che individua una rete R (del sistema S) passante anche per il punto corrispondente A' : e si faccia corrispondere ad ogni altro punto del

(*) Dopo aver consegnato il presente lavoro alla Direzione degli Annali, seppi che il prof. CREMONA aveva già osservata questa proprietà e comunicatala per lettera al dott. CAPORALI. Ecco la dimostrazione del prof. CREMONA:

Si ritenga il piano nel quale si ha il sistema S , come rappresentativo di una superficie generale del 3° ordine e sieno 1, 2, ... 6 i punti fondamentali della rappresentazione. Allora le curve del sistema S sono le immagini delle intersezioni della superficie del 3° ordine col sistema triplamente infinito delle quadriche tangenti alla superficie nei punti 7', 8' che hanno per immagini 7, 8. Due qualunque di queste quadriche s'incontrano secondo due coniche; e si ha così il sistema doppiamente infinito delle coniche che sono tangenti a due piani fissi in due punti fissi 7', 8'. Ognuna di queste coniche incontra la superficie in due punti, uno de' quali determina evidentemente l'altro in modo unico. Così i punti della superficie del 3° ordine e quindi quelli del piano rappresentativo diventano coniugati due a due. Ma tutte le quadriche (tangenti in 7', 8') che passano per un punto della superficie contengono la conica che passa per quel punto e quindi il punto coniugato. Dunque le sestiche del sistema S che passano per un punto passano anche per il punto coniugato.

Siccome due punti coniugati della superficie giacciono in uno stesso piano coi due punti di contatto 7', 8', segue che, nel piano rappresentativo una cubica per gli otto punti 1, 2, ... 8, la quale passa per un altro punto qualunque, passa anche per il suo coniugato.

Si può confermare per questa via anche il risultato del n.° 36: cercando il luogo (che ha per immagine Γ) del terzo punto di contatto, colla superficie del 3° ordine, delle coniche tangenti in 7', 8'. È facile vedere che questo luogo è una linea del 9° ordine che ha in 7', 8' punti tripli ed è appoggiata in tre punti ad ogni retta della superficie (la qual linea è la base di un fascio di superficie di 3° ordine che si osculano in 7', 8'): e però, ecc.

piano il nuovo punto comune alle curve del fascio determinato, nella rete R , da quel punto. La jacobiana di R è del 15° ordine ed ha in 1, 2, ... 8, punti quintupli. Essa si compone manifestamente (*) della curva Γ e di una curva residua, non punteggiata unita, per la quale i punti A, A' debbono essere doppi. Tale curva è evidentemente la curva del 3° ordine di F' passante per A, A' , con tata due volte: e però, ecc.

37. Si è adunque dimostrato (n.° 34) che: Tutte le trasformazioni involutorie per le quali esiste una curva fondamentale che passa triplamente pel punto fondamentale a cui corrisponde, è riducibile, per trasformazioni quadratiche, ai casi $a), b), c), d)$.

38. Tale proprietà sussiste chiaramente per tutte le trasformazioni involutorie, per le quali si abbia un sistema triplamente infinito di curve, di genere 2, unite o corrispondenti fra loro, e due delle quali si taglino in quattro punti (variabili).

§ 6.

Trasformazioni involutorie

per le quali esiste un sistema $[L]$ di curve unite ($\alpha_{ii} > 3$).

39. Le curve di un sistema $[L]$ provenienti da una curva fondamentale L_1 (n. 11) possono essere unite, cioè corrispondenti a sè stesse, ovvero corrispondenti a due a due. Ci proponiamo di esaminare il 1° caso, supponendo $\alpha_{11} > 3$. Per semplicità di indicazione porremo $\alpha_{11} = \alpha$.

Si prendano $\alpha - 2$ punti arbitrari $A_1, A_2, \dots A_{\alpha-2}$. Le curve L che passano per questi punti, passano altresì (per essere unite) pei loro corrispondenti $A'_1, A'_2, \dots A'_{\alpha-2}$ e formano una rete R di curve. Due curve di R si tagliano in due punti (oltre alle intersezioni raccolte nei punti fondamentali della trasformazione e ai $2\alpha - 4$ punti fissi A, A') che sono manifestamente corrispondenti; onde una rete R potrebbe servire a costruire la trasformazione involutoria. Una rete R fa parte di una molteplicità $\infty^{\alpha-2}$ giacchè varia al variare dei punti A (od A').

40. Alla jacobiana J di R appartiene (quando esista) la curva punteggiata unita Γ della trasformazione involutoria: perchè se un punto tende a cadere

(*) Cfr. n.° 39, 40.

sulla curva Γ , il suo corrispondente si avvicina ad esso indefinitamente, onde due curve di R , passanti per un punto di Γ , ivi si toccano (*). Però Γ non può da sola costituire la jacobiana J (se $\alpha > 2$), giacchè questa jacobiana deve avere punti doppi nei punti A, A' arbitrari. Adunque J si spezzerà in Γ e in altre curve

$$F'_1, F''_1, \dots F_1^{(m_1)}, \quad F'_2, F''_2, \dots F_2^{(m_2)}, \quad F'_3, F''_3, \dots F_3^{(m_3)}, \dots \quad (19)$$

che (tenendo conto del numero delle volte, in cui ciascuna di esse entri in J) passeranno complessivamente per ciascuno dei punti A, A' con due rami e con due soltanto. Quest'ultima asserzione è evidente osservando che le curve di R passano semplicemente per i punti A, A' , in questi punti non si toccano e inoltre nessuna curva di R può avere in uno degli stessi punti un punto triplo (**). Se una curva di R avesse infatti un punto A_1 triplo, dovrebbe avere anche il punto A'_1 triplo; ciò che non può accadere, perchè due curve di R possono segarsi in due soli punti (oltre ai punti fissi).

41. Un punto E qualsiasi di una qualunque F'_1 delle curve (19) determina un fascio di curve della rete R , una delle quali (almeno) deve avere in E un punto doppio, il punto E appartenendo a J . Segue che, se la curva variabile di quel fascio non avesse una parte fissa passante per E , questo punto sarebbe punto di contatto di curve (diverse) della rete R e però punto unito: il che è escluso. Quindi il fascio determinato dal punto E deve spezzarsi in una parte variabile e in una parte fissa passante per E . Se a quest'ultima non appartenesse F'_1 , avremmo, variando E sopra F'_1 , infinite curve appartenenti a J . Adunque F'_1 appartiene a J in quanto è parte fissa di un

(*) Cfr. la nota al n.º 12 del mio lavoro citato.

(**) Se in un punto $x_2 = x_3 = 0$ le curve di una rete hanno un punto semplice comune, esiste una curva della rete per la quale quel punto è (almeno) doppio. L'equazione di questa curva e di due curve qualunque della rete essendo

$$\begin{aligned} u_2 x_1^{n-2} + \dots &= 0 \\ (p x_2 + q x_3) x_1^{n-1} + \dots &= 0 \\ (p_1 x_2 + q_1 x_3) x_1^{n-1} + \dots &= 0 \end{aligned}$$

l'equazione della jacobiana è

$$J \equiv (p q_1 - p_1 q) u_2 x_1^{3n-5} + \dots = 0.$$

Quindi, se J ha nel punto $x_2 = x_3 = 0$ una molteplicità > 2 , deve essere $p q_1 - p_1 q = 0$, ovvero $u_2 = 0$ identicamente: cioè le curve della rete debbono toccarsi, ovvero deve esserle una con punto triplo.

fascio di curve della rete R . La proprietà sussisterebbe anche se la curva Γ'_1 , contata due volte, potesse dare una curva di R . Ma, essendo $\alpha > 3$ (*), ciò non può accadere. Basta osservare che, contenendo allora F'_1 tutti i punti A, A' , varia al variare di questi punti; e quindi può sempre essere pensata come parte fissa di un fascio di curve della rete R , la parte variabile essendo una curva dotata delle stesse proprietà di F'_1 , ma non passante per qualcuno dei punti A, A' . Manifestamente si hanno $\alpha - 2$ di tali fasci quante sono le coppie $(A_1 A'_1), (A_2 A'_2), \dots$: sicchè, per essere $\alpha - 2 > 1$, le curve della rete R si spezzerebbero nella parte fissa Γ'_1 e in una parte residua. Per conseguenza si spezzerebbe ogni curva del sistema $[L]$, il che non può essere.

Adunque le curve (11) sono parti fisse di fasci di curve (che si spezzano) della rete R . Si potranno cioè considerare tanti fasci

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &\equiv (F_1 V_1) \equiv (F'_1 F''_1 \dots F_1^{(m_1)} V_1) \\ \varphi_2 &\equiv (F_2 V_2) \equiv (F'_2 F''_2 \dots F_2^{(m_2)} V_2) \\ \varphi_3 &\equiv (F_3 V_3) \equiv (F'_3 F''_3 \dots F_3^{(m_3)} V_3) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

indicando con F_i la parte fissa [composta di m_i curve delle (19)] e con V_i la parte variabile. Manifestamente F_i e V_i corrispondono rispettivamente a sè medesime.

42. Nei fasci (20) entrano tutte le curve (19) e ciascuna una volta sola. In vero se una stessa delle curve (19) entrasse a far parte di due fasci φ , ogni curva di R si spezzerebbe in quella e in altre curve: e però, ecc. Si noti ancora che non escludiamo che una medesima curva F'_1 (per es.) sia contata più volte come facente parte di un fascio φ_1 ; ma dalle cose che seguono risulterà che un tal fatto non è possibile (n.º 43, 45).

43. Le curve di un fascio (20) non possono avere punti doppi nei punti A, A' : giacchè altrimenti questi punti sarebbero di contatto per le curve di R . Adunque la parte fissa F_i e la parte variabile V_i di un fascio φ_i passeranno complessivamente una volta sola per ciascuno dei punti A, A' . Inoltre, da ciò che i punti A, A' debbono essere doppi per J , si trae che in qualcuno dei fasci φ la parte fissa deve contenere un certo numero dei punti A, A' . Indichiamo con φ_x uno di tali fasci; cioè supponiamo, per es., che la sua parte fissa F_x passi per $A_1, A'_1, A_2, A'_2, \dots A_r, A'_r$ e la sua parte

(*) Nel caso di $\alpha = 3$ abbiamo invece incontrato questa circostanza (cfr. n.º 36).

variabile V_x passi per i rimanenti $A_{r+1}, A'_{r+1}, A_{r+2}, A'_{r+2}, \dots, A_{\alpha-2}, A'_{\alpha-2}$, essendo $r > 0$ e $\leq \alpha - 2$. Dal fascio

$$\varphi_x \equiv (F_x V_x) \equiv (A_1 A'_1 \dots A_r A'_r; A_{r+1} A'_{r+1} \dots A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2})$$

si possono immaginare ottenuti altri fasci φ , della stessa natura di φ_x , nei due modi seguenti:

44. I) Facciamo passare V_x per A_r e però per A'_r e togliamo alla curva F_x la condizione di passare per gli stessi punti A_r, A'_r . Questa condizione non può essere conseguenza delle rimanenti a cui è sottoposta F_x , perchè A_r, A'_r sono punti (corrispondenti) arbitrari. Nascerà quindi (cfr. n.º 45) dalla parte variabile V_x una parte fissa F_y e dalla parte fissa F_x una parte variabile V_y di un nuovo fascio

$$\varphi_y \equiv (F_y V_y) \equiv (A_r A'_r \dots A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2}; A_1 A'_1 \dots A_{r-1} A'_{r-1});$$

e si potranno da φ_x generare r di tali fasci (oltre φ_x) quante sono le coppie di punti (corrispondenti) A, A' pei quali passa F_x .

II) Osserviamo che la jacobiana J deve presentare lo stesso fatto comunque si scambino le coppie $(A_1 A'_1), (A_2 A'_2), \dots, (A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2})$ e permutando due punti di una stessa coppia: giacchè è chiaro, per essere scelte quelle coppie in modo arbitrario, che, nella formazione di J , l'ufficio che fa una coppia rispetto alle altre e ai punti fondamentali della trasformazione, deve fare ognuna di queste rispetto alle rimanenti e ai medesimi punti fondamentali, e che un punto A è nelle stesse condizioni del suo corrispondente A' . Segue che, insieme al fascio φ_x , esisteranno altri fasci, per ciascuno dei quali la parte fissa passerà per r delle $\alpha - 2$ coppie suddette: per es.

$$\varphi_z \equiv (F_z V_z) \equiv (A_1 A'_1 \dots A_{r-1} A'_{r-1} A_{r+1} A'_{r+1}; A_r A'_r A_{r+2} A'_{r+2} \dots A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2}).$$

In questo modo si otterranno $\frac{(x-2)(x-3)\dots(x-r-1)}{1 \cdot 2 \dots r}$ fasci (compreso φ_x).

45. Applicando il procedimento I) si noti che non può accadere che la parte fissa F_x del fascio φ_x contenga curve, le quali passino per nessuna o passino solamente per alcuna delle r coppie $(A_1 A'_1), \dots, (A_r A'_r)$. Altrimenti, passando dal fascio φ_x al fascio φ_y , diventerebbe variabile soltanto quella curva di F_x che contiene i punti A_r, A'_r : e però i due fasci φ_x, φ_y avrebbero una curva fissa a comune, il che non può accadere (n.º 42).

Nemmeno può la parte fissa F_x spezzarsi in due curve corrispondenti, l'una per A_1, A_2, \dots, A_r , l'altra per A'_1, A'_2, \dots, A'_r , se sia $r > 1$. Giacchè, per la simmetria avvertita nel procedimento II), dovrebbe esistere, per es., un altro

$$\begin{aligned} & (A_1 A'_1 A_2 A'_2; A_3 A'_3 A_4 A'_4 \dots) \\ & (A_1 A'_1 A_3 A'_3; A_2 A'_2 A_4 A'_4 \dots) \\ & (A_1 A'_1 A_4 A'_4; A_2 A'_2 A_3 A'_3 \dots) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ne' quali le parti fisse avrebbero complessivamente nei punti A, A' una molteplicità > 2 (n.° 40). Se $\alpha = 5$ si trova [le F, V non spezzandosi (n.° 45)];

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 & \equiv (F_1 V_1) \equiv (A_2 A'_2 A_3 A'_3; A_1 A'_1) \\ \varphi_2 & \equiv (F_2 V_2) \equiv (A_1 A'_1 A_3 A'_3; A_2 A'_2) \\ \varphi_3 & \equiv (F_3 V_3) \equiv (A_1 A'_1 A_2 A'_2; A_3 A'_3) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Se $r > 2$ e $< \alpha - 2$ è facile persuadersi che si giunge sempre all'assurdo ora avvertito (n.° 40).

Concludiamo adunque che non è possibile alcun sistema di fasci φ all'infuori dei sistemi (21), (22).

47. Le curve $F_0, V_1, \dots V_{\alpha-2}$ del sistema (21) sono manifestamente della stessa natura [$V_1, V_2, \dots V_{\alpha-2}$ nascendo da F_0 col processo I)] e parimenti sono della stessa natura $V_0, F_1, \dots F_{\alpha-2}$. Ma (per es.) F_0 taglia V_1 in $2(\alpha - 3)$ dei punti A, A' e taglia F_1 in 2 dei medesimi punti. Dunque, tenendo presente che due curve del sistema $[L]$ si segano in $2(\alpha - 1)$ punti, si ha, pel sistema (21), che (all'infuori dei punti fondamentali della trasformazione):

due delle curve $F_0, V_1, \dots V_{\alpha-2}$ si tagliano in $2(\alpha - 3)$ punti;

due delle curve $V_0, F_1, \dots F_{\alpha-2}$ non si tagliano affatto, cioè formano un fascio;

una curva F_i di un fascio φ_i sega una curva V_i dello stesso fascio in 2 punti.

Per un ragionamento analogo quest'ultima proprietà sussiste pel sistema (22) nel quale evidentemente $F_1, F_2, F_3, V_1, V_2, V_3$ sono curve, appartenenti ad una stessa rete, di cui due si segano in due punti (oltre ai punti fondamentali).

48. Per terminare la discussione dei due casi a cui siamo giunti occorre premettere la dimostrazione di una formola.

Una curva d'ordine r variabile in un sistema lineare di curve aventi a comune punti multipli secondo $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_h$ nei punti $1, 2, \dots h$, si spezzi (in una speciale posizione) in k curve degli ordini $r', r'', \dots r^{(k)}$: e la curva d'ordine $r^{(i)}$ abbia nei punti $1, 2, \dots h$ le molteplicità $\rho_1^{(i)}, \rho_2^{(i)}, \dots \rho_h^{(i)}$. Si avrà

$$\begin{aligned} r &= r' + r'' + \dots + r^{(k)} \\ \rho_s &\leq \rho'_s + \rho''_s + \dots + \rho_s^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots h. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} - \sum_1^h \frac{\rho_s(\rho_s-1)}{2} \cong \sum_1^k \frac{(r'^i-1)(r'^i-2)}{2} + \sum_{mn} r^{(m)} r^{(n)} - (k-1) -$$

$$- \sum_1^h \sum_1^k \frac{\rho_s^{(i)}(\rho_s^{(i)}-1)}{2} - \sum_1^h \sum_{mn} \rho_s^{(m)} \rho_s^{(n)}$$

ove \sum_{mn} esprime la somma ottenuta col prendere per m, n tutte le combinazioni possibili di due (diversi) dei numeri $1, 2, \dots k$. Ma si ha

$$r^{(m)} r^{(n)} = \sum_1^h \rho_s^{(m)} \rho_s^{(n)} + \delta_{mn} \quad (23)$$

indicando con δ_{mn} le intersezioni delle due curve degli ordini $r^{(m)}, r^{(n)}$, esterne ai punti base. Dunque, rappresentando rispettivamente con $p, p', p'', \dots p^{(k)}$ i generi della curva generale del sistema e delle curve degli ordini $r', r'', \dots r^{(k)}$,

$$p \cong p' + p'' + \dots + p^{(k)} - k + 1 + \sum_{mn} \delta_{mn}. \quad (24)$$

Se le curve degli ordini $r', r'', \dots r^{(k)}$ potessero avere punti multipli (all'infuori dei punti base) i loro generi decrescerebbero e la precedente continuerebbe ad essere vera. La formola precedente sussiste anche se due delle dette k curve coincidano, purchè la (23) sia soddisfatta, essendo δ_{mn} un numero ≥ 0 (*).

49. Applichiamo la formola (24) ad una curva del fascio φ_1 , per es., del sistema (21). Sarà $k=3$, ovvero $k=2$ secondochè F_1 si spezza o no in due parti e inoltre (n.º 47) $\sum_{mn} \delta_{mn} = 2$ e $p = \alpha - 1$. Avremo adunque

$$\alpha - 1 \cong p' + \varepsilon p'' - \varepsilon + 2,$$

ε essendo 1 o 2 a seconda dei due casi nominati; p' il genere di V_1 e p'' il genere di F_1 (o il genere comune delle due parti in cui F_1 si spezza). Ora se $p''=0$, F_1 dà (al variare di A_1, A'_1) un fascio di curve razionali, corrispondenti fra loro o a sè stesse: e quindi la trasformazione involutoria rientra in un caso già studiato (§ 3). Se $p''>0$, dalla precedente segue

$$p' \leq \alpha - 3.$$

Allora V_1 (al variare dei punti A, A') produce un sistema lineare $\infty^{\alpha-2}$ di curve che non si spezzano, corrispondenti a sè stesse, due delle quali si ta-

(*) Si noti ancora che la (24) potrebbe non sussistere se i punti base sono infinitamente vicini, perchè potrebbe allora accadere che, per qualche valore di s , fosse $\rho_s > \rho'_s + \rho''_s + \dots + \rho_s^{(k)}$. Però basta che noi applichiamo la (24) nel supposto che i punti base sieno a distanze finite.

gliano in $2(\alpha-3)$ punti (n.º 45) di genere $\leq \alpha-3$. Se fosse $p' < \alpha-3$ e, per es., $p' = \alpha-3-\gamma$, facendo passare V_1 per γ coppie, fisse, arbitrarie di punti corrispondenti, otterremmo un sistema, $\infty^{\alpha'}$, di curve unite, di genere $\alpha'-1$, e due delle quali si tagliano in $2(\alpha'-1)$ punti variabili, essendo $\alpha' = \alpha-\gamma-2$ e quindi $\alpha' \leq \alpha-2$. Applicando a questo sistema tutti i ragionamenti del presente paragrafo giungeremo ad un sistema $\infty^{\alpha''}$ di curve unite, due delle quali si tagliano in $2(\alpha''-1)$ punti, di genere $\alpha''-1$: e così di seguito, finchè troveremo i sistemi ∞^3 o ∞^2 ovvero ∞^1 e studiati nei §§ 3, 4, 5 (cfr. n.º 15, 27, 38).

Applicando la (24) ad un fascio φ_1 del sistema (22) (*) si trova (n.º 46, 47)

$$4 \geq 2p' - 1 + 2, \quad p' \leq 1,$$

indicando con p' il genere comune delle F_1, V_1 : e si concluderebbe, come dianzi, (secondochè $p' = 0$, ovvero $= 1$) che esistono sistemi ∞^1 , ovvero ∞^2 di curve considerati nei §§ 3, 4 (cfr. n.º 15, 27).

Concludiamo che: Una trasformazione involutoria per la quale il sistema $[L]$ nascente da una curva fondamentale che passa $\alpha_{ii} (> 3)$ volte per il punto fondamentale a cui corrisponde, è formato di curve unite, deve contenere necessariamente uno dei tre seguenti sistemi di curve:

- 1) Un sistema lineare triplamente infinito di curve unite di genere 2, delle quali due si segano in 4 punti (variabili);
- 2) Una rete di curve unite di genere 1, due curve segandosi in due punti;
- 3) Un fascio di curve razionali, unite o corrispondenti fra loro.

Per conseguenza (§§ 3, 4, 5): Le trasformazioni suddette sono riducibili, per trasformazioni quadratiche, ai casi *a), b), c), d)*.

50. Per torre ogni dubbio sul precedente risultato sarà utile aggiungere qualche osservazione alle cose del § 1.

Nel § 1 si considerarono sistemi lineari soggetti soltanto alle condizioni di avere punti fissi in comune. Togliendo questa restrizione, cioè considerando sistemi lineari qualsivogliano, potrà accadere che, nella determinazione del sistema, entrino anche γ condizioni che non consistono in passaggi per punti. Allora, indicando β il numero dei vincoli fra tutte le condizioni del sistema,

(*) Questo sistema è possibile?

si avrà, invece delle (1) (2),

$$\sum_1^n r_i^2 = n^2 + 1 - p + \beta - \alpha - \gamma$$

$$\sum_1^n r_i = 3n - 1 + p + \beta - \alpha - \gamma$$

e, invece della (3),

$$s = p - \beta + \alpha + \gamma - 1.$$

Ora, supponendo $s = 2\alpha - 2$, $p = \alpha - 1$, da quest'ultima segue

$$\gamma = \beta$$

e quindi le due relazioni precedenti si cangiano nelle (6), precisamente come se fosse $\beta = 0$ (e quindi $\gamma = 0$). Ora sulle relazioni (6) sono fondate le cose dei n.º 5, 6, 7, 8, 9: dunque i teoremi di questi numeri sussistono inalterati qualsiasi il sistema lineare. Questa osservazione rischiera le affermazioni dei n.º 27, 38 e l'applicazione fattane nel n.º 49.

Sul § 1 si può anche notare che l'essere $\beta = 0$, $\beta = 1$ nei n.º 2, 3 rientra in una proprietà generale. Infatti un fascio di curve deve essere completamente determinato da'suoi punti base, perchè se a determinarlo occorressero altre condizioni (che non fossero conseguenza di quelle espresse dai punti base), togliendole, per ogni punto del piano passerebbero infinite curve del fascio; ecc. Segue dalla (3), essendo $s = 0$, $\alpha = 1$,

$$p = \beta,$$

cioè: Il genere di una curva variabile in un fascio è eguale al numero dei vincoli sussistenti fra i punti base.

APPENDICE.

51. Le cose dei §§ 2, 3, 4, 5, 6 suppongono che si parta dalla considerazione di una trasformazione involutoria avente i punti fondamentali a distanze finite. I risultati di quei paragrafi possiamo ora estenderli a tutte le possibili trasformazioni involutorie (comprese quelle in cui le curve fondamentali si spezzano) in virtù della seguente proprietà:

Tutte le *possibili* trasformazioni involutorie sono deducibili per trasformazioni quadratiche da altre aventi i punti fondamentali a distanze finite.

Escludiamo le trasformazioni di JONQUIÈRES, trattate completamente altrove: e diciamo, per brevità, punto isolato di una trasformazione involutoria un punto che non ne ha altri infinitamente vicini (al quale quindi corrisponde una curva che non si spezza) e punto di aggruppamento un punto fondamentale al quale in una stessa o in diverse direzioni sono infinitamente vicini altri punti fondamentali. Si trasformi il piano P nel quale si ha l'involutione data in un altro Π , prendendo un vertice del triangolo fondamentale in un punto A di aggruppamento del piano P e gli altri due vertici M , N affatto arbitrariamente: e indichiamo con $A_1M_1N_1$ il triangolo fondamentale della trasformazione quadratica nel piano Π . Ad una retta di questo piano corrisponde, per la trasformazione quadratica una conica C' passante per A , M , N . Alla conica variabile C' , per l'involutione nel piano P , corrisponde una curva C'' variabile, la quale passa evidentemente pei punti isolati del piano P con rami separati e variabili. Sicchè, passando dal piano P a Π , la curva C'' si trasformerà in una C''' che avrà la medesima proprietà nei punti corrispondenti ai detti punti isolati. Dai punti fondamentali isolati del piano P nascono

quindi punti fondamentali isolati di Π . Oltre a ciò avremo in Π altri punti isolati. Cioè: ai punti M, N corrisponderanno, per l'involuzione, due punti M', N' (che non giaceranno sopra AM, AN perchè abbiamo escluse le trasformazioni di JONQUIÈRES): e a questi punti M', N' corrisponderanno quadraticamente due punti fondamentali (semplici) isolati nella involuzione del piano Π . Per la quale saranno inoltre punti isolati A', M', N' : giacchè alla AM per es. corrisponderà una certa curva e ai punti d'intersezione variabili di questa con C' , punti d'intersezione variabili di AM e di C'' e però, ecc. I punti di aggruppamento distinti da A avranno in Π per corrispondenti altri punti di aggruppamento collo stesso numero di punti fondamentali. In quanto al punto A osserviamo che la curva C'' avrà certi punti multipli in A e nei punti fondamentali che si sono accostati ad A in una stessa o in differenti direzioni. Passando al piano Π , si troveranno sopra MN , corrispondentemente alle dette direzioni, punti che potranno essere in generale di aggruppamento, ma ciascuno de' quali, per proprietà note (*), comprenderà un numero di punti fondamentali minore di quello compreso nel punto A . A questi punti si potranno, operando in modo analogo con trasformazioni quadratiche, sostituirne altri e così di seguito, finchè si giungerà ad una trasformazione involutoria di ordine maggiore della primitiva, avente un certo numero, pure maggiore che in questa, di punti isolati, ma nella quale il numero dei punti di aggruppamento è diminuito di uno. Continuando, si dimostra il teorema.

Per maggior chiarezza della dimostrazione si può ritenere la trasformazione involutoria data nel piano P , come limite di una trasformazione univoca (in generale non involutoria) del piano P in sè stesso, per la quale i punti fondamentali si accostano indefinitamente (**).

(*) Cfr. per es. LINDEMANN, l. c., pag. 491 e seg.

(**) Del resto il ragionamento si può illustrare con molteplici esempi. Sia, per es., una trasformazione involutoria dell'8° ordine con tre punti semplici 7, 8, 9, tre doppi 4, 5, 6 e tre quadrupli 1, 2, 3 (la qual soluzione è da aggiungere nella tavola per $n = 8$ a pag. 17 del lavoro citato di CREMONA) e sia quella nascente, col fare una trasformazione quadratica arbitraria, dall'inversione quadrica, quando il polo si avvicini indefinitamente alla conica fondamentale. Il sistema delle curve fondamentali è

$$J \equiv (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 9)_1 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)_2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 8 9)_3 (1 2 3 5 6)_4 (1 2 3 4 5)_5 (1 2 3 4 6)_6 (1 2)_7 (2 3)_8 (1 3)_9$$

[e $\Gamma = (1^2 2^2 3^2 5 6)^4$]. Per l'ipotesi fatta i tre punti doppi 4, 5, 6 sono infinitamente vicini sulla stessa direzione. Trasformando quadraticamente nel modo detto (n.° 51), si giunge ad una involuzione del 24° ordine con un punto 14^{uplo}, due 10^{upli}, tre 7^{upli}, tre doppi e due semplici tutti isolati e inoltre due punti tripli successivi, ecc.

52. Dunque, se si potrà dimostrare che le trasformazioni involutorie aventi i punti fondamentali a distanze finite e per le quali (essendo $\alpha_{ii} > 3$) esistono (soltanto) sistemi $[L]$ di curve a due a due corrispondenti, sono riducibili ai casi *a*), *b*), *c*), *d*), sarà dimostrato che tutte le possibili trasformazioni involutorie (incluse anche quelle per le quali le curve fondamentali si spezzano) sono riducibili a questi casi.

Spero di potere in un prossimo lavoro chiarire quest'ultimo punto e compiere così queste ricerche.

53. Tralascio di esporre diffusamente l'altro metodo accennato nell'introduzione col quale ho tentato di superare direttamente le difficoltà prodotte dallo spezzamento delle curve fondamentali. Ecco un cenno, omesse le dimostrazioni:

1) Se una linea fondamentale corrispondente ad un punto fondamentale si spezza, le curve di cui si compone sono tutte, ovvero tutte meno una, corrispondenti a punti fondamentali infinitamente vicini a quel punto;

2) Esiste sempre almeno una curva fondamentale che non si spezza (quella d'ordine minimo), per la quale valgono le (13) (14). Se questa curva fondamentale è quella corrispondente al punto 1 si ha, invece delle (15)

$$1 + r_1 r_k \geq \sum_s \alpha_{s1} \alpha_{sk},$$

ovvero

$$r_1 r_k \geq \sum_s \alpha_{s1} \alpha_{sk}$$

secondochè la curva fondamentale corrispondente ad 1 fa parte o no della curva fondamentale corrispondente a k ;

3) Se L_1 (d'ordine r_1) è la curva fondamentale d'ordine minimo ed m , q , p i punti fondamentali della trasformazione pei quali le molteplicità di L_1 sono più elevate si ha (*)

$$\alpha_{m1} + \alpha_{q1} + \alpha_{p1} = r_1 + \beta_1 + 1, \quad \beta_1 \geq 0. \quad (25)$$

Si consideri la curva Λ_1 (composta o no di parti), di ordine $r_1 - 1$, avente tutte le proprietà di L_1 tranne che nei punti m , q , p abbia le molteplicità $\alpha_{m1} - 1$, $\alpha_{q1} - 1$, $\alpha_{p1} - 1$, il che per la (25) è permesso; e si dicano Λ'_1 la curva corrispondente a Λ_1 nella trasformazione involutoria, ρ_1 l'ordine di Λ'_1 e $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h$ le sue molteplicità nei punti fondamentali 1, 2, ... h . Prendendo

(*) Veggasi la mia Nota: *Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli*. Giornale di Napoli, t. 15.

m, q, p per punti fondamentali di una trasformazione quadratica, per la (18), si ha

$$n' \leq n - 3\rho_1 + \gamma_m + \gamma_q + \gamma_p + 3,$$

donde

$$n' \leq n - \rho_1 + 3.$$

Se $\beta_1 > 0$ si dimostra che $\rho_1 > 3$ e allora $n' < n$; cioè, se per la curva fondamentale d'ordine minimo si ha

$$\alpha_{m_1} + \alpha_{q_1} + \alpha_{p_1} > r_1 + 1,$$

la trasformazione è riducibile ad ordine minore. Questo risultato è ottenuto nell'ipotesi che si possano effettuare le trasformazioni quadratiche indicate. Che cosa accade se i punti m, q, p diventano infinitamente vicini in direzioni diverse? Possono allora essere applicate altre trasformazioni quadratiche che producano lo stesso risultato? (cfr. n.º 9).

Se $\beta_1 = 0$ si ha

$$\alpha_{m_1} + \alpha_{q_1} + \alpha_{p_1} = r_1 + 1,$$

cioè la curva fondamentale d'ordine minimo ha la somma delle molteplicità più elevate eguale all'ordine accresciuto di 1 e allora deve essere necessariamente (*) una delle seguenti (oltre la retta):

- una curva di 5° ordine con sei punti doppi;
- una curva di 6° ordine con un punto triplo e sette punti doppi;
- una curva di 8° ordine con sette punti tripli;
- una curva di 11° ordine con sette punti quadrupli e un punto triplo;
- una curva del 17° ordine con otto punti sestupli;
- una curva del 20° ordine con otto punti settupli;
- una curva di ordine r (r qualunque > 1) con un punto $(r-1)^{\text{uplo}}$.

Tutte le trasformazioni involutorie sarebbero riducibili a quelle che ammettono per curva fondamentale d'ordine minimo una delle precedenti. Sarebbe quindi da fare la discussione di questi casi.

Pisa, giugno 1877.

(*) Veggasi la Nota: *Sulle curve*, ecc., citata precedentemente.